532. 135:532. 526

非ニュートン流動の境界層論的取扱^{*}富 田 幸 雄^{**}Analytical Treatments of Non-Newtonian Fluid Flow
by Introducing the Approximations of Boundary Layer

by Yukio TOMITA

In this paper, it is first shown that the idea of the boundary layer, as in the case of the Newtonian fluid flow, may also be applicable to the non-Newtonian fluid flow at high Reynolds number in a wider sense $R_e^* = (\rho V^{2-1/n} L^{1/n}) / \mu_{psu}^{1/n}$ (ρ : density, V : characteristic velocity, L : characteristic length, μ_{psu} : pseudo viscosity similar to the viscosity of Newtonian fluid, n : rheological constant) and the fundamental equations of motion for non-Newtonian fluid can be simplified by introducing the approximations of the boundary layer. Then, the relation between the thickness of boundary layer δ and the Reynolds number R_e^* can also be deduced as follows:

$$\frac{\delta}{L} = O(R_e^{*-n/(n+1)})$$

Moreover, as an example of the analytical treatment by the boundary layer approximations, the flow state in the portion of inlet length of a circular pipe is also analysed by means of variational method. Thus, the respective relations between the inlet length x_l , the Hagenbach's correction ΔH of non-Newtonian flow and the rheological constant n have been found by the author's researches.

1. ま え が き

非ニュートン流体(擬塑性流体およびダイラタント流体)の基礎運動方程式はかなり複雑で, 管内流れなどの特別な場合以外は解を求めることが困難である。しかし慣性項が無視されるようなおそい流れの場合には, エネルギー論的方法により近似解を求め得る⁽¹⁾。

さてニュートン流体の速い流れ, すなわちレイノルズ数の大きい流れは, Prandtl によって提案された境界層理論によって近似的に解くことができる。非ニュートン流体は一般に粘性が大きく, その性格もニュートン流体の粘性とは異なるなどの点より考えて, 速い流れに対してニュートン流体に対するような境界層論的扱いができるかどうかは, かなり疑問の余地があると思われる。しかしこのような取り扱いによって, 概略ではあるが一つの傾向をとらえることができるであろう。そして非ニュートン流動の境界層論的扱いの一例として, 以下に述べる助走区間内の流動状態の解析結果は, かなり良い精度をもつことが期待される。

2. 広義のレイノルズ数が大きい場合に
おける運動方程式の各項の大きさ

境界層に対して運動方程式を簡単化するために, すなわち境界層の微分方程式を求めるために, まず境界層に対して運動方程式に現われる各項の大きさを調べることにする。このためにことごときを単純化して第 1 図に示すような非常に薄い平板に沿う二次元流れを考える。しからばこの場合の基礎運動方程式および連続の方程式はそれぞれ次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ + \frac{\mu_{psu}^{1/n}}{\rho} \left\{ \nabla^2 u + 2e_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x} + e_{xy} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

第 1 図 先のとがった薄い平板に沿う流れ

* 昭和 34 年 10 月 15 日 東京秋期講演大会において講演, 原稿受付 昭和 34 年 10 月 23 日。

** 正員, 東京工業大学(東京都目黒区大岡山 1)。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{psu}^{1/n}}{\rho} \left\{ \Theta \nabla^2 v + e_{yx} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2e_{yy} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right\} \quad (1 \cdot b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

ただし u, v はそれぞれ x, y 方向の分速度, p は圧力, ρ は密度, μ_{psu} はニュートン流体の粘度に類似な量で $[\text{kg}^n/\text{m}^n \cdot \text{s}^{2n-1}]$ なる次元をもつ, n は構造粘度指数またはレオロジー定数と呼ばれ流体の種類によって定まる量を表わし, かつ

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = e_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \Theta = \{2(e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + e_{xy}^2\}^{(1-n)/2n}$$

である. いま無限に遠くの一様な流れの速度を V , 平板の長さを L とし, 上述の方程式を無次元化するために

$$\left. \begin{aligned} u &= Vu', \quad v = Vv', \quad p = \rho V^2 p', \quad t = \frac{L}{V} t', \quad x = Lx', \quad y = Ly', \\ R_e^* &= \frac{\rho V^{2-(1/n)} L^{1/n}}{\mu_{psu}^{1/n}} \quad (\text{広義のレイノルズ数}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{および} \quad e_{xx} = \frac{V}{L} e_{xx}', \quad e_{yy} = \frac{V}{L} e_{yy}', \quad e_{xy} = \frac{V}{L} e_{xy}', \quad \Theta = \left(\frac{V}{L}\right)^{(1-n)/n} \Theta', \quad \nabla^2 = \frac{1}{L^2} \nabla'^2 \quad (4)$$

とおけば (1), (2) 式はそれぞれ次のように無次元化される.

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{R_e^*} \left\{ \Theta' \nabla'^2 u' + 2e_{xx'} \frac{\partial \Theta'}{\partial x'} + e_{xy'} \frac{\partial \Theta'}{\partial y'} \right\} \quad (5 \cdot a)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{R_e^*} \left\{ \Theta' \nabla'^2 v' + e_{yx'} \frac{\partial \Theta'}{\partial x'} + 2e_{yy'} \frac{\partial \Theta'}{\partial y'} \right\} \quad (5 \cdot b)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (6)$$

さて非ニュートン流動でも広義のレイノルズ数 R_e^* が大きい場合には境界層なるものが存在すると考え, 無次元化された運動方程式 (5) の各項の大きさを調べてみることにする. いま境界層の厚さ $\delta = L\delta'$ が一次の無限小であると仮定し

$$y' = \delta' \eta \quad (7)$$

とおけば η は x' と同程度の大きさとなる. かくして

$$\begin{aligned} &u', \quad \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial u'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2}, \quad e_{xx'}, \quad e_{yy'} \dots\dots 1 \text{ の程度の大きさ} \\ &v' = -\delta' \int_0^1 \frac{\partial u'}{\partial x'} d\eta, \quad \frac{\partial v'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial v'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} \dots\dots \delta' \text{ の程度の大きさ} \\ &\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{\delta'} \frac{\partial u'}{\partial \eta}, \quad e_{xy'} = \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{\delta'} \frac{\partial u'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} = \frac{1}{\delta'^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} \dots\dots \frac{1}{\delta'} \text{ の程度の大きさ} \\ &\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \frac{1}{\delta'^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} \dots\dots \frac{1}{\delta'^2} \text{ の程度の大きさ} \\ &\Theta' = \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{1}{\delta'} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \right)^2 \right\} + \left\{ \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{1}{\delta'} \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right\}^2 \right]^{(1-n)/2n} \\ &\quad = \left(\frac{1}{\delta'} \frac{\partial u'}{\partial \eta} \right)^{(1-n)/n} \dots\dots \left(\frac{1}{\delta'} \right)^{(1-n)/n} \text{ の程度の大きさ} \end{aligned}$$

となるから無次元化された運動方程式 (5) の各項の下に (圧力の項および広義のレイノルズ数 R_e^* の逆数だけは除いて), それに応ずる大きさを書きしるすと次のようになる.

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{R_e^*} \left\{ \Theta' \nabla'^2 u' + 2e_{xx'} \frac{\partial \Theta'}{\partial x'} + e_{xy'} \frac{\partial \Theta'}{\partial y'} \right\} \quad (8 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} &1 \quad 1 \cdot 1 \quad \delta' \cdot \frac{1}{\delta'} \quad \left(\frac{1}{\delta'} \right)^{(1-n)/n} \frac{1}{\delta'^2} \quad 1 \cdot \left(\frac{1}{\delta'} \right)^{(1-n)/n} \quad \frac{1}{\delta'} \left(\frac{1}{\delta'} \right)^{1/n} \\ &\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{R_e^*} \left\{ \Theta' \nabla'^2 v' + e_{yx'} \frac{\partial \Theta'}{\partial x'} + 2e_{yy'} \frac{\partial \Theta'}{\partial y'} \right\} \quad (8 \cdot b) \\ &\delta' \quad 1 \cdot \delta' \quad \delta' \cdot 1 \quad \left(\frac{1}{\delta'} \right)^{(1-n)/n} \frac{1}{\delta'} \quad \frac{1}{\delta'} \left(\frac{1}{\delta'} \right)^{(1-n)/n} \quad 1 \cdot \left(\frac{1}{\delta'} \right)^{1/n} \end{aligned}$$

境界層の中では粘性の影響と、慣性の影響が同程度の大きさであり、慣性の作用に相当する (8・a) 式の左辺中の対流項の大きさは 1 の程度であるから、したがって $1/R_e^*$ は $\delta'^{(n+1)/n}$ の程度の大きさでなければならないことがわかる。かくして境界層の厚さは

$$\delta' = \frac{\delta}{L} = 0(R_e^{*-n/(n+1)}) \quad (9)$$

となる。いま第 1 図のような流れの状態、流れの速度 $V=100 \text{ cm/s}$ である場合に、板の先端から $L=100 \text{ cm}$ 離れた所での境界層の厚さを計算してみると次のようになる。

(1) でん粉に水を加えたもの (ダイラタント流体)⁽²⁾ 温度 = 19°C , 濃度 = 14% , $\rho = 1.037 \text{ g/cm}^3$, $\mu_{\text{psu}} = 0.0165 \text{ g}^n/\text{cm}^n \cdot \text{s}^{2n-1}$, $n = 0.68$, $R_e^* = 4.33 \times 10^6$, $\delta = 0(0.2 \text{ cm})$

(2) 水 (ニュートン流体) 温度 = 20°C , $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$, $n = 1$, $R_e^* = 10^6$, $\delta = 0(0.1 \text{ cm})$

(3) でん粉のり (擬塑性流体)⁽³⁾ 温度 = 12°C , 濃度 = 4.4% , $\rho = 1.014 \text{ g/cm}^3$, $\mu_{\text{psu}} = 5.63 \text{ g}^n/\text{cm}^n \cdot \text{s}^{2n-1}$, $n = 1.67$, $R_e^* = 3.6 \times 10^3$, $\delta = 0(0.6 \text{ cm})$

かくして非ニュートン流動でも、広義のレイノルズ数 R_e^* が大きければニュートン流動と同様に境界層論的取扱いが可能であると考えても良いであろう。

3. 境界層の微分方程式

(8・b) 式の各項は δ' の大きさを有するから $\partial p'/\partial y'$ もまた δ' の大きさでなければならず、境界層が薄いと仮定されるかぎり境界層中における圧力の y 方向の変化は無視され、境界層内の圧力は外部の圧力と近似的に等しくなり、 x のみの関数となることがわかる。そして (1・a) 式の右辺の中括弧内は上述の考察から

$$\begin{aligned} & \theta \nabla^2 u + 2e_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x} + e_{xy} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ & \doteq \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/n} \right\} \end{aligned}$$

となるから境界層に対して運動方程式は次のように簡化される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \\ &+ \frac{\mu_{\text{psu}}^{1/n}}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/n} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

これらの式は物体の表面に沿って x 軸、表面に垂直に y 軸をとれば、曲った壁に沿う流れの境界層に対しても近似的に適用される。

4. 円管内層流助走区間について

大きい容器内の流体が、入口に十分大きな丸味の付いている円管内に流入する場合、流れは入口の断面上ではほぼ一様な速度分布をなすがそれより下流に行くにしたがい、壁面の境界層が発達してくるため速度分布はしだいに変化し、ついにある定常状態に達する。このような流れの範囲を助走区間と呼ぶことは良く知られているところである。助走区間における流れの状態を知ることが粘度測定などに際して重要であるため、ニュートン流体については実験的にも理論的にも数多く研究されている^{(4)~(7)}。

しかし近年の化学工業の進歩発達にともない、ニュートン流体以外のいわゆる非ニュートン流体が多数作り出され、これらの流体を取扱う必要が急激に増加してきた。そしてこれら非ニュートン流体の粘度測定などに際しては、ニュートン流体におけると同様に助走区間における流れの状態を知ることがぜひとも必要である。しかし非ニュートン流体の層流助走区間の理論的研究はほとんどなされていないようで、単にニュートン流体における結果を参考にして類推を行なっているにすぎない現状のように思われる⁽⁸⁾。それゆえここで非ニュートン流動の境界層論的取扱いの一例として、層流助走区間内の流動状態を調べてみることにする。

4.1 基礎方程式の誘導 本問題では円柱座標を用いた方が便利であるから、まず基礎運動方程式を円柱座標で書き変えることにする。

さて円柱座標を用いれば応力成分と変形速度成分との間の関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu_{\text{psu}}^{1/n} e_{rr} \theta \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu_{\text{psu}}^{1/n} e_{\theta\theta} \theta \\ p_{zz} &= -p + 2\mu_{\text{psu}}^{1/n} e_{zz} \theta \\ p_{\theta z} &= p_{z\theta} = \mu_{\text{psu}}^{1/n} e_{\theta z} \theta \\ p_{zr} &= p_{rz} = \mu_{\text{psu}}^{1/n} e_{zr} \theta \\ p_{r\theta} &= p_{\theta r} = \mu_{\text{psu}}^{1/n} e_{r\theta} \theta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし

$$\theta = \{2(e_{rr}^2 + e_{\theta\theta}^2 + e_{zz}^2) + e_{\theta z}^2 + e_{zr}^2 + e_{r\theta}^2\}^{(1-n)/2n}$$

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial q_r}{\partial r}, & e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{q_r}{r}, & e_{zz} &= \frac{\partial q_z}{\partial z}, & e_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial q_z}{\partial \theta} + \frac{\partial q_\theta}{\partial z}, \\ e_{rz} &= \frac{\partial q_r}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial r}, & e_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} + \frac{\partial q_\theta}{\partial r} - \frac{q_\theta}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

で q_r, q_θ, q_z はそれぞれ r, θ, z 方向の分速度を表わす。一般に運動方程式を円柱座標で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[\frac{Dq_r}{Dt} - \frac{q_\theta^2}{r} \right] &= F_r + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r p_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial r p_{zr}}{\partial z} \right] - \frac{p_{\theta\theta}}{r} \\ \rho \left[\frac{Dq_\theta}{Dt} + \frac{q_r q_\theta}{r} \right] &= F_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r p_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial r p_{z\theta}}{\partial z} \right] + \frac{p_{r\theta}}{r} \\ \rho \frac{Dq_z}{Dt} &= F_z + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r p_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial r p_{zz}}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここで F_r, F_θ, F_z は流体の単位体積に働く外力の r, θ, z 方向の成分を表わし、また

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + q_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{q_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + q_z \frac{\partial}{\partial z}$$

である。(14) 式の応力成分に (12) 式の関係を代入し、さらに連続の方程式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

を使用すれば結局次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[\frac{Dq_r}{Dt} - \frac{q_\theta^2}{r} \right] &= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu_{psu}^{1/n} \left[\Theta \left\{ \nabla^2 q_r - \frac{q_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} \right\} + 2e_{rr} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e_{r\theta}}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + e_{rz} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] \\ \rho \left[\frac{Dq_\theta}{Dt} + \frac{q_r q_\theta}{r} \right] &= F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu_{psu}^{1/n} \left[\Theta \left\{ \nabla^2 q_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} - \frac{q_\theta}{r^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + e_{\theta r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{2}{r} e_{\theta\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + e_{\theta z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] \\ \rho \frac{Dq_z}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_{psu}^{1/n} \left[\Theta \nabla^2 q_z + e_{zr} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{e_{z\theta}}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + 2e_{zz} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ただし $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

である。上式が円柱座標で表わされた、非ニュートン流動の基礎運動方程式である。

さて本問題では管内平均流速を u_a 、管の内半径を a とし、管軸に沿って z 軸をとり管入口に原点をおく円柱座標 r, θ, z を用いる。しからば流れは軸対称であるから $\partial/\partial\theta=0, q_\theta=0$ となり、 $q_r=V, q_z=U$ とおけば (16) 式は次のようになる (第2図)。

$$\left. \begin{aligned} V \frac{\partial V}{\partial r} + U \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu_{psu}^{1/n}}{\rho} \left[\Theta \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{V}{r^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \right\} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ V \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_{psu}^{1/n}}{\rho} \left[\Theta \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \right\} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + 2 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここで $\Theta = \left\{ 2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right\}^{(1-n)/2n}$

であり、連続の方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となる。境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \text{ で } U=u_a, \quad V=0 \\ r=a \text{ で } U=0, \quad V=0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

である。

さてここで層流の保たれる範囲内で広義のレイノルズ数

$$R_e^* = \frac{\rho u_a^{2-(1/n)} a^{1/n}}{\mu_{psu}^{1/n}} \dots\dots\dots (20)$$

が大きい流れを考えれば、2 で述べた境界層論的取扱いにより (17) 式で

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \theta = \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^{(1-n)/n}$$

とおき得るから、管軸に垂直な断面内ではすべての点で圧力は等しくな

り、圧力は z のみの関数となる。かくして運動方程式 (17) および連続の方程式 (15) はそれぞれ次のようにな

$$U \frac{\partial U}{\partial z} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{\mu_{psu}^{1/n}}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^{1/n} \right\} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^{1/n} \right] \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) = 0 \dots\dots\dots (22)$$

いま、(21), (22) 式を無次元形にするために

$$x = \frac{z}{aR_e^*}, \quad y = \frac{r}{a}, \quad u = \frac{U}{u_a}, \quad v = \frac{VR_e^*}{u_a}, \quad p = \rho u_a^2 p' \dots\dots\dots (23)$$

とおけば、(21), (22) 式はそれぞれ次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp'}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/n} \right\} + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/n} \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (yv) = 0 \dots\dots\dots (25)$$

4.2 変分法による解法 層流助走区間の流動状態の解析にはいろいろの方法があるであろうが、ここでは、ニュートン流体の層流助走区間の流れを変分法を用いて解き、非常に良い結果を得た植松教授⁽⁹⁾らの方法を使用して (24), (25) 式を近似的に解くことにする。

(25) 式を用いれば (24) 式は

$$-\frac{u}{y} \frac{\partial}{\partial y} (yv) + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp'}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/n} \right\} + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/n} \dots\dots\dots (26)$$

のように書き改められる。さて管の中心部に粘性の影響を受けない一様な速度分布の部分が存在するとすれば、(26) 式右辺の第 1 項はその部分の速度 u_0 ($u_0 = U_0/u_a$) によって

$$-\frac{dp'}{dx} = u_0 \frac{du_0}{dx} \dots\dots\dots (27)$$

なる関係から定まることになる。かくして v が y の関数として与えられれば、(26) 式は管軸に垂直な一つの断面に注目するとき、 y の関数 u についての微分方程式となる。いま

$$E[u] \equiv -\frac{u}{y} \frac{\partial}{\partial y} (yv) + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/n} \right\} - \frac{1}{y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/n} \dots\dots\dots (28)$$

とおけば (26) 式は

$$E[u] = -\frac{dp'}{dx} \dots\dots\dots (29)$$

となる。

さてここで y のある関数 $w(y)$ を補助関数として、 u, w の範囲関数

$$L[u, w] = \frac{\int_0^1 w E[u] y dy}{\int_0^1 w y dy} \dots\dots\dots (30)$$

を考える。そしてこの式の右辺において u, w を変化させたとき $L[u, w]$ が停留値をとる条件を求めてみる。

第 2 図 助走区間における流動状態

このさい u, w の変分 $\delta u, \delta w$ は互に独立にとることができる。まず $\delta u=0$ の場合を考えると $L[u, w]$ が停留値をとる条件、すなわち $\delta L=0$ 条件は

$$\int_0^1 \left\{ E[u] \int_0^1 w y dy - \int_0^1 w E[u] y dy \right\} y \delta w dy = 0 \quad (31)$$

となる。(31) 式が任意の δw に対して成り立つためには次式が満足されなければならない。

$$E[u] = \frac{\int_0^1 w E[u] y dy}{\int_0^1 w y dy} \quad (32)$$

ここで (32) 式の右辺は $L[u, w]$ の停留値であるから、(32) 式は

$$E[u] = \text{定数} \quad (33)$$

なる微分方程式であり、右辺の定数が L の停留値を与えることになる。(33) 式は (29) 式と同じ形の微分方程式である。しかし管内定常流れにおいて、停留関数 u および連続の方程式から得られる v 、すなわち実現される流速成分 u, v に対しては (29) 式の右辺より明らかなように $E[u]$ は $-dp'/dx$ に等しくなるから、 L の停留値は $-dp'/dx$ を与えることがわかる。次に $\delta w=0$ の場合を考えると $\delta L=0$ の条件は部分積分を用いて計算すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ 2w \frac{\partial(yv)}{\partial y} + yv \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-n}{n^2} y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-2n)/n} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial w}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{1}{n} y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \delta u dy - \left[\left\{ yvw + \frac{1}{n} y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \delta u \right]_0^1 \\ + \left[\frac{1}{n} wy \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right]_0^1 = 0 \quad (34) \end{aligned}$$

ここで境界条件 (19) 式より壁面 $y=1$ で $u=0$ なるゆえ $\delta u=0$ とする。さらに補助関数 $w(y)$ に対して境界条件

$$y=1 \quad \text{で} \quad w=0 \quad (35)$$

を付加すると (34) 式の左辺第 2 項、第 3 項は 0 となり結局 $\delta L=0$ の条件は

$$\int_0^1 \left\{ 2w \frac{\partial(yv)}{\partial y} + yv \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-n}{n^2} y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-2n)/n} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial w}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{1}{n} y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \delta u dy = 0 \quad (36)$$

となる。一方連続の式より

$$\int_0^1 u y dy = \text{一定} \quad (37)$$

が成り立つから

$$\int_0^1 y \delta u dy = 0 \quad (38)$$

が得られる。よって任意の δu に対して (36) 式が成り立つためには、(38) 式を考慮して

$$2 \frac{w}{y} \frac{\partial(yv)}{\partial y} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-2n)/n} \left\{ \frac{1-n}{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \text{定数} \quad (39)$$

でなければならないことがわかる。かくして運動方程式 (26) を解くかわりに、 $L[u, w]$ が停留値をとるように u, w を定めてそのときの L の値を求めれば、それが圧力こう配を与えることになるのである。そこで次に上述の変分問題を Ritz の方法を用いて解くことにする。

さて構造粘度指数 n なる非ニュートン流体の管内流れにおいて、完全に発達した層流速度分布は、管軸上の流速を u_0 とすれば次のように表わされる。

$$u = u_0 \{1 - y^{n+1}\} \quad (40)$$

いまこれを一般化して助走区間内の任意の断面における速度分布が

$$u = u_0 \{1 - y^{\alpha+1}\} \quad (41)$$

のように表わされると仮定する。ここで α は x の関数で、管入口においては断面全体にわたって一様な速度分布を有するから $x \rightarrow 0$ のとき $\alpha \rightarrow \infty$ となり、 x が十分大きいときには (40) 式で表わされる速度分布になることから $x \rightarrow \infty$ のとき $\alpha \rightarrow n$ でなければならないことがわかる。また連続の式 (37) より

$$u_0 = \frac{\alpha + 3}{\alpha + 1}$$

なる関係が得られるから (41) 式は

$$u = \frac{\alpha + 3}{\alpha + 1} \{1 - y^{\alpha+1}\} \dots\dots\dots (42)$$

となる。かくしてこの式中の α を、 L が停留値をとる条件によって定めることにする。

L が停留値をとるときの α の値を α_0 とすれば、連続の方程式 (25) 式によって v は次のようになる。

$$v = \left[\frac{y}{(\alpha_0 + 1)^2} \{1 - y^{\alpha_0+1}\} + \frac{y^{\alpha_0+2}}{\alpha_0 + 1} \log y \right] \frac{d\alpha_0}{dx} \dots\dots\dots (43)$$

また補助関数 $w(y)$ に対する微分方程式は (39) 式であり、 $x \rightarrow \infty$ のとき $v = 0$ となるべきであるから (39) 式は $x \rightarrow \infty$ では

$$\begin{aligned} L = & \left[\frac{(\alpha+3)}{(\alpha+1)(\alpha_0+1)^2} \frac{d\alpha_0}{dx} \left\{ \frac{2}{\alpha_0+3} - \frac{1}{\alpha_0+2} - \frac{\alpha-1}{\alpha+3} + \frac{2(\alpha-1)}{\alpha+\alpha_0+4} - \frac{(\alpha-1)}{\alpha+2\alpha_0+5} \right. \right. \\ & - \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0+3)}{4(\alpha_0+2)^2} - \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0-\alpha+2)}{(\alpha+\alpha_0+4)^2} + \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0-\alpha+2)}{(\alpha+2\alpha_0+5)^2} \left. \right\} + \frac{n(\alpha+3)^{1/n}(\alpha_0+1)}{n(\alpha_0+2)+\alpha} \Big] \\ & + c \left[\frac{(\alpha+3)}{(\alpha+1)(\alpha_0+1)^2} \frac{d\alpha_0}{dx} \left\{ -\frac{2}{n+3} + \frac{4}{n+\alpha_0+4} - \frac{2}{n+2\alpha_0+5} - \frac{\alpha-1}{n+\alpha+4} + \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha_0+\alpha+5} \right. \right. \\ & - \frac{\alpha-1}{n+\alpha+2\alpha_0+6} + \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0+3)}{(n+\alpha_0+4)^2} - \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0+3)}{(n+2\alpha_0+5)^2} - \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0-\alpha+2)}{(n+\alpha+\alpha_0+5)^2} \\ & \left. \left. + \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0-\alpha+2)}{(n+\alpha+2\alpha_0+6)^2} \right\} + \frac{n(n+\alpha)(\alpha+3)^{1/n}(\alpha_0+1)}{\{n(n+2)+\alpha\}\{n(n+\alpha_0+3)+\alpha\}} \right] \Big/ \left\{ \frac{\alpha_0+1}{2(\alpha_0+3)} + \frac{c(\alpha_0+1)}{(n+3)(n+\alpha_0+4)} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (48)$$

が得られる。さて L が停留値をとる条件は

$$\frac{\partial L}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$$

である。そして前にのべたところによりこの両式で α はすべて α_0 とおかなければならない。 $\partial L / \partial c = 0$ より

$$\frac{dx}{d\alpha_0} = F(\alpha_0) \dots\dots\dots (49)$$

が得られる。ただし

$$\begin{aligned} F(\alpha_0) = & \left[\frac{1}{2(\alpha_0+1)^2} \left\{ -\frac{2}{n+3} - \frac{\alpha_0-5}{n+\alpha_0+4} + \frac{2(\alpha_0-2)}{n+2\alpha_0+5} - \frac{\alpha_0-1}{n+3\alpha_0+6} + \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0+3)}{(n+\alpha_0+4)^2} \right. \right. \\ & - \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0+5)}{(n+2\alpha_0+5)^2} + \frac{2(\alpha_0+1)}{(n+3\alpha_0+6)^2} \left. \right\} - \frac{(\alpha_0+3)}{(n+3)(n+\alpha_0+4)(\alpha_0+1)^2} \left\{ \frac{6}{\alpha_0+3} - \frac{4}{\alpha_0+2} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_0-1}{3\alpha_0+5} - \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0+5)}{4(\alpha_0+2)^2} + \frac{2(\alpha_0+1)}{(3\alpha_0+5)^2} \right\} \Big] \\ & \Big/ \left[n(\alpha_0+1)^2(\alpha_0+3)^{1/n} \left\{ \frac{1}{(n+3)(n+\alpha_0+4)\{2n+(n+1)\alpha_0\}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(n+\alpha_0)}{2(\alpha_0+3)\{n(n+2)+\alpha_0\}\{n(n+3)+(n+1)\alpha_0\}} \right\} \right] \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-2n)/n} \left\{ \frac{1-n}{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \frac{\partial w}{\partial y} \\ + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{(1-n)/n} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \text{定数} \equiv A \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

となる。この式中の流速 u に (40) 式 [ただし $u_0 = (n+3)/(n+1)$] を用いれば (44) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{n}{y} \frac{\partial w}{\partial y} = -n(n+3)^{(n-1)/n} A y^{n-1} \dots\dots\dots (45)$$

しかるときは境界条件 (35) 式を満足する (45) 式の解は

$$w = \frac{(n+3)^{(n-1)/n}}{2(n+1)} A (1-y^{n+1}) \dots\dots\dots (46)$$

となる。よって助走区間内の任意の断面における w として (46) 式を一般化して次のようにおく。

$$w = (1-y^{\alpha_0+1})(1+cy^{n+1}) \dots\dots\dots (47)$$

ここで右辺にかかる定数は (30) 式によって、 L に影響を与えないことがわかるから 1 とおくことにする。

さらに c は L が停留値をとる条件によって定まる x の関数である。

かくして (42), (43), (47) 式を (30) 式に代入すれば

である。よって $x \rightarrow 0$ のとき $\alpha_0 \rightarrow \infty$ として (49) 式を積分すれば

$$x = \int_{\infty}^{\alpha_0} F(\alpha_0) d\alpha_0 \dots\dots\dots (51)$$

となる。この式で x と α_0 の関係がわかり、したがって助走区間の任意の横断面における速度分布が判明することになる。(51) 式は任意の構造粘度指数 n に対して積分することは困難であるから、数値積分または図式積分によるのが便利であろう。 $n=2$ に対する (51) 式の計算結果を第3図に示す。また助走区間の長さ $x_l = z_l / (aR_e^*)$ として $(\alpha_0 - n)/n = 0.01$ を満足する α_0^* に対応する x の値を採用することにして、種々の n に対する計算結果を示せば第4図のごとくなる。この図よりわかるように $n=1$ なるニュートン流体に対しては $x_l = 0.266$ となり、Nikuradse⁽⁷⁾ の実験結果 $x_l = 0.25$ に対して 6.4% 大きくなっている。もちろん n の変化につれて本近似解の精度は一様ではないかもしれないが、しかし構造粘度指数 n の変化に対して助走区間の長さ x_l がどのように変化するかを明らかにした点のみでも、かなり意義があるのではないと思われる。

4.3 圧力損失の計算 4.2 に述べたところにより $\partial L / \partial c = 0$ の条件を考慮すれば L の停留値は

$$L = \frac{\int_0^1 (1 - y^{\alpha_0+1}) E[u] y dy}{\int_0^1 (1 - y^{\alpha_0+1}) y dy}$$

となるから、(48) 式において $c=0$, $\alpha = \alpha_0$ とおけばよい。そして 4.2 に述べたように L の停留値は $-dp'/dx$ に等しくなるから、結局次のような関係が得られる。

$$\begin{aligned} -\frac{dp'}{dx} = & \frac{2(\alpha_0+3)^2}{(\alpha_0+1)^4} \frac{d\alpha_0}{dx} \left\{ \frac{6}{\alpha_0+3} - \frac{4}{\alpha_0+2} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_0-1}{3\alpha_0+5} - \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0+5)}{4(\alpha_0+2)^2} + \frac{2(\alpha_0+1)}{(3\alpha_0+5)^2} \right\} \\ & + \frac{2n(\alpha_0+3)^{(n+1)/n}}{2n+(n+1)\alpha_0} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

第3図 $\alpha_0 \sim x$

いま管軸の高さにおける容器内の圧力を $p_0 = \rho u_a^2 p_0'$ とすれば、管入口 $x=0$ における圧力 $p_i = \rho u_a^2 p_i'$ は

$$p_i' = p_0' - 1/2$$

となるから、(52) 式を積分すれば助走区間内における圧力損失の式として

$$\begin{aligned} \frac{p_0' - p_i'}{1/2} = & 4 \int_{\infty}^{\alpha_0} \left[\frac{(\alpha_0+3)^2}{(\alpha_0+1)^4} \left\{ \frac{6}{\alpha_0+3} - \frac{4}{\alpha_0+2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\alpha_0-1}{3\alpha_0+5} - \frac{(\alpha_0+1)(\alpha_0+5)}{4(\alpha_0+2)^2} + \frac{2(\alpha_0+1)}{(3\alpha_0+5)^2} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{n(\alpha_0+3)^{(n+1)/n}}{2n+(n+1)\alpha_0} F(\alpha_0) \right] d\alpha_0 + 1 \dots\dots (53) \end{aligned}$$

が得られる。かくして (51), (53) 式より α_0 を媒介変数として助走区間内の任意の点 x と、管入口からその点までの圧力損失の関係が求まることになる。

一方完全に発達した層流速度分布をもつ定常状態では、平均流速 u_a は次式で表わすことができる⁽⁸⁾。

$$u_a = \frac{a\tau_w^n}{(n+3)\mu_{psu}} \dots\dots\dots (54)$$

ただし τ_w は壁面せん断応力である。ここで

$$\tau_w = -\frac{a}{2} \frac{dp}{dz} \dots\dots\dots (55)$$

なる関係式および (20) 式の広義のレイノルズ数 R_e^* を使用して (54) 式を変形すれば次式のようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dz} = & \frac{2\{(n+3)\mu_{psu}u_a\}^{1/n}}{a^{1+(1/n)}} \\ = & \frac{4(n+3)^{1/n}}{aR_e^*} \left\{ \frac{1}{2} \rho u_a^2 \right\} \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

この式を (23) 式を使用して無次元化すれば

$$-\frac{dp'}{dx} = 2(n+3)^{1/n} \dots\dots\dots (57)$$

となり、積分すれば $x = x_l$ と $x(>x_l)$ の間の圧力損

第4図 $x_l \sim n$

失 $p_l' - p'$ は

$$\frac{p_l' - p'}{1/2} = 4(n+3)^{1/n} \{x - x_l\} \dots \dots \dots (58)$$

となる。よって容器と $x(>x_l)$ の間の圧力損失 $p_0' - p'$ は (53), (58) 式より次のようになる

$$\frac{p_0' - p'}{1/2} = 4(n+3)^{1/n} x + \Delta H \dots \dots \dots (59)$$

ただし 4.2 で述べたように $\alpha_0^* = 1.01n$ とすれば

$$\begin{aligned} \Delta H = 4 \int_{\infty}^{\alpha_0^*} & \left[\frac{(\alpha_0 + 3)^2}{(\alpha_0 + 1)^4} \left\{ \frac{6}{\alpha_0 + 3} - \frac{4}{\alpha_0 + 2} \right. \right. \\ & - \frac{\alpha_0 - 1}{3\alpha_0 + 5} - \frac{(\alpha_0 + 1)(\alpha_0 + 5)}{4(\alpha_0 + 2)^2} \\ & + \left. \frac{2(\alpha_0 + 1)}{(3\alpha_0 + 5)^2} \right\} + \left\{ \frac{n(\alpha_0 + 3)^{(n+1)/n}}{2n + (n+1)\alpha_0} \right. \\ & \left. \left. - (n+3)^{1/n} \right\} F(\alpha_0) \right] d\alpha_0 + 1 \dots \dots \dots (60) \end{aligned}$$

である。 $n=2$ に対する助走区間の圧力損失を (51), (53) 式を用いて計算すれば第 5 図のようになる。また種々の n に対する ΔH を (60) 式によって計算すれば第 6 図のごとくなる。この図よりわかるごとく $n=1$ なるニュートン流体に対する ΔH , すなわち Hagenbach の補正項は 2.20 となる。かくしてニュートン流体における Hagenbach の補正項に相当する, 圧力損失の補正項と構造粘度指数 n との関係がある程度明らかになったと思われる。

5. 結 論

広義のレイノルズ数 $R_e^* = (\rho V^{2-(1/n)} L^{1/n}) / \mu_{psu}^{1/n}$ が大きい場合には, ニュートン流動におけると同様に, 非ニュートン流動に対しても境界層論的取扱が可能であることを明らかにした。そして境界層の厚さ δ と広義のレイノルズ数 R_e^* との関係は次のようになる。

$$\frac{\delta}{L} = 0(R_e^* - n/(n+1))$$

さらに境界層論的取扱いの一例として, 非ニュートン流体の円管内層流助走区間の流動状態を変分法によって解析した。その結果助走区間の長さ, ならびにニュートン流体における Hagenbach の補正項に相当する, 圧力損失の補正項と構造粘度指数 n との関係が明らかになった。いままではこれらに関しては, ほとんどニュートン流体における結果を参考にして類推を行っているにすぎない状態であったが, 本論文によりこれらの諸点がかなり明確になったのではないかと考えられる。

終りにのぞみ終始御懇篤な御指導をいただいた東京工業大学 板谷松樹教授ならびに 貴重なデータを貸与

第 5 図 $(p_0' - p') / (1/2) \sim x$

第 6 図 $\Delta H \sim n$

下された金沢大学化学工学科の平井英二博士に深く感謝いたします。また数値計算に御助力下さった東京工業大学学生 寺本直樹君に心から感謝いたします。

文 献

- (1) 富田, 機械学会論文集, 25, 149 (昭 34-1), 17.
- (2) 平井, 化学工学, 22, 6 (昭 33-6), 379.
- (3) 長谷川, 平井, 化学工学, 20, 1 (昭 31-1), 15.
- (4) L. Schiller, *Forsch. Arb. Ing.*, 248 (1922), 22.
- (5) W. Riemann, *J. Am. Chem. Soc.*, 50, 1 (1928), 44.
- (6) S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vol. 1 (1950), 308, Oxford Univ. Press.
- (7) L. Prandtl & O. Tietjens, *Hydro-und Aeromechanik*, Bd. 2 (1931), 29, Springer-Verlag.
- (8) F.R. Eirich, *Rheology*, Vol. II (1958), 479, Academic Press Inc.
- (9) 植松, 八田, 中村, 機械学会論文集, 21, 105 (昭 30-5) 321.