アナログ計算に際しては東大生研の大島康次郎助教授の御厚意により磁気テープ式むだ時間装置を借用させていただいた。また、計算に当り同研究室の富成 襄氏および鈴木孝治氏に種々お手数をおかけしたことをあわせて厚く御礼申上げる。

文 献

- (1) O.J.M. Smith, *Feedback Control Systems*, Chapt.

9 & 10, (1958), McGraw-Hill.

- (2) O.J.M. Smith, *Chem. Engng. Progr.*, 53, 5 (1957), 217.
 (3) O.J.M. Smith, *I.S.A.J.*, 6, 2 (1959), 28.
 (4) 岡村精久, 東京大学修士論文 (昭34-3).
 (5) 沢野, 自動制御研究会集資料 No. 113 (昭 34).
 (6) 寺野, 機械学会論文集, 15, 50 (昭24-10), II-47.
 (7) 増淵, 機械学会論文集, 25, 155 (昭34-7), 703.

621-52 : 534.014.5

むだ時間を含む系の近似非線形最適制御*

三 卷 達 夫**

Modified Optimum Nonlinear Control in Retarded Systems

by Tatsuo MITSUMAKI

The optimum nonlinear control is applicable to the second order controlled systems, even if there exists a dead time. In this case, the manipulated variable should be switched by four switching curves in the phase-plane, which however, results in the increase of the complexities of the controller. In the previous paper, the author proposed a control method-modified optimum nonlinear control-which reduces the complexities of the controller by replacing a switching curve with a switching line and modifying a magnitude of the manipulated variable in the latter half of the response. This paper shows that the modified optimum control method is applicable to a system with a dead time and is very effective in reducing the complexities of the controller. The theoretical study and the analog computer study of this control method are also included.

1. ま え が き

操作量の飽和値を有効に利用する非線形最適制御⁽¹⁾も、制御対象にむだ時間が存在するとそれだけ前に操作量の切換えを行なわなければならない。この場合切換曲線は第1図のような曲線群となり⁽²⁾、これを実現

第1図 むだ時間を含む系の非線形最適制御

するには非常に複雑な数式を計算するか、または4本の切換曲線を模擬することが必要であり実現はむずかしい。しかし切換曲線を直線でおきかえ、操作量を応答の後半で控える近似非線形最適制御では⁽³⁾、むだ時間が存在しても切換えはすべて直線群となり簡単な論理回路で制御できる。本報告ではこれに関する理論的ならびにアナログ計算機による検討について述べる。また単純なリレー制御もむだ時間のある場合には、かえって非線形最適制御に近い結果を与えることを指摘した。

2. 記 号

- e : 偏差 $e=r-c$
 $\dot{e}$: 偏差の微分値
 m : 操作量
 t : 時間
 s : ラプラス演算子
 L : むだ時間 (l : 標準化した量を示す)
 α : 時定数の逆数

* 昭和 34 年 4 月 4 日 第 36 期通常総会講演会および昭和 34 年 10 月 16 日 東京秋期講演大会において講演、原稿受付 昭和 35 年 2 月 24 日。

** 正員、日立製作所中央研究所 (東京都北多摩郡国分寺町恋ヶ窪)。

K : ゲイン定数

h_{1-6} : 定数

k : 切換直線のこう配 ($L=0$ の場合)

k_1 : 第1切換直線のこう配 (L のある場合)

k_2 : 第2切換直線のこう配 ()

3. むだ時間を含む系の近似非線形最適制御

近似非線形最適制御とは位相面を直線で区切り, 第2図の斜線の領域ではそれぞれの符号の最大操作量を与え, それによる応答が切換直線

$$e + k\dot{e} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を切ったとき, そのときの偏差 e_s に比例して操作量

$$m = \mp A \frac{e_s}{a} \quad \dots\dots\dots (2)$$

を控え, 応答を位相面のちょうど原点にもってくる制御方式である. しかしむだ時間があると操作量の切換えおよび0に保つのを L だけ前に行なう必要がある.

(1) 第1切換直線 いま切換直線 $e + k\dot{e} = 0$ より L だけ前の切換条件を求める. この点を $a, \dot{a}$ (第2図のように) と仮定すると, この点を初期値として操

第2図 近似非線形最適制御の原理

むだ時間のないときの切換直線
むだ時間を含むときの第1切換直線

第3図 第1切換直線

作量 $+A$ で t だけ後の状態は,

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= f(t) + g_1(t) \cdot a + g_2(t) \cdot \dot{a} \\ \dot{e}(t) &= f'(t) + g_1'(t) \cdot a + g_2'(t) \cdot \dot{a} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし $f(t)$ は操作量による項であり,

$g_1(t), g_2(t)$ は初期条件による項である.

いま L だけ後の $e, \dot{e}$ を求めるのには $f(t), g_1(t), g_2(t), f'(t), g_1'(t)$ および $g_2'(t)$ はそれぞれ $t=L$ を代入して定数として扱うことができる. ゆえに

$$\left. \begin{aligned} e &= h_1 + h_2 \cdot a + h_3 \cdot \dot{a} \\ \dot{e} &= h_4 + h_5 \cdot a + h_6 \cdot \dot{a} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

この $e, \dot{e}$ が $e + k\dot{e} = 0$ を満足するように解くと,

$$(h_1 + kh_4) + (h_2 + kh_5)a + (h_3 + kh_6)\dot{a} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

すなわち第1切換は第3図のように直線であり, このこう配および横軸との交点は次式で表わされる.

$$\text{こう配 } k_1 = \frac{h_3 + kh_6}{h_2 + kh_5} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{横軸との交点 } a_0 = -\frac{h_1 + kh_4}{h_2 + kh_5} \quad \dots\dots\dots (7)$$

次に控えるべき操作量の値であるが, $L=0$ の場合には第3図の Q 点の偏差 e_s に比例した値でよかったが, いまは第1切換直線上の P 点で操作量を決定することが必要である. (4)式の $e, \dot{e}$ に Q 点の座標 $e_{s1}, -e_s/k$ を代入し,

$$\left. \begin{aligned} e_s &= h_1 + h_2 a + h_3 \dot{a} \\ -e_s/k &= h_4 + h_5 a + h_6 \dot{a} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

この両式より $\dot{a}$ を消去し, P 点の偏差 a を a_s と書くと,

$$e_s = \frac{(h_6 h_1 - h_3 h_4) + (h_6 h_2 - h_3 h_5) a_s}{h_6 + h_3/k} \quad \dots\dots\dots (9)$$

を得る. ゆえに操作量としては応答が第1切換直線を切ったとき, そのときの偏差 a_s に簡単な線形演算 ($c_0 + c_1 a_s$) により求めることができる.

(2) 第2切換直線 次に第2切換直線を求める. これは原点より L だけ前に操作量を平衡値に保つものである. いま $(b, \dot{b})$ 点なる初期条件より $-F$ なる操作量で L だけの時間でちょうど原点にもどったものとする. 初期値が $(b/2, \dot{b}/2)$ の点からは $-F/2$ の操作量を与えれば線形特性のため, 同じ L だけ後にやはり原点に第4図のようにもどることになる. いま近似非線形最適制御では応答の後半は原点を通る切換直線上より偏差に比例する操作量を与えられている. したがって第2切換えとしては原点より L だけ前の点を連ねる直線

$$e + k_2 \dot{e} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる. このように第1, 第2切換えとも直線となり, これを比較的簡単な装置で実現することがで

きる。以上をまとめるとむだ時間を含む場合でも第5図のように位相面を直線群で区切り、それぞれの領域で対応する操作量を与えれば、非線形最適制御に近い制御を行なうことができる。

4. 制御装置の構成

このような制御動作を実現するには第6図のような構成をとる。むだ時間が存在しても切換えがいずれも直線となるので、割合簡単な装置で実現することができる。偏差およびその微分値との和を三つの2位置または3位置要素に与え、これらの情報の組合せにより現在の e および $\dot{e}$ が位相面のどの領域にあるかによって第6図のような操作量を与えれば非線形最適制御に近い応答を得ることができる。このように操作量として最大値もしくは控えた値を与えるが、ここで控える値とは応答が第1切換直線を切ったときの偏差をもとにして(9)式のような線形演算に従う値である。なお偏差の小さい間は線形制御をさせているが、これはリミットサイクルを防ぐもので特にむだ時間のある場合には必ず必要である。

この構成はむだ時間のない場合に比較すると、3位置要素が一つ増し、また控える値を計算するのに定数

第4図 第2切換直線

第5図 むだ時間を含む系の近似非線形最適制御

項を加算することが増したにすぎず、むだ時間が存在すると極端に制御装置の複雑さが増すということはない。この制御装置の調整すべき量としては特に非線形的な切換直線に関係あるものとしては、第1切換直線のこう配 k_1 、横軸との交点 a_0 および第2切換直線のこう配 k_2 である。

5. 各種二次系に対する第1, 第2切換直線

制御対象の特性として $G(s)$ (もちろんむだ時間を含む)、また最大操作量として A が与えられた場合、制御装置の調整値としては第1, 第2切換直線、控える値の計算式であるが、以下これらを二次の種々の場合につき述べる。

$$(1) \text{ 二次の積分系 } G(s) = K \frac{e^{-Ls}}{s^2} \quad \text{いま}$$

$M/A \rightarrow m, E/AK \rightarrow e, \dot{E}/AK \rightarrow \dot{e}, t \rightarrow \tau, L \rightarrow l$ と標準化する。ここで大文字は標準化する前の実際の変数、小文字は標準化した変数を示す。

$$\therefore e_{\max} = \frac{R_{\max}}{AK}$$

領域	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭
e	正	0	負	正	0	負	正	0	負	正	0	負	正	0
$e + k_1 \dot{e}$	正	0	負	正	0	負	正	0	負	正	0	負	正	0
$e + k_2 \dot{e}$	正	0	負	正	0	負	正	0	負	正	0	負	正	0
操作量	正最大値	正の控えた値またはゼロ	負の控えた値またはゼロ	負の控えた値またはゼロ	負最大値	負の控えた値またはゼロ	正の控えた値またはゼロ	正最大値	正の控えた値またはゼロ	負の控えた値またはゼロ	負最大値	負の控えた値またはゼロ	正の控えた値またはゼロ	正最大値

第6図 制御装置の構成

非線形最適制御の切換曲線は

$$e + \frac{1}{2} \dot{e} |\dot{e}| = 0$$

$e_{\max}$ よりの応答は

$$e + \frac{1}{2} (\dot{e})^2 = e_{\max}$$

切換直線のこう配 k ($L=0$ の場合) はこの交点を通るように選ばれるゆえ

$$k = 0.5 \sqrt{e_{\max}} \quad (11)$$

第1切換直線の定数値としては,

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{l^2}{2} & h_2 &= 1 & h_3 &= l \\ h_4 &= -l & h_5 &= 0 & h_6 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ゆえに

$$k_1 = k + l \quad (13)$$

$$a_0 = l(l/2 + k) \quad (14)$$

操作量を控えるべき数式は

$$e_s = \frac{l^2/2 + a_s}{1 + l/k} \quad (15)$$

第2切換直線のこう配 k_2 は

$$k_2 = 0.5 l \quad (16)$$

$$(2) \text{ 一次の積分性 } G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{s(s+\alpha)}$$

$$M/A \rightarrow m, \quad \alpha t \rightarrow \tau, \quad \alpha L \rightarrow l, \quad \alpha^2 E/AK \rightarrow e$$

$$\alpha \dot{E}/AK \rightarrow \dot{e}$$

$$e_{\max} = \frac{\alpha^2 R_{\max}}{AK}$$

切換曲線,

$$e + \dot{e} + \ln(1 - \dot{e}) = 0$$

$e_{\max}$ よりの応答

$$1 + \dot{e} = \exp(e + \dot{e} - e_{\max})$$

ゆえに切換直線のこう配 k は ($L=0$)

$$k = \frac{x - \ln(1+x)}{x} \quad (17)$$

$$\text{ただし } x = \sqrt{1 - \exp(-e_{\max})}$$

第1切換直線の定数値は

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 1 - l - e^{-l} & h_2 &= 1 & h_3 &= 1 - e^{-l} \\ h_4 &= e^{-l} - 1 & h_5 &= 0 & h_6 &= e^{-l} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\therefore k_1 = 1 - e^{-l}(1 - k) \quad (19)$$

$$a_0 = e^{-l} - l - 1 + k(1 - e^{-l}) \quad (20)$$

$$e_s = \frac{1 - e^{-l}(1 + l) + e^{-l} \cdot a_s}{e^{-l} + (1 - e^{-l})/k} \quad (21)$$

第2切換直線

$$k_2 = \frac{e^l - 1 - l}{e^l - 1} \quad (22)$$

$$(3) \text{ 定位性の場合 } G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(s+\alpha)(s+\mu\alpha)}$$

(2)の場合と同じように変数を標準化する。

ただし μ は二つの時定数の比を示す指数である。
切換曲線

$$(1 - \mu e - \dot{e})^\mu = (1 - \mu e - \mu \dot{e})$$

$e_{\max}$ よりの応答,

$$\left(\frac{1 + \mu e + \dot{e}}{1 + \mu e_{\max}} \right)^\mu = \frac{1 + \mu e + \mu \dot{e}}{1 + \mu e_{\max}}$$

これらの交点を通る直線として切換直線のこう配 k を求める。この計算は複雑であるが、この結果を第7図に示す。 μ は 0~1 の間の値であり、小さい方の時定数が大きい方の時定数のどのくらいの割合かを示す指数である。 $\mu=1$ は時定数が等しい場合であるが、これは別に重根の場合として式を立て解いたものである。また $\mu=0$ は一次系であり、第7図は $k=0$ であり、既に指摘したように⁽²⁾、偏差のみによるオンオフ制御で良いことを示している。以下この定位性の系にむだ時間がある場合の第1, 第2切換直線を示す。ただし第1切換直線は定数値のみ示してあり、これと第7図の k を用い(6), (7)および(9)式で計算することができる。

(i) $\mu \neq 1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{1}{\mu} - \frac{\mu e^{-l} - e^{-\mu l}}{\mu(1-\mu)}, & h_2 &= e^{-\mu l} + \mu \frac{e^{-l} - e^{-\mu l}}{\mu-1} \\ h_3 &= \frac{e^{-l} - e^{-\mu l}}{\mu-1} \\ h_4 &= -\frac{e^{-l} - e^{-\mu l}}{\mu-1}, & h_5 &= \mu \frac{\mu e^{-\mu l} - e^{-l}}{\mu-1} - \mu e^{-\mu l} \\ h_6 &= \frac{\mu e^{-\mu l} - e^{-l}}{\mu-1} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$k_2 = \frac{1}{\mu} \frac{1 - \mu + \mu e^l - e^{\mu l}}{e^l - e^{\mu l}} \quad (24)$$

第7図 定位系の切換直線のこう配

第 8 図 アナログ計算機結線図

第 9 図 二次の積分系の過渡応答
(近似非線形最適制御)

第 1 表

	理 論 値	調 整 値
k_1	9.65	9.6
a_0	15.3 V	15 V
k_2	2.0	2.0
線形制御の幅		10 V

(ii) $\mu=1$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -1 + (1+l)e^{-l}, & h_2 &= (1+l)e^{-l}, & h_3 &= le^{-l} \\ h_4 &= -le^{-l}, & h_5 &= -le^{-l}, & h_6 &= (1-l)e^{-l} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$k_2 = \frac{1-e^l(1-l)}{le^l} \quad \dots\dots\dots (26)$$

6. アナログ計算機による検討

以下この制御方式をアナログ計算機により検討した結果を述べる。本実験に使用したアナログ計算機は研究室で組立てた原子炉のカイネティック・シミュレータの一部であり、むだ時間要素としては1回転60接点のコミュテータとコンデンサを使用した時間おくれ要素を使用した。記録としてはペン書きオシログラフお

よび X-Y 記録計を用いている。また非線形制御装置としては、電圧比較回路を5台用い、これらの組合せにより正の最大操作量を与える継電器 I、負の最大操作量の継電器 II、控える値の継電器 III、もしくは線形制御の継電器 IV が選択される。なおこれら継電器はいずれか一つが位相面の状態に応じ論理回路により排反的に選択されるが、正フィードバックを防ぐため III 継電器は IV 継電器の次にははらず IV の状態を保つような補助回路を付してある。また控える回路としては偏差電圧にサーボ系を追従させ、

III 継電器がはいったときその位置にサーボ系を停止させ、位置に比例する電圧を取り出している。

6.1 二次の無定位系 (イ) 近似非線形最適制御
アナログ計算機のブロック線図を第 8 図に示す。

$$\text{伝達関数} \quad : \quad \frac{e^{-4s}}{50 s^2} \quad (L = 4 \text{ s})$$

$$\text{最大操作量} \quad : \quad \pm 25 \text{ V}$$

$$\text{最大ステップ入力} \quad : \quad 64 \text{ V}$$

第 9 図は 7 種類の大きさのステップ入力に対する応答の位相面記録を示す。計算機は酷使のためやや波形が乱れているが、だいたいの傾向はつかめるものと考えられる。この場合線形制御の幅は 10V にとっており、したがって最小ステップの場合はすべて線形動作で働いている。線形動作としては、比例+微分動作であるが、15%行き過ぎくらいに調整した。本実験に使用した非線形動作のパラメータを理論値と比較したものを第 1 表に示す。理論値の誘導としては以下のとおりである。

$$e_{\max} = \frac{64}{25 \times \frac{1}{50}} = 128$$

したがって標準化した偏差 e および偏差電圧 $E(\text{V})$ との間には

$$\frac{e}{2} = E$$

の関係がある。

ゆえに(11)式より

$$k = 5.65 \quad \dots\dots\dots (27)$$

(13)式より

$$k_1 = k + l = 9.65 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$a_0 = l(l/2 + k) = 30.6 = 15.3 \text{ V} \quad \dots\dots\dots (29)$$

控える値の計算式は(15)式より

$$e_s = 4.64 + 0.585 a_s$$

電圧の形に書き直すと

$$E_s(V) = 2.32(V) + 0.585 A_s(V) \dots\dots\dots(30)$$

いま最大ステップ入力に対しては E_s は 32 V であり、最大操作量は 25 V であるので、実際には (30) 式に 25/32 を乗じて用いている。

k_2 は (16) 式より

$$k_2 = 2 \dots\dots\dots(31)$$

これらの定数値を位相面に示したものを第10図に示す。ここでは両軸に標準化した値、電圧の両者で示してある。

(ロ) リレー制御 同じ条件で単純なリレー制御をしたものを第11図に示す。切換えが原点を通る直線 $e + k'e = 0$ により ± 25 V の操作量が与えられるが、最大ステップ入力に対し最適に直線を選ぶので第10図の a 点を通ることになる。第2表には切換直線のこう配 k' を示す。第12図は両者の制御方式の整定時間を比較したものである。ここで注目すべきことはむだ時間のない場合と異なり、リレー制御の方が整定時間が

k : 切換直線のこう配 ($L=0$)
 k_1 : 第1切換直線のこう配 (L)
 k_2 : 第2切換直線のこう配 (L)
 k' : 切換直線のこう配 (L)

第10図 位相面の定数値

第11図 二次の無定位置系の過渡応答
 (リレー制御)

むしろ短くなっている点である。これは第10図で近似非線形最適制御では b 点で操作量が控えられ、これが原点を通る直線上の d 点ででき始める。しかしリレー制御の場合には c 点で操作量が切換えられ、これが e 点ででき始めしかもリレー制御であるので最大操作量が与えられ、結果的に非線形最適制御に近いものが得られるためであると考えられる。これに関してはゲイン定数、むだ時間の量のあらゆる場合について検討すべきであるが、むだ時間のある場合には単なるリレー制御でも割合良い結果が得られるようである。

6.2 一次の積分系 むだ時間を含む一つの積分、一つの時定数よりなる二次系の近似非線形最適制御の過渡応答を第13図に示す。またリレー制御との整定時間の比較を第14図に、また非線形動作のパラメータを第3表に示す。この場合両者の整定時間の差異はほとんどみられない。

7. 考 察

以上理論的ならびにアナログ計算機による計算結果について述べた。

(1) 制御対象にむだ時間が存在しても、近似非線形最適制御を簡単に行なうことができる。最適制御の場合にはむだ時間が存在すると切換曲線が非常に複雑になるが、この場合はむだ時間のないときよりもわずかな要素を付加することで制御できることを示した。このような制御方式は制御対象が複雑となるにつれ効

第2表

	理 論 値	調 整 値
k'	14.0	15.2

実線：近似非線形
 点線：リレー制御

第12図 整定時間の比較

第 13 図 一次の無定位系の過渡応答
(近似非線形最適制御)

力を発揮するようで、高次系に対しても有用であるものと考えている。

(2) 本制御方式をアナログ計算機を用い検討を行ない、理論とだいたい一致する結果を得ることができた。なおリレー制御も比較のため検討を行ない整定時間の比較を行なった。むだ時間のないときは二次の積分の系についてはリレー制御は終点現象よりの復帰がおそく、近似非線形の方がまさることは既に指摘し、一次の積分、0 次になるほどこの差は少なくなることを報告した⁽⁴⁾。しかしむだ時間のある場合には予期に反し、二次の積分でもリレー制御の方が同等もしくはそれ以上の性能を示し、一次の積分系でもほとんど同じ性能を示すことが認められた。すなわちむだ時間が存在する場合には案外、比例+微分信号により操作量を切換え、定常値に近づいてから線形制御をすることは良い性能を与えることをみいだした。

(3) むだ時間のある場合には必ず線形制御をする領域を設ける必要がある。むだ時間のない場合には出力継電器がチャタリングをして結局平均エネルギーがいりなめらかな応答をすることも期待できるが、むだ時間のある場合には、すべてこれらの切換えはむだ時間を経てから効果が現われるので、必然的に低周波のチャタリングとなり、したがって偏差は位相面上で相当大きな幅のリミットサイクルをもつことになる。したがってなんらかの手段により偏差の小さい領域で通常の線形制御を行なう必要がある。

8. あとがき

二次の制御対象がむだ時間を含む場合でも、応答の

第 14 図 整定時間の比較

第 3 表

	理 論 値	調 整 値
k_1	3.44	3.91
a_0	3.5 V	3 V
k_2	1.75	1.65
線形制御の幅		2.5 V
k'	5.25	4.25

後半に操作量を控えると言う近似非線形最適制御方式を用いれば、切換えは位相面では全部直線群となり、比較的簡単な論理回路の組合せで制御することができ。またこれらアナログ計算機で検討を行ない、またむだ時間が存在する場合には単純なリレー制御が結果的にかえって非線形最適制御に近い応答を与える場合もあることを指摘した。

最後に終始御指導、御べん達いただいているカリフォルニア大学、高橋安人教授をはじめとして、当所 明山正元部長、須藤卓郎主任研究員および計算・実験に御協力いただいた永田武三郎君に深く感謝する。

文 献

- (1) D.C. McDonald, *Proc. National Electronics Conference, (Chicago Ill.)* 6 (1950), 400.
A.M. Hopkin, *Trans. AIEE.*, 70, 1 (1951), 631.
- (2) 三巻, 機械学会論文集, 24, 147 (昭33-11), 915.
- (3) 三巻, 機械学会論文集, 24, 147 (昭33-11), 922.
- (4) 三巻, 機械学会論文集, 25, 151 (昭34-3), 265.