624.043.7 : 539.4.013.3 : 539.382

半円切欠きを有する丸棒の引張り*

西 谷 弘 信**

On the Stress Concentration Factor of a Shaft
with a Semicircular Groove

by Hironobu NISITANI

In this paper, the stress concentration factor of a shaft with a semicircular groove under tension is calculated by a new method. In this method axial uniform stress and the stresses applied to an imaginary cylindrical surface, imagined over the groove, are superposed so that the surface tractions at several points on the groove disappear.

The stress concentration factor thus obtained is in close agreement with the value calculated from Neuber's formula.

1. 緒 言

両側に半円切欠きを有する帯板の引張りにおける応力集中係数は、石田氏⁽¹⁾や C. B. Ling⁽²⁾らにより求められている。これの三次元の場合に相当する円周に沿い半円みぞを有する丸棒についても二、三の研究がなされている。たとえば二次元応力状態と軸対称応力状態との関係を利用した石橋氏の研究⁽³⁾(切欠きの浅い場合)、実験を併用した西原、藤井両氏の研究⁽⁴⁾、光弾性による Frocht の研究⁽⁵⁾など。しかし結果は必ずしも一致していない。著者も以下に示す方法でこの場合の応力集中係数を求めたので報告する。

計算の方法は、引張りを受ける断面一様な丸棒の表面に適当な外力(その外力は切欠き部以外には加えない、第1図参照)を加えて、一様引張りによる切欠き表面の応力を打消すようにするものである。すなわち、断面一様な丸棒の解を適当に組合わせて切欠きある場合を求めるものである。

2. 基 礎 式

座標軸は第1図のようにとる。基礎式は軸対称変形に関する Michell のものを用いる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 ν : ポアソン比。また ϕ の満たすべき方程式は

$$\nabla^4 \phi = 0 \dots\dots\dots (2)$$

(2) 式を満たす応力関数 ϕ が求まれば、 ϕ から (1) 式によって求まる応力は、平衡条件と適合条件を満足しているのであるから、それが境界条件を満たすようにしさえすればよい。

3. 基 本 解

r 軸に関する対称性および $z \rightarrow \infty$, $r=0$ で応力が有限であることを考慮して次の解を採用する。

$$\phi = \{A'I_0(\kappa r) + B'(\kappa r)I_1(\kappa r)\} \sin \kappa z \dots\dots (3)$$

ただし、 A' , B' , κ は任意定数、 I_0 , I_1 は第1種変形ベッセル関数である。 $\xi = z/a$, $\eta = r/a$ において変数を r , z から ξ , η にかえると (3) 式は次のようになる。

$$\phi = \{AI_0(\alpha\eta) + B(\alpha\eta)I_1(\alpha\eta)\} \sin \alpha\xi \dots\dots (3)'$$

(3)' 式において、 A , B を α の関数とみなして 0 から ∞ まで積分したものもちろん (2) 式の解であるから、(3)' 式の一般的な形は次のように書ける。

第 1 図

* 昭和 33 年 10 月 27 日 東京秋期講演大会において講演、原稿受付 昭和 34 年 10 月 16 日。

** 正員、九州大学工学部 (福岡市箱崎町)。

$$\phi = \int_0^\infty \{A(\alpha)I_0(\alpha\eta) + B(\alpha)(\alpha\eta)I_1(\alpha\eta)\} \sin \alpha\xi d\alpha \quad \dots\dots\dots(4)$$

(4)式は $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ を適当に選ぶことにより断面一樣な丸棒の表面に任意の軸対称な外力が加わった場合の応力状態を表わすことができる。応力の式は(1)式より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \{A(\alpha)F_1(\alpha\eta) + B(\alpha)F_2(\alpha\eta)\} \alpha^3 \cos \alpha\xi d\alpha \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \{A(\alpha)G_1(\alpha\eta) + B(\alpha)G_2(\alpha\eta)\} \alpha^3 \cos \alpha\xi d\alpha \\ \sigma_z &= \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \{A(\alpha)L_1(\alpha\eta) + B(\alpha)L_2(\alpha\eta)\} \alpha^3 \cos \alpha\xi d\alpha \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \{A(\alpha)H_1(\alpha\eta) + B(\alpha)H_2(\alpha\eta)\} \alpha^3 \sin \alpha\xi d\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ただし

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= -I_0(\alpha) + \frac{1}{\alpha} I_1(\alpha), & F_2(\alpha) &= (1-2\nu)I_0(\alpha) + \alpha I_1(\alpha) \\ G_1(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha} I_1(\alpha), & G_2(\alpha) &= (1-2\nu)I_0(\alpha) \\ L_1(\alpha) &= I_0(\alpha), & L_2(\alpha) &= -2(2-\nu)I_0(\alpha) - \alpha I_1(\alpha) \\ H_1(\alpha) &= I_1(\alpha), & H_2(\alpha) &= -\alpha I_0(\alpha) - 2(1-\nu)I_1(\alpha) \end{aligned}$$

表面 ($\eta=1$) で応力 (η 軸に關し対称とする) が次のように与えられたとする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{\eta=1} &= f(\xi) \\ \tau_{rz}|_{\eta=1} &= g(\xi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

(6)式をフーリエ積分で表わせれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{\eta=1} &= f(\xi) = \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(u) \cos \alpha u du \right] \cos \alpha\xi d\alpha \\ \tau_{rz}|_{\eta=1} &= g(\xi) = \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(u) \sin \alpha u du \right] \sin \alpha\xi d\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\text{ここで} \quad \left. \begin{aligned} M(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(u) \cos \alpha u du \\ N(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(u) \sin \alpha u du \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

とおけば, (7)式は次のように書ける

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{\eta=1} &= f(\xi) = \int_0^\infty M(\alpha) \cos \alpha\xi d\alpha \\ \tau_{rz}|_{\eta=1} &= g(\xi) = \int_0^\infty N(\alpha) \sin \alpha\xi d\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

(4)式が表面 ($\eta=1$) で境界条件(9)式を満足するためには, (5)式と(9)式を比較すればわかるとおり

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{a^3}{\alpha^3} \cdot \frac{M(\alpha)H_2(\alpha) - N(\alpha)F_2(\alpha)}{F_1(\alpha)H_2(\alpha) - F_2(\alpha)H_1(\alpha)} \\ B(\alpha) &= \frac{a^3}{\alpha^3} \cdot \frac{N(\alpha)F_1(\alpha) - M(\alpha)H_1(\alpha)}{F_1(\alpha)H_2(\alpha) - F_2(\alpha)H_1(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

であればよい。(10)式を(5)式に代入すれば, 断面一樣な丸棒の表面に任意の軸対称な外力(6)式が加わった場合の応力状態を求めることができる。

数値計算の都合を考えて

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{\alpha I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)}, & \phi' &= \frac{\alpha\eta I_0(\alpha\eta)}{I_1(\alpha\eta)} \\ \chi &= \frac{I_1(\alpha)}{\alpha}, & \chi' &= \frac{I_1(\alpha\eta)}{\alpha\eta} \\ \alpha' &= \alpha\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

とおく。

(11)式の記号を用いて(10)式をかき直し(5)式に代入すると、境界条件が(9)式で与えられた場合の応力として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \int_0^\infty \frac{\chi'}{\chi} \left[\frac{\psi\psi' - (\psi - \psi') - 2(1-\nu) - \alpha'^2}{\psi^2 - 2(1-\nu) - \alpha^2} \right] M(\alpha) \cos \alpha \xi d\alpha \\ &+ \int_0^\infty \frac{\chi'}{\chi} \left[\frac{-(\psi\alpha'^2 - \psi'\alpha^2) - (1-2\nu)(\psi - \psi') - (\alpha^2 - \alpha'^2)}{\alpha\{\psi^2 - 2(1-\nu) - \alpha^2\}} \right] N(\alpha) \cos \alpha \xi d\alpha \\ \sigma_\theta &= \int_0^\infty \frac{\chi'}{\chi} \left[\frac{(\psi - \psi') + 2\nu\psi' + 2(1-\nu)}{\psi^2 - 2(1-\nu) - \alpha^2} \right] M(\alpha) \cos \alpha \xi d\alpha \\ &+ \int_0^\infty \frac{\chi'}{\chi} \left[\frac{(1-2\nu)(\psi + \psi') - (1-2\nu)\psi\psi' + \alpha^2}{\alpha\{\psi^2 - 2(1-\nu) - \alpha^2\}} \right] N(\alpha) \cos \alpha \xi d\alpha \\ \sigma_z &= \int_0^\infty \frac{\chi'}{\chi} \left[\frac{-\psi\psi' + 2\psi' + \alpha'^2}{\psi^2 - 2(1-\nu) - \alpha^2} \right] M(\alpha) \cos \alpha \xi d\alpha \\ &+ \int_0^\infty \frac{\chi'}{\chi} \left[\frac{(\psi\alpha'^2 - \psi'\alpha^2) + 3\psi\psi' - 2(2-\nu)\psi' - \alpha'^2}{\alpha\{\psi^2 - 2(1-\nu) - \alpha^2\}} \right] N(\alpha) \cos \alpha \xi d\alpha \\ \tau_{rz} &= \int_0^\infty \frac{\chi'}{\chi} \left[\frac{-\alpha'(\psi - \psi')}{\psi^2 - 2(1-\nu) - \alpha^2} \right] M(\alpha) \sin \alpha \xi d\alpha \\ &+ \int_0^\infty \frac{\chi'}{\chi} \left[\frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\psi\psi' + (\psi - \psi') - 2(1-\nu) - \alpha^2}{\psi^2 - 2(1-\nu) - \alpha^2} \right] N(\alpha) \sin \alpha \xi d\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

4. 解 の 組 立

半円切欠きの解をうるには、引張りを受ける丸棒において、(12)式による応力が切欠き表面を自由表面にするように $M(\alpha)$, $N(\alpha)$ したがって、丸棒表面に加える外力, $\sigma_r|_{\eta=1}$, $\tau_{rz}|_{\eta=1}$ を決定すればよい。そのために $\sigma_r|_{\eta=1}$, $\tau_{rz}|_{\eta=1}$ を切欠きの部分内でフーリエ級数で表わし、その係数を決定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{\eta=1} &= f(\xi) = \begin{cases} \sum_0^\infty a_n \cos n \frac{\pi}{\lambda} \xi & (|\xi| \leq \lambda) \\ 0 & (|\xi| > \lambda) \end{cases} \\ \tau_{rz}|_{\eta=1} &= g(\xi) = \begin{cases} \sum_1^\infty b_n \sin n \frac{\pi}{\lambda} \xi & (|\xi| \leq \lambda) \\ 0 & (|\xi| > \lambda) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 λ : 丸棒半径に対する切欠き半径の比、すなわち $\lambda = \rho/a$ 。

この場合 $M(\alpha)$, $N(\alpha)$ は (13)式を(18)式に代入すれば求まる。

$$\left. \begin{aligned} M(\alpha) &= \frac{2\lambda}{\pi} \sum_0^\infty (-1)^{n+1} a_n \frac{\alpha \lambda \sin \alpha \lambda}{n^2 \pi^2 - \alpha^2 \lambda^2} \\ N(\alpha) &= \frac{2\lambda}{\pi} \sum_1^\infty (-1)^{n+1} b_n \frac{n \pi \sin \alpha \lambda}{n^2 \pi^2 - \alpha^2 \lambda^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

(14)式を(12)式に代入すれば、境界条件が(13)式で与えられた場合、任意の点 (ξ, η) における応力が、 $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ の一次結合として表わされる。したがって a_n, b_n を切欠き表面が自由表面となるように選ばばよいことになる。この論文では(13)式の級数はおおの3項まで取った。一様な引張り $\sigma_z = (1-\lambda)^2$ (これは最小断面における σ_z の平均値を1とする応力である), $\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = 0$ と(12)式による応力とを重ねた応力を*をつけて表わすと、6個の定数を決める条件には次の6個を用いた(第2図参照)。

- i) ①点の $\sigma_r^* = 0$
- ii) ②点の $P_z^* = 0$ (P_z^* : 応力の z 方向成分)
- iii) ③点の $P_z^* = 0$

iv) ④点で応力が連続になること (④点で $\sigma_r|_{\eta=1} = 0$ にすればよい。)

v) ④点の $\sigma_z^* = 0$

vi) 遠方での引張荷重が最小断面に働く引張荷重に等しい。

第 2 図

第1表 切欠き表面に残留する応力
($\lambda=0.5$ の場合)

位置	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
応力							
P_z/σ_n	0	0.004	0	-0.021	0	-0.050	0
P_r/σ_n	0	0.021	0.062	0.145	0.272	0.186	0

 σ_n : 最小断面の平均応力

第3図

以上の条件だけで、完全に自由表面となるのは④、⑦点のみであるから、 $\lambda=0.5$ の場合につき表面に残留する応力 P_z , P_r (応力の z 方向および r 方向成分) を①, ②, ③, ④点およびそれらの中央の点⑤, ⑥, ⑦について計算すれば第1表のようになる。

表からわかるように残留する応力は切欠き底付近ではほとんど0であるが、そこから離れるに従って多少大きくなっている。しかし P_z は各点ともほとんど0に近いので、残留する応力が切欠き底の σ_z に及ぼす影響は小さいであろう。条件を更に完全に満たすには(13)式の級数の項数をませばよい。

上に述べた6個の条件を $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$ を用いてかけば、六元連立方程式が得られ、それより a_n, b_n をきめれば切欠きある場合の応力状態が求まること

 $\lambda=0.2$ の場合

$$f(\xi) = \begin{cases} 0.6093 - 10.711 \cos 5\pi\xi - 11.321 \cos 10\pi\xi & (|\xi| \leq 0.2) \\ 0 & (|\xi| > 0.2) \end{cases}$$

$$g(\xi) = \begin{cases} 10.326 \sin 5\pi\xi + 10.439 \sin 10\pi\xi + 1.1862 \sin 15\pi\xi & (|\xi| \leq 0.2) \\ 0 & (|\xi| > 0.2) \end{cases}$$

 $\lambda=0.5$ の場合

$$f(\xi) = \begin{cases} 0.3649 - 4.9273 \cos 2\pi\xi - 5.2922 \cos 4\pi\xi & (|\xi| \leq 0.5) \\ 0 & (|\xi| > 0.5) \end{cases}$$

$$g(\xi) = \begin{cases} 4.8491 \sin 2\pi\xi + 4.2054 \sin 4\pi\xi - 0.1660 \sin 6\pi\xi & (|\xi| \leq 0.5) \\ 0 & (|\xi| > 0.5) \end{cases}$$

$\lambda=0.5$ の場合について $f(\xi)$, $g(\xi)$ のだいたいの傾向を第1図に示してある。

表面荷重 $\sigma_r|_{\eta=1} = \cos \frac{n\pi}{\lambda} \xi$ ($|\xi| \leq \lambda$), 0 ($|\xi| > \lambda$) および $\tau_{rz}|_{\eta=1} = \sin \frac{n\pi}{\lambda} \xi$ ($|\xi| \leq \lambda$), 0 ($|\xi| > \lambda$) により切

第2表 表面荷重により切欠き底に生ずる σ_z の値

荷重の種類	$\sigma_r _{\eta=1} = \cos \frac{n\pi}{\lambda} \xi$			$\tau_{rz} _{\eta=1} = \sin \frac{n\pi}{\lambda} \xi$		
n	0	1	2	1	2	3
λ						
0.2	-0.0495	-0.1024	-0.0107	0.0854	-0.0714	0.0402
0.5	-0.1967	-0.1604	-0.0117	0.1592	-0.1181	0.0701

第4図

になる。

5. 計算結果

数値計算は $\lambda=0.2$, $\lambda=0.5$ の二つの場合について行なった。いずれの場合もポアソン比 ν は 0.3 とした。(14)式を(12)式に代入して応力を求める際出てくる積分は、積分範囲を二つに分け、一般に α の小さいところに対してはグラフから求め、 α の大きいところに対しては計算から求め、両者の和として求めた。

第3図にそれぞれの場合の応力分布を示す。

一樣な引張応力を切欠き表面上で打消すために表面に加えるべき応力 $f(\xi)$, $g(\xi)$ は最小断面に働く平均応力を1とするとき次のとおりである。

欠き底に生ずる軸方向応力 σ_z の値を第 2 表に示す。

第 4 図に応力集中係数を示す。

図中ⓐは切欠きある帯板の引張りにおける応力集中係数 α_s から、その回転体が引張りを受ける場合の応力集中係数 α_u を求める石橋氏の式⁽³⁾

$$\left(1 + \frac{t}{a}\right)\alpha_u - \alpha_s = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} \sqrt{\frac{t}{\rho}}\right) \frac{t}{a}$$

(t : 切欠きの深さ, a : 最小断面の半径)
(ρ : 切欠き底の曲率半径)

を用いて求めた値である。この式は切欠きが丸棒半径に対して浅い場合に成立する関係であるので、 $\lambda=0.2$ の場合のみ求めた。なお α_s としては石田氏による結果⁽¹⁾を用いた。図に示すごとく著者の結果はこの値にかなり近い。全体的には Neuber の三角則による計算結果⁽⁶⁾に近い値を示している。 $\lambda=0$ における曲線のこう配 $(d\alpha/d\lambda)_{\lambda=0}$ は石田氏の結果を用いて求めた。二次元では石田氏によれば、切欠きから十分離れた点の応力を T , 最大応力を $\alpha_0 T$ とすれば、切欠きの浅い場合

$$\alpha_0 = 3.065 - 2.658\lambda^2 + \dots$$

となる。三次元の場合でも $\lambda \rightarrow 0$ のときは最大応力は $\alpha_0 T$ とみなせるから、 $\alpha = \sigma_{\max}/\sigma_n$, $[\sigma_n = T/(1-\lambda)^2]$ は

$$\alpha = \alpha_0(1-\lambda)^2 = (3.065 - 2.658\lambda^2 + \dots)(1-\lambda)^2$$

とかける。これより $(d\alpha/d\lambda)_{\lambda=0} = -2 \times 3.065$ となる。また $\lambda=1$ における こう配 $(d\alpha/d\lambda)_{\lambda=1}$ は Neuber による深い双曲線切欠きの α から求めた。 $\lambda \rightarrow 1$ では Neuber によれば

$$\alpha = 1 + 0.442(1-\lambda) + 0\{(1-\lambda)^2\}$$

これから $(d\alpha/d\lambda)_{\lambda=1} = -0.442$ となる。

6. 結 言

断面一様な丸棒表面に任意の軸対称な外力が加わった場合の解を導き、それをもとにして半円切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数を求めた。結果は石橋氏の関係式による値および Neuber の三角則による計算結果に近い。

最後に絶えず御指導御激励下さった石橋 正先生に厚く御礼申し上げます。

文 献

- (1) 石田, 機械学会論文集, 19, 83 (昭28-7) 5.
- (2) C.B. Ling, *J. appl. Mech.*, 14, (1947), 275.
- (3) 石橋, 九大弾性工学研究所報告, 4, 1 (昭22).
- (4) 西原, 藤井, 機械学会論文集, 18, 65 (昭27-1), 9.
- (5) M.M. Frocht, *Photoelasticity*, 2 (1947), John Wiley & Sons.
- (6) R.E. Peterson, *Stress Concentration Design Factors* (1953), John Wiley & Sons.

圧縮空気の需要増加

戦後圧縮空気の用途が拡大し、世界各国の生産および輸出が活発となっている。

最近の空気圧縮機は、1 in² につき 12 000 lb の圧力を得られるようになったが、この程度のものはまれで普通 1 in² につき 180 lb までとなっている。この圧縮空気の技術的な根本問題は、その生産よりも、むしろ貯蔵と長距離に空気を送る場合が問題である。圧縮空気が貯蔵された場合、その利用価値はきわめて高くなり、パイプを通して容易に送り込むことができるからである。その用途も下記のような各方面に拡大しつつある。

- (1) 車輪タイヤ用空気, (2) 空気ブレーキ,
(3) 空気スクリーン, ワイパ, (4) 収穫物への薬品散布, (5) 下水処理, (6) 食品加工,

- (7) 歯のドリル, (8) 衣類の洗たく, (9) 破損道路の修理など

イギリスでは、圧縮機、塗料塗布用などとして年産 20 百万ポンド以上の生産額で、輸出も 1950 年の 3.8 百万ポンドから、1959 年には 7 百万ポンドと 2 倍近くに増加した。

その他世界の競争者としてアメリカは 1954 年に 880 万ポンドを生産したのが 1958 年には 2 500 万ポンドにも増大し、西ドイツでも 1954 年の 450 万ポンドから、1958 年には 840 万ポンドに増大した。その他フランス、スウェーデンでも製造し始めている。

[Financial Times, Apr. 25 (1960), 5]

(日本科学技術情報センター提供)

イギリスにおける 1960 年度産業開発費

鉄	銅	33	輸 送 機 械	94	石材, 粘土, ガラス	30	合 計	682
非 鉄 金 属	7		金 属 加 工	63	石 油 精 製	28		
機 械	66		化 学 関 係	119	食 品・飲 料	29		
電 気 機 械	92		紙 および パルプ	24	織 物	11		
自 動 車 関 係	53		ゴ ム	5	諸 製 造 工 業	28		

単位は 100 万ドル

[Product Engng., 31, 18 (1960), 20] (西 村 正 巳)