539.4.013.3 : 624.059.32 : 624.043.7

円環形充てん物を有する帯板の引張り*

玉 手 統**

Stresses Around an Annular Inclusion in a Strip Under Tension

by Osamu TAMATE

A two-dimensional solution in series form is given for the stresses and displacements around an annular inclusion perfectly bonded to an infinite strip under tension. The known solutions for an infinite plate with a reinforced circular hole and a strip with a central hole are obtained as limiting cases. Numerical results are given for the variations of stresses for various values of parameters which define the geometry and the elastic properties of the strip and the inclusion. The effect of reinforcement with beads is also discussed.

1. 緒 言

各種構造物要素には配管、整備などの必要から穴を設けることが多く、かつこれら穴の縁に生ずる応力集中を減ずるために種々の孔縁補強を行なうことが多い。したがってかかる補強法についての研究も従来数多く発表されている^{(1)~(13)}。しかしこれら研究の大半は薄板を無限に大きいものとみなしており、補強穴と薄板の他の境界との相互干渉について検討を加えた報告としては、抵抗線ひずみ計⁽¹⁴⁾または光弾性実験⁽¹⁵⁾による実験的研究をあげ、またこの線に沿う理論的研究として円形充てん物を有する半無限板が引張りを受ける場合を双極座標を用いて取扱った報告⁽¹⁶⁾をあげうる程度である。

本報告は弾性定数の異なる 1 個の円環を有する帯板が一樣な引張りをうける場合を二次元弾性理論に基づき、Kolossoff-Muskhelishvili⁽¹⁷⁾の解析法にしたがって取扱ったもので、帯板および円環内の応力ならびに変位が帯板と円環の材料および寸法比に関する 5 個の量すなわち両材料のポアソン比、横弾性係数の比、帯板の穴径と板幅の比、円環の内外径の比によって左右されることを明らかにし、これらの量の種々の組合せについて数値計算を行なって応力分布の特徴を明らかにした。

上記取扱いにおいては円環の厚さと帯板の厚さは等しいとみなしているため、その結果を直ちに通常みら

れるような孔縁の増厚補強に適用することはできないが、後述するように等価弾性係数⁽²⁾⁽¹²⁾を考慮することにより増厚補強についても設計資料を提供するものと考えられよう。

2. 解 の 誘 導

等方弾性材料の無限に長い帯板を考え、その直線縁を $x = \pm b$ で表わす。帯板内の円孔は座標原点に中心をもち、半径を $a (< b)$ とする。この円孔に帯板材と異なった弾性定数をもつ円環 (外半径 a , 内半径 c) が密着しているものとし、また円環と帯板の厚さは等しいものとする (第 1 図)。

帯板の面内に複素座標

$$z = x + iy = re^{i\theta} \dots\dots\dots (1)$$

をとり、また次の無次元量を使用する。

$$\left. \begin{aligned} \xi = x/b, \quad \eta = y/b, \quad \rho = r/b \\ \zeta = \xi + i\eta, \quad \lambda = a/b, \quad \epsilon = c/a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

第 1 図

* 昭和 34 年 4 月 1 日 第 36 期通常総会講演会において講演，
原稿受付 昭和 35 年 7 月 31 日。

** 正員，東北大学工学部 (仙台市桜小路)。

帯板, 円環のいずれも一般化された平面応力の状態にあり, 物体力を無視できるものとすれば, 直角座標系による変位成分 u_x, u_y ; 応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は 2 個の解析関数 $\varphi(z), \psi(z)$ により次のごとく表わされる⁽¹⁷⁾.

$$\left. \begin{aligned} 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ \sigma_x + \sigma_y &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

極座標系に対しては

$$\left. \begin{aligned} 2\mu(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta}[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{2i\theta}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

ただし μ は横弾性係数であり, また

$$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu) \dots\dots (5)$$

である. ν は材料のポアソン比を表わす.

以上の諸記号および基礎式を用いて, 帯板が一様引張りを受ける場合の解を導こう. 帯板の直線縁および円環内縁は自由縁であり, また円孔と円環外周とが密着しているものとすれば, 問題の境界条件は次のごとく表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{I0}(z) &= \int_0^\infty \sinh u\zeta \, du / \Sigma \\ \psi_{I0}(z) &= -\zeta^{-1} + \int_0^\infty [(e^{-2u} - 2u) \sinh u\zeta + u\zeta \cosh u\zeta] \, du / \Sigma \end{aligned} \right\} \dots\dots (11 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{In}(z) &= \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^\infty \frac{u^{2n}}{\Sigma} \sinh u\zeta \, du \\ \psi_{In}(z) &= -2n\zeta^{-(2n+1)} + \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^\infty \frac{u^{2n}}{\Sigma} [(e^{-2u} - 2u) \sinh u\zeta + u\zeta \cosh u\zeta] \, du \end{aligned} \right\} \dots\dots (11 \cdot b)$$

.....($n > 0$)

$$\left. \begin{aligned} * \varphi_{In}(z) &= \zeta^{-(2n-1)} - \frac{1}{(2n-2)!} \int_0^\infty \frac{u^{2n-2}}{\Sigma} [2n-1 + e^{-2u} - 2u] \sinh u\zeta \, du \\ * \psi_{In}(z) &= -\frac{1}{(2n-2)!} \int_0^\infty \frac{u^{2n-2}}{\Sigma} \{ [1 + (2n-1)e^{-2u} - 2(2n-1)u + 4u^2] \sinh u\zeta \\ &\quad + [2n-1 + e^{-2u} - 2u] u\zeta \cosh u\zeta \} \, du \end{aligned} \right\} \dots\dots (11 \cdot c)$$

.....($n > 0$)

$$\text{ただし } \Sigma = \sinh 2u + 2u \dots\dots (12)$$

上記の諸関数を重ね合わせるにより, 帯板の無限遠および直線縁の条件を満たす応力関数として

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I(z) &= (Tb/4) \left\{ \zeta + D_0 \varphi_{I0}(z) + \sum_{n=1}^\infty [D_{2n} \varphi_{In}(z) + E_{2n} * \varphi_{In}(z)] \right\} \\ \psi_I(z) &= (Tb/4) \left\{ 2\zeta + D_0 \psi_{I0}(z) + \sum_{n=1}^\infty [D_{2n} \psi_{In}(z) + E_{2n} * \psi_{In}(z)] \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

D_{2n}, E_{2n} は実定数であり, 接着縁の条件から決定される. 上式を展開, 整理すれば円孔近傍において次のように表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I(z) &= (Tb/4) [\zeta + M_0 \zeta + \sum_{n=1}^\infty (E_{2n} \zeta^{-(2n-1)} + M_{2n} \zeta^{2n+1})] \\ \psi_I(z) &= (Tb/4) [2\zeta - D_0 \zeta^{-1} + \sum_{n=1}^\infty 2n (-D_{2n} \zeta^{-(2n+1)} + L_{2n} \zeta^{2n-1})] \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

(a) 無限遠 ($\eta \rightarrow \pm\infty$) で

$$(\sigma_x)_I = (\tau_{xy})_I = 0, (\sigma_y)_I = T \dots\dots (6)$$

(b) 直線縁 ($\xi = \pm 1$) で

$$(\sigma_x)_I = (\tau_{xy})_I = 0 \dots\dots (7)$$

(c) 円環内縁 ($\rho = \varepsilon\lambda$) で

$$(\sigma_r)_{II} = (\tau_{r\theta})_{II} = 0 \dots\dots (8)$$

(d) 接着縁 ($\rho = \lambda$) で

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_I &= (\sigma_r)_{II}, (\tau_{r\theta})_I = (\tau_{r\theta})_{II} \\ (u_r)_I &= (u_r)_{II}, (u_\theta)_I = (u_\theta)_{II} \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

接尾字 I, II はそれぞれ帯板および円環領域に対応するものとする.

帯板に穴がない場合には y 軸方向の一様引張りに対する複素応力関数は

$$\varphi_I^{(0)}(z) = Tb\zeta/4, \psi_I^{(0)}(z) = Tb\zeta/2 \dots\dots (10)$$

で与えられ, これは直線縁の条件も満たしている. 次に穴が存在するための応力場の乱れに対応する応力関数を導入せねばならぬが, これらは無限遠および直線縁に応力を残さず, 帯板内で 1 個の応力, 変位を与えるものでなければならない. また問題の性質上, 両座標軸に対称な応力関数だけを採用すればよい. これらを考慮して, 必要な複素応力関数を導けば次式を得る.

ただし

$$\left. \begin{aligned} L_{2n} &= {}^{2n}\alpha_0 D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ({}^{2n}\alpha_{2k} D_{2k} + {}^{2n}\beta_{2k} E_{2k}) \\ M_{2n} &= {}^{2n}\gamma_0 D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ({}^{2n}\gamma_{2k} D_{2k} + {}^{2n}\delta_{2k} E_{2k}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式中の変換係数は

$$\left. \begin{aligned} {}^{2n}\alpha_0 &= [(2n-1)I_{2n-1} - 2I_{2n} + J_{2n-1}]/(2n)! \\ {}^{2n}\alpha_{2k} &= [(2n-1)I_{2n+2k-1} - 2I_{2n+2k} + J_{2n+2k-1}]/(2n)!(2k-1)! \\ {}^{2n}\beta_{2k} &= -[(4kn-2n-2k+2)I_{2n+2k-3} - 2(2n+2k-2)I_{2n+2k-2} \\ &\quad + 4I_{2n+2k-1} + (2n+2k-2)J_{2n+2k-3}]/(2n)!(2k-2)! \\ {}^{2n}\gamma_0 &= I_{2n+1}/(2n+1)! \\ {}^{2n}\gamma_{2k} &= I_{2n+2k+1}/(2n+1)!(2k-1)! \\ {}^{2n}\delta_{2k} &= -[(2k-1)I_{2n+2k+1} - 2I_{2n+2k} + J_{2n+2k-1}]/(2n+1)!(2k-2)! \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ただし I_s, J_s は Howland's integral⁽¹⁸⁾ であり

$$I_s = \int_0^\infty (u^s/\Sigma) du, \quad J_s = \int_0^\infty (u^s e^{-2u}/\Sigma) du \dots\dots\dots (17)$$

(14) 式を (4) 式に代入すれば、対応する変位、応力は容易に求められる。接着縁 $\rho = \lambda$ における値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_I &= (T/4) \left\{ 2 - D_0 \lambda^{-2} + 2M_0 - 2\omega^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) [E_{2n} \lambda^{-2n} \right. \\ &\quad + 2nL_{2n} \lambda^{2n-2} + (2n+1)M_{2n} \lambda^{2n}] \omega^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [2nD_{2n} \lambda^{-(2n+2)} \\ &\quad \left. + (2n-1)E_{2n} \lambda^{-2n} - M_{2n} \lambda^{2n}] \omega^{-2n} \right\} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_r + iu_\theta)_I &= (Tb/8\mu_I) \left\{ (\kappa_I - 1)\lambda + D_0 \lambda^{-1} + (\kappa_I - 1)M_0 \lambda - 2\lambda \omega^{-2} \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [\kappa_I E_{2n} \lambda^{-(2n-1)} - (2n+1)M_{2n} \lambda^{2n+1} - 2nL_{2n} \lambda^{2n-1}] \omega^{-2n} + \sum_{n=1}^{\infty} [2nD_{2n} \lambda^{-(2n+1)} \\ &\quad \left. + (2n-1)E_{2n} \lambda^{-(2n-1)} + \kappa_I M_{2n} \lambda^{2n+1}] \omega^{2n} \right\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ただし $\omega = e^{i\theta}$ 。

円環領域に対する複素応力関数を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{II}(z) &= (Tb/4) [Q_0 \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (G_{2n} \zeta^{-(2n-1)} + Q_{2n} \zeta^{2n+1})] \\ \psi_{II}(z) &= (Tb/4) [-F_0 \zeta^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n (-F_{2n} \zeta^{-(2n+1)} + P_{2n} \zeta^{2n-1})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$F_{2n}, G_{2n}, P_{2n}, Q_{2n}$ は実定数であり、円環内外縁の条件から定められる。(20) 式の応力関数に対応する応力が円環内周 $\rho = \varepsilon \lambda$ における条件 (8) 式を満たすためには、上記定数間に次の関係が必要であることは容易に示される。

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= 2(\varepsilon \lambda)^2 Q_0 \\ F_{2n} &= (2n-1)(\varepsilon \lambda)^{4n} P_{2n} + 2n(\varepsilon \lambda)^{4n+2} Q_{2n} \\ G_{2n} &= -2n(\varepsilon \lambda)^{4n-2} P_{2n} - (2n+1)(\varepsilon \lambda)^{4n} Q_{2n} \end{aligned} \right\} (n > 0) \dots\dots\dots (21)$$

また φ_{II}, ψ_{II} により接着縁 $\rho = \lambda$ に残る変位、応力は

$$\begin{aligned} (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{II} &= (T/4) \left\{ -F_0 \lambda^{-2} + 2Q_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) [G_{2n} \lambda^{-2n} + 2nP_{2n} \lambda^{2n-2} \right. \\ &\quad \left. + (2n+1)Q_{2n} \lambda^{2n}] \omega^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [2nF_{2n} \lambda^{-(2n+2)} + (2n-1)G_{2n} \lambda^{-2n} - Q_{2n} \lambda^{2n}] \omega^{-2n} \right\} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_r + iu_\theta)_{II} &= (Tb/8\mu_{II}) \left\{ F_0 \lambda^{-1} + (\kappa_{II} - 1)Q_0 \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} [\kappa_{II} G_{2n} \lambda^{-(2n-1)} - (2n+1)Q_{2n} \lambda^{2n+1} \right. \\ &\quad \left. - 2nP_{2n} \lambda^{2n-1}] \omega^{-2n} + \sum_{n=1}^{\infty} [2nF_{2n} \lambda^{-(2n+1)} + (2n-1)G_{2n} \lambda^{-(2n-1)} + \kappa_{II} Q_{2n} \lambda^{2n+1}] \omega^{2n} \right\} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

接着縁の条件 (9) 式に (18), (19), (22), (23) 式を代入し、さらに (21) 式を考慮すれば、(9) 式を満たす

ための定数間の関係式として次の諸式を得る.

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= s_0 + s_0 M_0 \\ P_{2n} &= p_2 \delta_{1,n} + p_{2n} L_{2n} + \lambda^2 q_{2n} M_{2n} \\ Q_{2n} &= \lambda^{-2} r_2 \delta_{1,n} + \lambda^{-2} r_{2n} L_{2n} + s_{2n} M_{2n} \end{aligned} \right\} (n > 0) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= i_0 \lambda^2 + i_0 \lambda^2 M_0 \\ D_{2n} &= h_2 \lambda^4 \delta_{1,n} + h_{2n} \lambda^{4n} L_{2n} + i_{2n} \lambda^{4n+2} M_{2n} \\ E_{2n} &= -j_2 \lambda^2 \delta_{1,n} - j_{2n} \lambda^{4n-2} L_{2n} - k_{2n} \lambda^{4n} M_{2n} \end{aligned} \right\} (n > 0) \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし $\delta_{1,n}$ は Kronecker delta であり, また

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= 1/[H - K + 2K\varepsilon^2] \\ p_{2n} &= [H - (4n^2 - 1)K\varepsilon^{4n} + 4n^2 K\varepsilon^{4n+2}] / \Delta_{2n} \\ q_{2n} &= (2n+1) \left\{ (2n)^{-1} (H - K - 1) - [2nK + (2n)^{-1} (H - K - 1)] \varepsilon^{4n} + 2nK\varepsilon^{4n+2} \right\} / \Delta_{2n} \\ r_{2n} &= 2n(2n-1)K\varepsilon^{4n-2} (1 - \varepsilon^2) / \Delta_{2n} \\ s_{2n} &= \left\{ K + 1 + (4n^2 K + H - K - 1) \varepsilon^{4n-2} - (4n^2 - 1) K \varepsilon^{4n} \right\} / \Delta_{2n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= 2[1 - (1 - \varepsilon^2)s_0] \\ h_{2n} &= 2n - 1 - (2n-1)(1 - \varepsilon^{4n})p_{2n} - 2n(1 - \varepsilon^{4n+2})r_{2n} \\ i_{2n} &= 2n - (2n-1)(1 - \varepsilon^{4n})q_{2n} - 2n(1 - \varepsilon^{4n+2})s_{2n} \\ j_{2n} &= 2n - 2n(1 - \varepsilon^{4n-2})p_{2n} - (2n+1)(1 - \varepsilon^{4n})r_{2n} \\ k_{2n} &= 2n + 1 - 2n(1 - \varepsilon^{4n-2})q_{2n} - (2n+1)(1 - \varepsilon^{4n})s_{2n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

さらに

$$\Delta_{2n} = H(K+1) + [4n^2 K(K+1) + (H+K)(H-K-1)]\varepsilon^{4n-2} - 2(4n^2 - 1)K(K+1)\varepsilon^{4n} + 4n^2 K(K+1)\varepsilon^{4n+2} + K(H-1)\varepsilon^{8n} \dots\dots\dots (28)$$

$$H = [(\mu_I / \mu_{II})\kappa_{II} + 1] / (\kappa_I + 1), \quad K = [(\mu_I / \mu_{II}) - 1] / (\kappa_I + 1) \dots\dots\dots (29)$$

したがって λ , ε , μ_I / μ_{II} , κ_I および κ_{II} の5個の量が与えられれば, φ_I , ψ_I に含まれる未知定数の値は(15), (25) 両式を解くことにより決定される. また φ_{II} , ψ_{II} に含まれる未知定数の値も(24), (21) 式と上に求めた L_{2n} , M_{2n} の値から算出される.

3. 特 殊 例

帯板, 円環の形状および横弾性係数の比について, 二, 三の特殊な場合を次に論じよう.

3.1 異質円環を含む無限板の場合 帯板幅 $2b$ が無限に大きくなった場合であるが, あらかじめ未知定数を次式のように変形し

$$\left. \begin{aligned} D_0^* &= \lambda^{-2} D_0, & D_{2n}^* &= \lambda^{-(2n+2)} D_{2n}, & E_{2n}^* &= \lambda^{-2n} E_{2n} \\ L_{2n}^* &= \lambda^{2n-2} L_{2n}, & M_{2n}^* &= \lambda^{2n} M_{2n} \\ F_0^* &= \lambda^{-2} F_0, & F_{2n}^* &= \lambda^{-(2n+2)} F_{2n}, & G_{2n}^* &= \lambda^{-2n} G_{2n} \\ P_{2n}^* &= \lambda^{2n-2} P_{2n}, & Q_{2n}^* &= \lambda^{2n} Q_{2n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

これらを(15), (21), (24), (25) 式に代入し, ついで $\lambda = a/b \rightarrow 0$ の極値をとれば

$$\left. \begin{aligned} D_0^* &= i_0, & D_2^* &= h_2, & E_2^* &= -j_2 \\ F_0^* &= 2\varepsilon^2 s_0, & F_2^* &= \varepsilon^4 p_2 + 2\varepsilon^6 r_2, & G_2^* &= -2\varepsilon^2 p_2 - 3\varepsilon^4 r_2 \\ Q_0^* &= s_0, & P_2^* &= p_2, & Q_2^* &= r_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

となり, 他の未知定数はすべて零となる. この結果は Sawin の解⁽¹²⁾と全く一致する.

3.2 きわめて肉薄の円環が接着されている場合 $\varepsilon = c/a \rightarrow 1$ の極限の場合には, 後述する $\mu_I / \mu_{II} = 0$ の場合を除いて(25) 式は

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= 2\lambda^2 + 2\lambda^2 M_0 \\ D_{2n} &= \lambda^4 \delta_{1,n} + (2n-1)\lambda^{4n} L_{2n} + 2n\lambda^{4n+2} M_{2n} \\ E_{2n} &= -2\lambda^2 \delta_{1,n} - 2n\lambda^{4n-2} L_{2n} - (2n+1)\lambda^{4n} M_{2n} \end{aligned} \right\} (n > 0) \quad \dots\dots\dots (32)$$

φ_I , ψ_I に含まれる未知定数は(15), (32) 両式から決定されることになる. この両式は自由円孔をもつ帯板に対する Howland の解⁽¹⁸⁾と一致する. この場合円環内の応力は肉厚方向に一様であり

$$(\sigma_r)_{II, r=a} = (\tau_{r\theta})_{II, r=a} = 0$$

$$(\sigma_\theta)_{II, r=a} = \frac{E_{II}}{E_I} (\sigma_\theta)_I, r=a$$

で与えられる。ただし E は縦弾性係数である。この結果は帯板と肉薄円環とが完全に密着していることから明らかである。

3.3 円環が剛体の場合 $\mu_I/\mu_{II} \rightarrow 0$ の極限の場合である。この場合には $H = -K$ となり (25) 式は

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= -(\kappa_I - 1)\lambda^2(1 + M_0) \\ D_{2n} &= -\kappa_I^{-1}\lambda^4\delta_{1,n} - (2n-1)\kappa_I^{-1}\lambda^{4n}L_{2n} - \left\{ [2n - (2n)^{-1}]\kappa_I^{-1} + (2n)^{-1}\kappa_I \right\} \lambda^{4n+2}M_{2n} \\ E_{2n} &= 2\kappa_I^{-1}\lambda^2\delta_{1,n} + 2n\kappa_I^{-1}\lambda^{4n-2}L_{2n} + (2n+1)\kappa_I^{-1}\lambda^{4n}M_{2n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

となり、当然のことながら ε , κ_{II} を含まない。帯板領域に対する解に含まれる未知定数は (15), (33) 式から決定されることになるが、これらは接着縁における条件として (9) 式の代りに $(u_r)_I = (u_\theta)_I = 0$ を用いた場合に得られるものと一致している。

3.4 円環の材料が変形に対する抵抗をもたない場合 $\mu_{II}/\mu_I \rightarrow 0$ の極限の場合である。あらかじめ

$$H^* = H \frac{\mu_{II}}{\mu_I} = \frac{1}{\kappa_I + 1} \left[\kappa_{II} + \frac{\mu_{II}}{\mu_I} \right], \quad K^* = K \frac{\mu_{II}}{\mu_I} = \frac{1}{\kappa_I + 1} \left[1 - \frac{\mu_{II}}{\mu_I} \right]$$

の関係にある H^* , K^* を用いて (27) 式の諸量を書き換え、ついで $\mu_{II}/\mu_I \rightarrow 0$ とおけば

$$i_0 = 2, \quad h_{2n} = 2n - 1, \quad i_{2n} = j_{2n} = 2n, \quad k_{2n} = 2n + 1$$

を得る。したがってこの場合に対しては (25) 式は (32) 式と一致し、自由縁円孔をもつ帯板の解⁽¹⁸⁾が得られる。

3.5 円環と帯板の材料が同じ場合 $\mu_I = \mu_{II}$, $\kappa_I = \kappa_{II}$ の場合である。この場合には帯板領域に対する応力関数と円環に対するものとは等しくなり、それらに含まれる未知定数は (32) 式の λ の代りに $\varepsilon\lambda$ を入れたものと (15) 式から決定すればよいことが容易に示される。すなわち帯板の中心線上に半径 c なる円孔がある場合の解が得られることになる。

4. 数 値 計 算 例

(15), (25) 両式で与えられる無限連立方程式を解いて、解に含まれる未知定数を決定するにあたっては ε , μ_I/μ_{II} , κ_I , κ_{II} にはあらかじめ値を与え、 λ を摂動変数とする摂動法を用いた。すなわち

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= D_0^{(0)}\lambda^2 + \sum_{m=1}^{\infty} D_0^{(m)}\lambda^{2m+2} \\ D_{2n} &= D_2^{(0)}\lambda^4\delta_{1,n} + \sum_{m=1}^{\infty} D_{2n}^{(m)}\lambda^{2m+4n} \\ E_{2n} &= E_2^{(0)}\lambda^2\delta_{1,n} + \sum_{m=1}^{\infty} E_{2n}^{(m)}\lambda^{2m+4n-2} \\ L_{2n} &= \sum_{m=1}^{\infty} L_{2n}^{(m)}\lambda^{2m}, \quad M_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} M_{2n}^{(m)}\lambda^{2m} \end{aligned} \right\} (n > 0) \dots\dots\dots (34)$$

なる解を仮定し、これらを (15), (25) 両式に入れて λ の同べきの項を等置すれば

$$D_0^{(0)} = i_0, \quad D_2^{(0)} = h_2, \quad E_2^{(0)} = -j_2 \dots\dots\dots (35)$$

および $m > 0$ に対し

$$\left. \begin{aligned} L_{2n}^{(m)} &= {}^{2n}\alpha_0 D_0^{(m-1)} + \sum_{k=1}^t {}^{2n}\alpha_{2k} D_{2k}^{(m-2k)} + \sum_{k=1}^{t'} {}^{2n}\beta_{2k} E_{2k}^{(m-2k+1)} \\ M_{2n}^{(m)} &= {}^{2n}\gamma_0 D_0^{(m-1)} + \sum_{k=1}^t {}^{2n}\gamma_{2k} D_{2k}^{(m-2k)} + \sum_{k=1}^{t'} {}^{2n}\delta_{2k} E_{2k}^{(m-2k+1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

ただし m が偶数か奇数かによって $t = m/2$, $t' = t+1$ または $t = (m+1)/2 = t'$ なる値を採る。また

$$\left. \begin{aligned} D_0^{(m)} &= i_0 M_0^{(m)} \\ D_{2n}^{(m)} &= h_{2n} L_{2n}^{(m)} + i_{2n} M_{2n}^{(m-1)} (1 - \delta_{1,m}) \\ E_{2n}^{(m)} &= -j_{2n} L_{2n}^{(m)} - k_{2n} M_{2n}^{(m-1)} (1 - \delta_{1,m}) \end{aligned} \right\} (n > 0) \dots\dots\dots (37)$$

なおこれらの式中に (34) 式の級数に含まれていない係数が現われた場合には零とみなすものとする。変換係数 ${}^{2n}\alpha_{2k}$ 等および h_{2n} , i_{2n} , j_{2n} , k_{2n} の値が既知ならば (36), (37) 式を交互に用いることにより、(34) 式に含まれる係数値は $m = 1, 2, \dots$ に対し次々に算出される。なお (34) 式の収束の程度は次に述べる数値計算の場合には、

帯板内に円孔がある場合と大差ないことがわかった。

$\nu_I = \nu_{II} = 1/3$, $\mu_I/\mu_{II} = 1/3$ とし, ε の値を種々に変えた場合について上記の諸式を用いて数値計算を行なった。また $\mu_I/\mu_{II} = 0$ の場合について ν_I の値を種々変えて数値計算を行なったが, 簡単のため未知係数値の表示は省略し, 帯板および円環内の主要な応力値について記すことにする。

接着縁 $r=a$ に沿っては応力成分 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ のすべてが存在するから, この縁に沿っては次式で与えられる主応力について考察するのが便利であろう。

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \pm \tau$$

$$2\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) = [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2]^{\frac{1}{2}}$$

この場合もう一つの主応力 σ_3 は σ_z に等しく零であるから, σ_1 と σ_2 が異符号の場合には τ は最大主せん断応力であるが, σ_1 と σ_2 が同符号の場合には最大主せん断応力は絶対値が最大である主応力の値の半分となる。

帯板内の最大主応力は接着縁上に生じる。第2図は $\mu_I/\mu_{II} = 1/3$ の場合の帯板内最大主応力と円環形状 c/a との関係を数種の帯板形状 a/b について示したものである。第3図は同じ場合について帯板内最大主せん断応力と円環形状との関係を示している。なお接着縁上で最大主応力の生ずる点は円環が薄肉の場合 ($c/a \sim 1$) には最小断面 $\theta = 0^\circ$ であるが, 厚肉になるにつれ帯板中心線のほうにずれ, 中実円板 $c/a = 0$ のとき

第2図 c/a , a/b と帯板内最大主応力の関係: $\mu_I/\mu_{II} = 1/3$, $\nu_I = \nu_{II} = 1/3$

第4図 c/a , a/b と円環内最大主応力の関係: $\mu_I/\mu_{II} = 1/3$, $\nu_I = \nu_{II} = 1/3$

第3図 c/a , a/b と帯板内最大主せん断応力の関係: $\mu_I/\mu_{II} = 1/3$, $\nu_I = \nu_{II} = 1/3$

第5図 c/a , μ_I/μ_{II} と薄板内最大主応力の関係: $a/b \rightarrow 0$, $\nu_I = \nu_{II} = 1/3$

には $\theta=70^\circ$ の近傍に最大主応力が生じる。また上式の τ の最大値の生じる点は $\theta=40^\circ\sim 50^\circ$ であり、円環肉厚により大きな変化を示さない。しかし円環が薄肉になり最大主応力が急激に大きくなるにつれ、最大主せん断応力は最大主応力の点に生じる。第 3 図において $c/a=0.88$ 近傍で曲線の傾きが急変するのはこのことと対応する。

円環内の最大主応力は最小断面の内縁上に生じる。内縁に沿っては他の主応力はともに零であるから、最大主せん断応力の値は最大主応力の半分となる。第 4 図は第 2 図と同じ場合について円環内縁の最大応力と円環形状との関係を示すものである。これらの図から最大応力に及ぼす円環形状の影響は帯板の場合も無限板の場合と質的に変らぬこと、比較的薄肉の円環の場合には (円孔径)/(帯板幅) が大きくなるにつれ、無補強円孔の場合⁽¹⁸⁾と同程度に最大応力が増加することが知られる。また $\mu_I/\mu_{II}=1/3$ なる円環を補強用に用いるとすれば、 $c/a=0.85$ 程度の形状のものが最も有効であることがうかがわれる。

第 5 図および第 6 図は、接着縁の最大主応力または最大主せん断応力と円環形状との関係を $a/b \rightarrow 0$, $\nu_I =$

$\nu_{II}=1/3$ の場合について、種々の μ_I/μ_{II} に対して示したものである。円環の肉厚が小なるときは μ_I/μ_{II} の小なるほど応力の低下が顕著であるが、肉厚がある程度大になるとかえって逆の傾向を示すこと、 μ_I/μ_{II} の小さいほど補強用として有効な円環の肉厚が小となることが認められる。

以上の数値例においては材料のポアソン比はすべて $1/3$ とした。ここでポアソン比の影響について若干の検討を加えよう。前述のごとく剛体円環の場合には、帯板内の応力は ν_I と a/b によって変化する。この場合帯板内最大主応力、最大主せん断応力と ν_I との関係を種々の a/b について示せば第 7, 8 図のようになり、これらの量に対するポアソン比の影響は顕著ではないといえよう。ただ接着縁上の最大主応力は $\nu_I=1/2, 1/3$ のとき $\theta=70^\circ$ 近傍に生じるが、 $\nu_I=0$ のとき $\theta=90^\circ$ に生じ、また帯板中心線上の σ_y の分布は第 9 図に示すようになり、この線上の σ_y の最大値は $\nu_I=0$ のとき接着縁上にあるが、 $\nu_I=1/3, 1/2$ のときは接着縁よりわずかに内部に生じる等応力分布には若干の差異がみられる。

第 6 図 c/a , μ_I/μ_{II} と薄板内最大主せん断応力の関係 : $a/b \rightarrow 0, \nu_I = \nu_{II} = 1/3$

第 7 図 a/b , ν_I と帯板内最大主応力の関係 : $\mu_I/\mu_{II} \rightarrow 0$

第 8 図 a/b , ν_I と帯板内最大主せん断応力の関係 : $\mu_I/\mu_{II} \rightarrow 0$

第 9 図 剛体円板を有する帯板の中心線に沿う σ_y の分布 : $a/b=0.4$

第 10 図

5. 孔縁の増厚補強

円孔を補強するには通常第 10 図のごとく孔縁近傍を増厚する。この場合増厚補強部を薄板の厚さと同じ厚さをもち、内外径は補強部の内外径と等しい円環とみなし、かつ円環の弾性係数 μ_{II} , ν_{II} は次式で与えられるものとする。

$$\mu_{II} = \mu_{II}^* \frac{t_{II}}{t_I}, \quad \nu_{II} = \nu_{II}^*$$

ここに μ_{II}^* , ν_{II}^* は補強材の弾性係数である。このような等価弾性係数をもつ厚さの等しい円環が接着されたものとして前述の解を適用すれば、増厚補強円孔

第 11 図 面積増加比 F と最大主応力の関係：
 $a/b \rightarrow 0$, $\nu_I = \nu_{II}^* = 1/3$, $\mu_I/\mu_{II}^* = 1$

第 12 図 面積増加比 F と最大せん断応力との関係：
 $a/b \rightarrow 0$, $\nu_I = \nu_{II}^* = 1/3$, $\mu_I/\mu_{II}^* = 1$

をもつ帯板に対する近似解が得られる。この際補強部の応力としては前記解より得られる値を (t_I/t_{II}) 倍することが必要である。この近似解は薄板および補強部の応力、変位は厚さ方向に様に分布しているという仮定に基き、したがって接着縁における厚さの急変による応力集中を無視しているものである。

無限板の場合薄板と補強部の材質が等しいものとするれば上記解による補強部および薄板の最大主応力または最大せん断応力と増加面積比（補強部断面積 / 穴部断面積） F との関係は第 11, 12 図に示される。これらの図から（1）同じ増加面積比について、板厚を増すほうが補強上有効であること、（2）板厚比一定の場合、補強部と薄板部の最大せん断応力が等しくなる F の値があること、（3）上記最大せん断応力の値は板厚比を増すほど小になることなどが知られる。

最後にこの研究を遂行するにあたって終始有益な御助言と御激励を賜った東北大学 樋口盛一名誉教授、懇切なる御批判を賜った沼知福三郎教授に感謝の意を表する。また数値計算には伊藤金弥助手の助力を得たことを記し、謝意を表する。

文 献

- (1) S. Timoshenko, *J. Franklin Inst.*, **197** (1924), 505.
- (2) K. Sezawa & K. Kubo, *Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ.*, **7** (1932), 65.
- (3) 太田, 造船協会会報, **61** (昭12), 247; **62** (昭13), 91; **63** (昭13), 15, 35; **64** (昭14), 5.
- (4) C. Gurney, *Aeron. Res. Commit., R & M*, No.1834 (1938).
- (5) L. Beskin, *J. Appl. Mech.*, **11**, (1944), A-140.
- (6) S. Levy, A.E. McPherson, & F.C. Smith, *J. Appl. Mech.*, **15**, (1948), A-160.
- (7) H. Reissner & M. Morduchow, *NACA TN*, No. 1852 (1949).
- (8) A.A. Wells, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **3** (1950), 23.
- (9) S.R. Heller, *J. Appl. Mech.*, **20** (1953), 279.
- (10) R.B. Harvey, *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **223** (1954), 338.
- (11) J.R.M. Radok, *J. Appl. Mech.*, **22** (1955), 249.
- (12) G.N. Sawin, *Spannungserhöhung am Rande von Löchern* (1956), chapter 5, VEB Verlag Technik, Berlin.
- (13) E. Levin, *Trans. ASME, Series E*, **82** (1960), 283.
- (14) S.R. Heller, *Trans. Soc. Nav. Archit. Mar. Eng-rs.*, **60** (1952), 124.
- (15) 島田, 機械学会論文集, **26**, 164 (昭35-4), 495.
- (16) E.M. Saleme, *J. Appl. Mech.*, **25**, 1 (1958), 129.
- (17) N.I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (1953), P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland.
- (18) R.C.J. Howland, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **229** (1930), 49.