621-52 : 534.014.5

定常不規則入力をうける非線形自動制御系の応答の

確率密度関数に基づく非線形要素の等価ゲインの修正*

樫木 義一**, 砂原 善文**, 吉本 泰生***

Modification of Equivalent Gains Based on the Probability Density Function of the Response of Nonlinear Control Systems Subject to a Gaussian Random Input

by Yoshikazu SAWARAGI, Yoshifumi SUNAHARA, and Yasuo YOSHIMOTO

Recognizing that the probability distribution of input signal to the nonlinear element in a closed loop control system is not a Gaussian, the authors present, in this paper, a more precise evaluation of equivalent gains of various nonlinear elements in control systems subject to a Gaussian random input. The conception with respect to the Markov random process in statistics is introduced and the justification for assuming the response of a nonlinear control system as being a Gaussian process is considered in detail. The equivalent gains obtained in the previous papers are modified from the results of evaluating the probability distribution of the response of nonlinear control systems. Moreover, the statistical linearization technique is theoretically checked for the various important cases. The authors find that the results of these evaluations agree with the experimental results sufficiently.

1. 緒 言

おもな記号の説明

 $u(t)$: 制御系に対する定常不規則入力 $\varepsilon(t)$, $x(t)$: 制御誤差信号および制御量 $z(t)$, $y(t)$: 非線形要素に対する入力, および出力 ψ_z , ψ_ε : $z(t)$, $\varepsilon(t)$ の分散 $p(z)$, $p(\varepsilon)$: $z(t)$, $\varepsilon(t)$ の確率密度関数 $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$: 線形要素伝達関数 k , k_1 , T : 回路定数値

$S_v(\omega)$, $R_v(\tau)$, ψ_v , m_v : $v(t)$ のスペクトル密度, 自己相関関数, 分散ならびに平均値

第1図に示したような非線形自動制御系に, ガウス分布をもつ定常不規則入力 $v(t)$ が印加されたとき, この制御系内の非線形要素に対する入力 $z(t)$ の確率分布は, ガウス分布ではなくなってくる. しかしながら, 第1図のような閉ループ系においては, 積分性線形要素を信号が通過して, フィードバックされることから, 定常不規則入力をうける非線形制御系の解析的研究にあたっては, 信号 $z(t)$ の確率分布もまたガウ

ス分布であるとして⁽¹⁾, 等価線形化の手法⁽²⁾が適用されてきた. しかし厳密に考えるならば, 等価線形化の手法を適用するにあたっては, ガウス分布をもつ不規則信号に対する非線形要素の等価ゲイン⁽³⁾は $z(t)$ なる非線形要素に対する入力信号の確率分布を考慮して修正されねばならない. 閉ループ系の応答の確率密度関数の評価に対する試みは, すでに R. Deutsch,⁽⁴⁾ L. F. Kazda および K. Chuang⁽⁵⁾によってなされているが, アナリシス・シンセシスの両面の研究に必要な非線形要素の等価ゲインを本論文において与える.

さて, いま n 個の単純 Markov 過程 $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\dots$, $\alpha_n(t)$ を考える. ただし t は時間変数を表わす. 三つの時間 t_0 , t_1 , t_2 ($t_2 < t_1 < t_0$) を考え, これらの各時間において

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(t_1) &= \theta_1, \alpha_2(t_1) = \theta_2, \dots, \alpha_n(t_1) = \theta_n \\ \alpha_1(t_2) &= \xi_1, \alpha_2(t_2) = \xi_2, \dots, \alpha_n(t_2) = \xi_n \\ \alpha_1(t_0) &= \eta_1, \alpha_2(t_0) = \eta_2, \dots, \alpha_n(t_0) = \eta_n \end{aligned} \right\} (1)$$

第1図 定常不規則信号をうける非線形自動制御系のブロック線図

* 昭和 35 年 4 月 3 日 第 37 期通常総会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和 34 年 11 月 30 日.

** 正員, 京都大学工学部 (京都市左京区吉田本町).

*** 京都大学工学部.

であるとする。次に時刻 t_2 において $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ なる値をとった n 個の確率変数が、時刻 t_0 において $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ なる値をとる場合の確率密度関数を

$$f_p(t_0; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n | t_2; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

時刻 t_2 において $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ なる値をとった n 個の確率変数が、時刻 t_1 において $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ なる値をとる場合の確率密度関数を

$$f_p(t_1; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n | t_2; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

また時刻 t_1 において $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ なる値をとった確率変数が、時刻 t_0 において $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ なる値をとる確率密度関数を

$$f_p(t_0; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n | t_1; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

と表わすことにすれば、次の Smolukowsky-Chapman の方程式が成立する⁽⁶⁾。

$$f_p(t_0; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n | t_2; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int \dots \int \underbrace{f_p(t_1; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n | t_2; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}_n \times f_p(t_0; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n | t_1; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \dots \dots \dots (2)$$

さらに、Lindeberg の条件のもとに次の Fokker-Planck の方程式が成立する⁽⁶⁾。

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \eta_i} (m_i f_p) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} (m_{i,j} f_p) \dots \dots \dots (3)$$

ただし、上式右辺において

$$m_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \eta_i f_p(t + \Delta t; \eta_1 + \Delta \eta_1, \eta_2 + \Delta \eta_2, \dots, \eta_n + \Delta \eta_n | t; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) d(\Delta \eta_1) d(\Delta \eta_2) \dots d(\Delta \eta_n) \dots \dots \dots (4)_1$$

および

$$m_{i,j} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta \eta_i) (\Delta \eta_j) f_p(t + \Delta t; \eta_1 + \Delta \eta_1, \eta_2 + \Delta \eta_2, \dots, \eta_n + \Delta \eta_n | t; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) d(\Delta \eta_1) d(\Delta \eta_2) \dots d(\Delta \eta_n) \dots \dots \dots (4)_2$$

である。

2. 制御方程式より Fokker-Planck の方程式の誘導

ここに不規則変化をする大きさがガウス分布に従う信号 $v(t)$ が、第 2 図のような非線形制御系に印加される場合を一例にとってみる。制御系に含まれる非線形要素は、その入、出力の関係が

$$y(t) = f[z(t)] \dots \dots \dots (5)$$

によって表わされるような Zero-memory 形のものであるとする。ただし第 2 図に示したように、以下の議論の便宜上 $G_1(s) = 1$ として記述を進めることにする。このようにすることによって、 $\varepsilon(t) = z(t)$ となり非線形要素に対する入力信号 $z(t)$ に対して得られた各種の結果は直ちに、それが制御偏差についての各量として評価される。

第 2 図において、 $v(t)$ と $z(t)$ の間には

$$T \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + k k_1 f(z) = T \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (6)$$

なる形の 2 階非線形微分方程式となる。(6) 式において

$$\dot{z} \equiv dz/dt \dots \dots \dots (7)_1$$

$$V(t) \equiv T \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (7)_2$$

第 2 図 第 1 例制御系ブロック線図

とおくことによって、容易に次式を得る。

$$\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{T} \dot{z} + \frac{k k_1}{T} f(z) = \frac{1}{T} V(t) \dots \dots \dots (8)$$

いま、定常不規則目標値信号 $v(t)$ の統計的性格を以下のように定める。すなわち、その大

きさがガウス分布に従うものとし, かつ

$$m_v = 0 \dots\dots\dots (9)_1$$

$$R_v(\tau) = \psi_v \exp(-\beta|\tau|), \quad \beta > 0 \dots\dots\dots (9)_2$$

$$S_v(\omega) = 2\psi_v\beta/(\beta^2 + \omega^2) \dots\dots\dots (9)_3$$

とする. ただし τ は時間間隔である. しかるとき $V(t)$ のスペクトル密度 $S_v(\omega)$ は (7)₂ 式から

$$S_v(\omega) = \frac{2\psi_v\beta T^2\omega^4}{(\beta^2 + \omega^2)} + \frac{2\psi_v\beta\omega^2}{\beta^2 + \omega^2} \dots\dots\dots (10)$$

となる. したがって βT の値がかなり小さく, かつ $\beta^2 \gg \omega^2$ の範囲では $S_v(\omega) \cong 2\psi_v\beta$, すなわち一定値をとるものと考えることができる. よってこの範囲で $V(t)$ はガウス性白色雑音, 換言すれば単純 Markov 過程と考えられる⁽⁷⁾. そこで (8) 式の両辺を $(t, t+\Delta t)$ の区間について積分すると

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{dz}{dt} dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+\Delta t} \dot{z} dt + \frac{kk_1}{T} \int_t^{t+\Delta t} f(z) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+\Delta t} V(t) dt \dots\dots\dots (11)$$

となるが, ここで非常に微少な時間増分 Δt に対しては

$$z(t+\Delta t) \cong z(t) \dots\dots\dots (12)$$

$$\dot{z}(t+\Delta t) \cong \dot{z}(t) \dots\dots\dots (13)$$

であると仮定すれば, (11) 式は,

$$\Delta \dot{z} + \frac{1}{T} \Delta z + \frac{kk_1}{T} f(z) \Delta t = \frac{1}{T} \int_t^{t+\Delta t} V(t) dt \dots\dots\dots (14)$$

となる. ただし $\Delta \dot{z}$, Δz は $\dot{z}$, z に関する増分である.

さて, (14) 式における $z(t)$, および $\dot{z}(t)$ を二つの確率変数と考えよう. しかるとき前節 (3) 式として示した Fokker-Planck の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial z}(m_1 f_p) - \frac{\partial}{\partial \dot{z}}(m_2 f_p) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \dot{z}^2}(m_{11} f_p) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \dot{z}^2}(m_{22} f_p) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \dot{z}}(m_{12} f_p) + \frac{\partial^2}{\partial \dot{z} \partial z}(m_{21} f_p) \right\} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となる. ただし上式における m_1 , m_2 , m_{11} , ... 等は (4)₁ 式および (4)₂ 式から

$$m_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta z f_p(t_2 + \Delta t_2; z + \Delta z, \dot{z} + \Delta \dot{z} | t_2; z, \dot{z}) d(\Delta z) d(\Delta \dot{z}) \dots\dots\dots (16)_1$$

$$m_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \dot{z} f_p(t_2 + \Delta t_2; z + \Delta z, \dot{z} + \Delta \dot{z} | t_2; z, \dot{z}) d(\Delta z) d(\Delta \dot{z}) \dots\dots\dots (16)_2$$

$$m_{11} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta z)^2 f_p(t_2 + \Delta t_2; z + \Delta z, \dot{z} + \Delta \dot{z} | t_2; z, \dot{z}) d(\Delta z) d(\Delta \dot{z}) \dots\dots\dots (16)_3$$

$$m_{22} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta \dot{z})^2 f_p(t_2 + \Delta t_2; z + \Delta z, \dot{z} + \Delta \dot{z} | t_2; z, \dot{z}) d(\Delta z) d(\Delta \dot{z}) \dots\dots\dots (16)_4$$

$$m_{12} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta z)(\Delta \dot{z}) f_p(t_2 + \Delta t_2; z + \Delta z, \dot{z} + \Delta \dot{z} | t_2; z, \dot{z}) d(\Delta z) d(\Delta \dot{z}) \dots\dots\dots (16)_5$$

$$m_{21} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta \dot{z})(\Delta z) f_p(t_2 + \Delta t_2; z + \Delta z, \dot{z} + \Delta \dot{z} | t_2; z, \dot{z}) d(\Delta z) d(\Delta \dot{z}) \dots\dots\dots (16)_6$$

となる. (7)₁ 式および (14) 式から (16)₁~(16)₆ 式の各係数を計算すると

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \dot{z} & m_{11} &= 2\phi_v/T^2 \\ m_2 &= -\left\{ \frac{1}{T} \dot{z} + \frac{kk_1}{T} f(z) \right\}, & m_{22} &= m_{21} = m_{12} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)_1$$

となる (付録 I 参照). ただし

$$\langle V(t) \cdot V(t+\tau) \rangle_{av.} = 2\phi_v \delta(\tau) \dots\dots\dots (17)_2$$

とする. ただし, ϕ_v は $V(t)$ の分散である. (17)₁ 式の結果を (15) 式に代入すると

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\dot{z} f_p) + \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left[\left\{ \frac{1}{T} \dot{z} + \frac{kk_1}{T} f(z) \right\} f_p \right] + \frac{\phi_v}{T^2} \frac{\partial^2 f_p}{\partial z^2} \dots\dots\dots (18)$$

なる関係を得る. いま一つの例として, 第3図にそのブロック線図を与えた非線形制御系について Fokker-Planck

の方程式を導いてみる。この系の制御方程式は

$$T \frac{dz}{dt} + z + kf(z) = T \frac{dv}{dt} + v \dots\dots\dots (19)$$

となる。制御系目標値信号 $v(t)$ の統計的性格は、第 2 図に示した制御系に対するそれと、この場合も全く同一である。このようにすれば (18) 式を得たときと全く同一の手続きを経て、次の結果をうる。

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left\{ \frac{1}{T} z + \frac{k}{T} f(z) \right\} f_p \right] + \frac{1}{T^2} \Phi_v \frac{\partial^2 f_p}{\partial z^2} \dots\dots\dots (20)$$

3. 定常不規則入力をうける非線形制御系の応答のもつ確率密度関数

前節で得た Fokker-Planck の方程式 (18) 式、(20) 式において、 f_p は $z(t)$ のもつ確率密度関数であるから、これらの偏微分方程式の解法を実行すれば f_p が得られる。

3.1 第 1 例 第 2 図のブロック線図で与えられた制御系について述べる。 $v(t)$ の定常性を仮定すると、(18) 式左辺は $\partial f_p / \partial t = 0$ となり、結局

$$-\frac{\partial}{\partial z} (\dot{z} f_p) + \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left[\left\{ \frac{1}{T} \dot{z} + \frac{kk_1}{T} f(z) \right\} f_p \right] + \frac{\Phi_v}{T^2} \frac{\partial^2 f_p}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

を解けばよい。(21) 式に対して

$$f_p = A \exp \{ c_1 \dot{z}^2 + c_2 \int f(z) dz \} \equiv f_p(z, \dot{z}) \quad (A: \text{定数}) \dots\dots\dots (22)$$

とすると⁽⁸⁾

$$c_1 = -T/2\Phi_v, \quad c_2 = -kk_1/\Phi_v \dots\dots\dots (23)$$

となる。したがって

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_p(z, \dot{z}) d\dot{z} = A \exp \left[-\frac{kk_1}{\Phi_v} \int f(z) dz \right] \dots\dots\dots (24)$$

なる結果をうる。Zero-memory 形非線形要素の伝達特性 $f(z)$ が与えられれば、(24) 式から信号 $z(t)$ の確率密度関数 $p(z)$ を計算することができる。

第 4 図に示したような対称形飽和伝達特性に対しては、 $z(t) \geq 0$ に対する計算で十分である。 $z(t) \geq 0$ において $f(z)$ は

$$f(z) = z \quad (a_1 \geq z \geq 0), \quad f(z) = a_1 \quad (z \geq a_1) \dots\dots\dots (25)$$

であるから、(24) 式から

$$p_+(z) = A_1 \exp \left(-\frac{kk_1}{2\Phi_v} z^2 \right) \quad (a_1 \geq z \geq 0) \dots\dots\dots (26)_1$$

$$= A_2 \exp \left(-\frac{kk_1}{\Phi_v} a_1 z \right) \quad (z \geq a_1) \dots\dots\dots (26)_2$$

となる。上式における定数 A_1, A_2 は次の二つの条件から定められる。まず第一の条件としては統計学の理論より

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz = 1 \dots\dots\dots (27)$$

である。(26)₁ 式、(26)₂ 式から $z \geq 0$ に対して (27) 式は

$$\int_0^{a_1} A_1 \exp \left(-\frac{kk_1}{2\Phi_v} z^2 \right) dz + \int_{a_1}^{\infty} A_2 \exp \left(-\frac{a_1 kk_1}{\Phi_v} z \right) dz = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (28)$$

となる。また第二の条件として $z(t) = a_1$ において

第 3 図 第 2 例制御系ブロック線図

第 4 図 飽和形非線形特性

$$A_1 \exp\left(-\frac{kk_1 a^2}{2\Phi_V}\right) = A_2 \exp\left(-\frac{kk_1 a^2}{\Phi_V}\right) \dots\dots\dots (29)$$

であるべきである。(28) 式, (29) 式から A_1, A_2 は次式のように定められる.

$$A_1 = 1/2a_1 \left\{ \sqrt{2\gamma} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) + \gamma \exp\left(-\frac{1}{2\gamma}\right) \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$$A_2 = \exp\left(\frac{1}{2\gamma}\right) / 2a_1 \left\{ \sqrt{2\gamma} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) + \gamma \exp\left(-\frac{1}{2\gamma}\right) \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ただし,

$$\gamma = \Phi_V / kk_1 a^2, \quad \Phi(z) = \int_0^z \exp(-\eta^2) d\eta \dots\dots\dots (32)$$

である.

3.2 第2例 ブロック線図が第3図で与えられる第2の例について以下に述べる. この場合も $v(t)$ の定常性を仮定すると (20) 式から

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\{\alpha z + \beta f(z)\} f_p \right] + \alpha^2 \Phi_V \frac{\partial^2 f_p}{\partial z^2} = 0, \quad (\alpha = 1/T, \beta = k/T) \dots\dots\dots (33)$$

を解けばよい. 第1の例におけると同様にして

$$f_p(z) = A \exp \left\{ -\left(\frac{T}{2\Phi_V} z^2 + \frac{kT}{\Phi_V} \int f(z) dz \right) \right\} \dots\dots\dots (34)$$

を得る. 第3図に示した制御系が第4図に示した飽和形非線形伝達特性を含む場合は, (34) 式から

$$p_+(z) = A_1 \exp \left\{ -\frac{T}{2\Phi_V} (1+k) z^2 \right\} \quad (a_1 \geq z \geq 0) \dots\dots\dots (35)_1$$

$$= A_2 \exp \left\{ -\frac{T}{\Phi_V} \left(\frac{z^2}{2} + a_1 k z \right) \right\} \quad (z \geq a_1) \dots\dots\dots (35)_2$$

となる. 上式の A_1, A_2 なる定数は (30) 式, (31) 式を得たときと同様にして

$$A_1 = 1/2a_1 \left[\sqrt{\frac{2}{(1+k)\gamma}} \Phi\left(\sqrt{\frac{(1+k)\gamma}{2}}\right) + \exp\left(\frac{\gamma k^2 + \gamma k}{2}\right) \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} - \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \Phi\left\{(1+k)\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right\} \right] \right] \dots\dots\dots (36)_1$$

$$A_2 = A_1 \exp\left(\frac{k\gamma}{2}\right) \dots\dots\dots (36)_2$$

となる. 第1表は上述する第1の例としてとりあげた第1図における $G_2(s) = kk_1/s(1+sT)$ なる場合 (ブロック線図—第2図) について諸種の非線形要素に対する $p_+(z)$ の計算結果を, 第2表は第2の例としてとりあげた $G_2(s) = k/(1+sT)$ なる場合 (ブロック線図—第3図) についての $p_+(z)$ の計算結果を示している. この表に与えられた $p_+(z)$ は第5, 6図に示されている. 制御系が完全に線形系であるときは, $z(t)$ の確率密度関数は付録IIに示したように完全にガウス形となる. この結果も第5, 6図に示されている.

第5図 信号 $z(t)$ の確率密度曲線 I

第6図 信号 $z(t)$ の確率密度曲線 II

4. 等価ゲインの修正

Zero-memory 形非線形要素の等価ゲイン κ_n' を決定する方法として

$$\kappa_n' = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) p(z) dz / \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z) dz \quad \dots\dots\dots (37)$$

第 1 表 $G_2(s) = \frac{k}{s} \frac{k_1}{1+sT}$ なる場合の確率密度関数

非線形特性	$p_+(Z)$			
	$p_+(Z)$	A_1	A_2	A_3
	$A_1 \quad 0 \leq Z \leq a_0$ $A_2 \exp(-\frac{k k_1 a_1}{\Phi_V} Z) \quad Z \geq a_0$	$\frac{1}{2(a_0 + \frac{\Phi_V}{k k_1 a_1})}$	$A_1 \exp(\frac{k k_1 a_0 a_1}{\Phi_V})$	—
	$A_1 \exp(-\frac{k k_1 a_1}{\Phi_V} Z) \quad Z \geq 0$	$\frac{k k_1 a_1}{2 \Phi_V}$	—	—
	$A_1 \quad 0 \leq Z \leq a_0$ $A_2 \exp\{-\frac{k k_1}{\Phi_V} (\frac{Z^2}{2} - a_0 Z)\} \quad a_0 \leq Z \leq a_1$ $A_3 \exp\{-\frac{k k_1}{\Phi_V} (a_1 - a_0) Z\} \quad a_1 \leq Z$	$\frac{1}{2(a_0 + \sqrt{\frac{2\Phi_V}{k k_1}} \Phi((a_1 - a_0)\sqrt{\frac{k k_1}{2\Phi_V}}) + \frac{\Phi_V}{k k_1 (a_1 - a_0)} \exp\{-\frac{\Phi_V}{2 k k_1} (a_1 - a_0)^2\})}$	$A_1 \exp(-\frac{k k_1 a_1^2}{2 \Phi_V})$	$A_3 \exp(\frac{k k_1}{2 \Phi_V} (a_1^2 - a_0^2))$
	$A_1 \exp(-\frac{k k_1}{2 \Phi_V} Z^2) \quad 0 \leq Z \leq a_1$ $A_2 \exp(-\frac{k k_1}{\Phi_V} a_1 Z) \quad Z \geq a_1$	$\frac{1/2 a_1}{\sqrt{\frac{2\Phi_V}{k k_1}} \Phi(\sqrt{\frac{k k_1 a_1^2}{2\Phi_V}}) + \frac{\Phi_V}{k k_1 a_1} \exp(-\frac{k k_1 a_1^2}{2\Phi_V})}$	$A_1 \exp(\frac{k k_1 a_1^2}{2 \Phi_V})$	—

第 2 表 $G_2(s) = \frac{k}{1+sT}$ なる場合の確率密度関数

非線形特性	$p_+(Z)$			
	$p_+(Z)$	A_1	A_2	A_3
	$A_1 \exp\{-\frac{T}{2\Phi_V} Z^2\} \quad 0 \leq Z \leq a_0$ $A_2 \exp\{-\frac{T}{\Phi_V} (\frac{1}{2} Z^2 + k a_1 Z)\} \quad Z \geq a_0$	$\frac{1/\sqrt{2\Phi_V}}{\Phi(\sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}} a_0) + [\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(\sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}} (a_0 + k a_1))] \exp\{\frac{T}{2\Phi_V} k a_1 (k a_1 + 2 a_0)\}}$	$A_1 \exp(\frac{T}{\Phi_V} k a_0 a_1)$	—
	$A \exp\{-\frac{1}{\Phi_V} (\frac{1}{2} Z^2 + a_1 k Z)\} \quad Z \geq 0$	$\frac{1/2 \sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}}}{[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(\sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}} a_1 k)] \exp(\frac{T k^2 a_1^2}{2\Phi_V})}$	—	—
	$A_1 \exp\{-\frac{T}{2\Phi_V} Z^2\} \quad 0 \leq Z \leq a_0$ $A_2 \exp\{-\frac{T}{\Phi_V} (\frac{1}{2} Z^2 + \frac{k}{2} Z^2 + k a_1 Z)\} \quad a_0 \leq Z \leq a_1$ $A_3 \exp\{-\frac{T}{\Phi_V} [\frac{1}{2} Z^2 + k(a_1 - a_0) Z]\} \quad Z \geq a_1$	$\frac{1/\sqrt{2\Phi_V}}{\Phi(\sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}} a_0) + [\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(\sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}} \{a_1(1+k) + k a_0\})] \exp\{\frac{T}{2\Phi_V} k [a_1^2 (k-1) + a_1^2 (k+3) - 2 a_0 a_1 (1+k)]\} + \frac{1}{1+k} [\Phi(\sqrt{\frac{T(1+k)}{2\Phi_V}} (a_1 + \frac{k a_0}{1+k})) + \Phi(\sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}} (1+2k) a_0) - 2 \Phi(\sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}} (1+k) k a_0)] \exp\{\frac{T}{2\Phi_V} \frac{k a_0^2}{1+k} (3+4k)\}}$	$A_1 \exp(\frac{3 T a_0^2 k}{2 \Phi_V})$	$A_1 \exp(\frac{T}{2\Phi_V} k a_1^2)$
	$A_1 \exp\{-\frac{T}{2\Phi_V} (1+k) Z^2\} \quad 0 \leq Z \leq a_1$ $A_2 \exp\{-\frac{T}{\Phi_V} (\frac{1}{2} Z^2 + a_1 k Z)\} \quad Z \geq a_1$	$\frac{1/\sqrt{2\Phi_V}}{[\frac{1}{1+k} \Phi(\sqrt{\frac{T(1+k)}{2\Phi_V}} a_1) + [\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(\sqrt{\frac{T}{2\Phi_V}} a_1(1+k))] \exp\{\frac{T a_1^2 k (1+k)}{2\Phi_V}\}}$	$A_1 \exp(\frac{T}{2\Phi_V} k a_1^2)$	—

なる関係が用いられることはすでに示した⁽⁹⁾。本節においては一例として、第2図の制御系における飽和形非線形特性(第4図)の修正等価ゲインを計算する。

(37) 式より

$$\kappa_n' = \frac{1}{\psi_z} \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) p(z) dz \quad \dots\dots\dots (38)$$

なる関係を得るが、上式右辺において

$$\psi_z = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z) dz = \sqrt{2\gamma} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) + 2\gamma \exp\left(-\frac{1}{2\gamma}\right) + 2\gamma^2 \exp\left(-\frac{1}{2\gamma}\right) \quad \dots\dots\dots (39)$$

にして、さらにまた

$$\int_{-\infty}^{\infty} z f(z) p(z) dz = \frac{\Phi_V}{kk_1} \quad \dots\dots\dots (40)$$

であるから、結局

$$\kappa_n' = \frac{1}{\psi_z} \frac{\Phi_V}{kk_1} = \frac{a_1^2}{\psi_z} \gamma \quad \dots\dots\dots (41)$$

第7図 $\kappa_n' \sim \psi_z/a_1^2$, $\kappa_n \sim \psi_z/a_1^2$ 曲線 (飽和要素)

第9図 $\kappa_n' \sim \psi_z/a_1^2$, $\kappa_n \sim \psi_z/a_1^2$ 曲線 (不感帯のある飽和要素)

第8図 $\kappa_n' \sim \psi_z/a_1^2$, $\kappa_n \sim \psi_z/a_1^2$ 曲線 (オン・オフ要素)

第10図 $\kappa_n' \sim \psi_z/a_0^2$, $\kappa_n \sim \psi_z/a_0^2$ 曲線 (不感帯のあるオン・オフ要素)

となる。(39) 式, (41) 式から γ を消去すれば a_1^2/ψ_z の関数として修正等価ゲインを算出することができる。(37) 式において

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_z}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\psi_z}\right) \dots\dots\dots (42)$$

とすれば, すでに著者らが与えた従来の等価ゲイン⁽³⁾に帰着する. 修正等価ゲイン κ_n' と従来の等価ゲイン κ_n との差異をめいりょうに表現するため, 第 7~11 図に κ_n' 曲線, κ_n 曲線を示した. 第 3 表に第 2 図に示した制御系に各種の非線形要素が存在した場合, その要素の修正等価ゲインを従来の等価ゲインとともに表示した.

5. 実 験

上述の解析結果の妥当性を確かめるために電子管式相似演算器による実験を行なった. 第 2 図および第 3 図に示された非線形自動制御系はそれぞれ第 12, 13 図のように構成され, A_I 点, あるいは A_{II} 点に雑音発生器によって得られた雑音⁽¹⁰⁾が印加される. 実験装置は第 14 図にブロック線図をもって示したように構成され, 非線形要素(飽和要素)に対する入力 $z(t)$ のところに著者らのすでに試作した度数分布計数回路⁽¹⁰⁾がそう入される. これによって $z(t)$ の $-\infty < z(t) < +\infty$ にわたる不規則動揺の大きさがある特定(可変)のレベルを通過する回数, すなわち度数分布が測定される. この結果から $z(t)$ の確率密

度関数 $p(z)$ が計算される. 第 15 図に実験結果を●印によって示した*.

6. 結 言

上述の理論的, ならびに実験的研究により, 種々の興味ある事実が認められた. 以下に要約して結言としよう.

(1) 非線形自動制御系にガウス形の確率分布をもつ定常不規則入力が印加される場合, その系の非線形要素への入力信号のもつ確率密度関数はガウス形からくずれてくるが, その程度は, 非線形伝達特性の種類によって異なり, 飽和形あるいは入, 出力間の関係が一般に多項式であらわされる特性をもつものに対しては, まずガウス形とみなしてよい. しかしながら, オ

第 11 図

第 3 表 各種非線形要素に対する修正等価ゲイン

非線形特性	修正等価ゲイン κ_n'	等価ゲイン κ_n
	$\frac{\frac{3\Phi_r}{RR_1} (a_0 + \frac{\Phi_r}{RR_1 a_1})}{a_0^3 + \frac{3a_0^2\Phi_r}{RR_1 a_1} + \frac{6a_0\Phi_r^2}{a_1^2(RR_1)^2} + \frac{6\Phi_r^3}{a_1^3(RR_1)^3}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_1}{\psi_z} \exp(-\frac{a_1^2}{2\psi_z})$
	$\frac{RR_1 a_1^2}{2\Phi_r}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_1}{\sqrt{\psi_z}}$
	$\frac{a_0 + \sqrt{\frac{2\Phi_r}{RR_1}} \Phi \left((a_1 - a_0) \sqrt{\frac{RR_1}{2\Phi_r}} \right) + \frac{\Phi_r}{RR_1(a_1 - a_0)} \exp\left\{-\frac{RR_1}{2\Phi_r} (a_1 - a_0)^2\right\}}{\frac{a_0^2 RR_1}{3\Phi_r} + \sqrt{\frac{2\Phi_r}{RR_1}} \Phi \left((a_1 - a_0) \sqrt{\frac{RR_1}{2\Phi_r}} \right) - \left[(a_1 - a_0) - \frac{a_1^2}{(a_1 - a_0)} - \frac{2\Phi_r a_1}{RR_1(a_1 - a_0)^2} - \frac{2\Phi_r^2}{(RR_1)^2(a_1 - a_0)^3} \right] \exp\left\{\frac{RR_1}{2\Phi_r} (a_1 - a_0)^2\right\}}$	$2\sqrt{2} \left\{ \Phi\left(\frac{a_1}{\sqrt{2\psi_z}}\right) - \Phi\left(\frac{a_0}{\sqrt{2\psi_z}}\right) \right\}$
	$\frac{\sqrt{\frac{2\Phi_r}{RR_1 a_1^2}} \Phi \left(\sqrt{\frac{RR_1 a_1^2}{2\Phi_r}} \right) + \frac{\Phi_r}{RR_1 a_1^2} \exp\left(-\frac{RR_1 a_1^2}{2\Phi_r}\right)}{\sqrt{\frac{2\Phi_r}{RR_1 a_1^2}} \Phi \left(\sqrt{\frac{RR_1 a_1^2}{2\Phi_r}} \right) + \frac{2\Phi_r}{RR_1 a_1^2} \left(1 + \frac{\Phi_r}{RR_1 a_1^2}\right) \exp\left(+\frac{RR_1 a_1^2}{2\Phi_r}\right)}$	$2\sqrt{2} \Phi \left(\frac{a_1}{\sqrt{2\psi_z}} \right)$

* 本実験結果は, 森 政弘氏に討論をいただいたように実験機器に不備の点があり, 良好な結果とはいえない. その後の種々改良した装置により第 16 図のようなかなり良好な結果を得, 実験的な裏付けに成功した.

ンオフ要素のように顕著な非線形特性が存在するとき
は、著しくガウス分布からくずれてくる。

(2) 上述の事実はさらに線形要素の動特性(伝達関数)にも依存する。このことは第5, 6図を比較すれば認められる。

(3) 以上の事実から従来の等価ゲインは第7~11図のように修正される。従来の等価ゲインを用いた諸種の研究の結果は定性的に少しも変らないが、定量的によりいっそうの精度を望むときは修正等価ゲインを用いるべきである。

本研究においては、制御系が一つの定常不規則入力を受ける場合を取扱ったが、さらに制御系入力として正弦波状規則成分、直流成分などと雑音が重畳した入力に対する考察、ならびに非対称非線形伝達特性の存在する場合に対する研究は目下続行中である。

なお、本研究の実施にあたり、数値計算、実験などに協力をいただいた京都大学大学院学生 中溝高好、研究生 塚本幸雄、豊野 博、大阪工業大学学生 加藤文義の諸君に感謝の意を表する。

付 録 I 係数 $m_1, m_2, m_{11}, m_{22}, m_{12}, m_{21}$ の計算

Fokker-Planck の方程式における係数 $m_1, m_2, \dots$ 等は次のようにして計算される。(16)₁式から

$$m_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta z f_p(t_2 + \Delta t_2; z + \Delta z, \dot{z} + \Delta \dot{z} | t_2; z, \dot{z}) d(\Delta z) d(\Delta \dot{z}) \quad (43)$$

である。(14)式から

$$\Delta \dot{z} = \frac{1}{T} \int_t^{t+\Delta t} V(t) dt - \left\{ \frac{1}{T} \dot{z} \Delta t + \frac{kk_1}{T} f(z) \Delta t \right\} \quad (44)$$

を得るから、(44)式を(43)式に代入することによって

$$m_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{T} V(t) dt - \left\{ \frac{1}{T} \dot{z} + \frac{kk_1}{T} f(z) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_p d(\Delta z) d(\Delta \dot{z}) \quad (45)$$

となる。いま制御系入力の平均値を零とすれば $\langle V(t) \rangle_{av} = 0$ である。したがって

第12図 第2図の演算回路

第13図 第3図の演算回路

第14図 度数分布測定のプロック線図

第15図 実験結果

付 図 1

$$m_2 = -\left\{ \frac{1}{T} \dot{z} + \frac{kk_1}{T} f(z) \right\} \dots\dots\dots (46)$$

となる。

次に (16)₁ 式, および (16)₂ 式から直ちに

$$m_1 = \dot{z} \dots\dots\dots (47)$$

なる結果がえられる。

さらに (16)₃ 式, および (44) 式から

$$m_{11} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \cdot V(\tau) dt d\tau - \frac{2}{T} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} V(t) dt \left\{ \frac{1}{T} \dot{z} + \frac{kk_1}{T} f(z) \right\} = 2\Phi_V / T^2 \dots\dots (48)$$

全く同様にして $m_{22}=0$, $m_{12}=m_{21}=0$ をうる。

付 録 II 線形制御系の応答の確率密度関数

第2図に示した非線形制御系の非線形要素が $y(t)=z(t)$ なる線形要素になった場合, 制御方程式は

$$T \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + kk_1 z = T \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt} \dots\dots\dots (49)$$

となり, したがって

$$p(z) = A \exp\left(-\frac{kk_1}{2\Phi_V} z^2\right) \dots\dots\dots (50)$$

なる結果をうる。ただし

$$A = 1 / \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{kk_1}{2\Phi_V} z^2\right) dz = \sqrt{\frac{kk_1}{2\Phi_V}} \dots\dots\dots (51)$$

である。すなわち $z(t)$ の確率密度関数は完全にガウス形となる。

文 献

- (1) S.O. Rice, *Bell Syst. Tech. J.*, **23**, 282 (1944).
- (2) Y. Sawaragi & Y. Sunahara, *Tech. Reps. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ.*, **VIII**, 10 (昭33-10).
- (3) Y. Sawaragi & Y. Sunahara, *Tech. Reps. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ.*, **VIII**, 5 (昭33-3).
- (4) R. Deutsch, *Proc. Symposium on Non-Linear Circuit Analysis, Polytech. Inst. Brooklyn* (1956-4).
- (5) L.F. Kazda & K. Chuang, *AIEE Trans.*, No. 42 (1959-5), 100.
- (6) W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, **1** (1957), 326, John Wiley & Son., Inc.
- (7) J.L. Lawson & G.E. Uhlenbeck, *Threshold Signals* (1950), McGraw-Hill.
- (8) H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (1932), Cambridge Univ. Press.
- (9) 榎木, 砂原, 吉本, *機械学会論文集*, **25**, 155 (昭34-7), 733.
- (10) Y. Sawaragi & Y. Sunahara, *Tech. Reps. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ.*, **IX**, 5 (昭34-3).

討 論

【質問】 (7)₂ 式で定義した $V(t)$ がいくらか dependency を持っている場合, つまり simple markoff process ではない (少し違うというときであるが) 場合が多いのではないかと思うが, その場合は Fokker-Planck の式を使ったための誤差が生じるのではないかと思う。そうすると従来の等価線形化法と比べて定量的に正確であるという特長が失われて, また第3表のゲインで見ると従来のよりは計算が面倒なわけであるから, (10) 式の βT , β , ω の関係がある範囲をこすと, 発表の方法は不利になるのではないかと思うが, この β , ω の使用範囲についていかに考えられるか。

(兼重 一郎)

【回答】 $V(t)$ が単純マルコフ過程でなくなると, この手法を適用したための誤差はもちろん生ずる。む

しろその場合は, この手法が適用できないと表現されるべきである。しかし実際の系の入力 $v(t)$ の微分された形で $V(t)$ が表わされるときは, その周波数スペクトラムの平坦な範囲において, この手法は適用される。 βT , β , ω の値いかんによって, この方法が適用されるか否かが定まるのは質問のとおりであるが, これらの値の明確な範囲は逐一計算を実施して $V(t)$ の周波数スペクトラムを描き, 検討することは可能である。この手法は Fokker-Planck の微分方程式を解くことが最大の要点になっているが, 制御系の伝達関数の形いかんによってはとけない場合が生ずる。したがって上記諸量の定量的な検討を第2として, まず解決可能な系に対して諸計算を行なったわけである。次の機会にこの方面の検討の結果をまとめてみる。

〔質問〕 第15図の実験結果によると, 実験データ(黒点)は(26)式からの理論計算結果へよりもむしろガウス分布に近く出ている. 実験の際の諸定数が不明なのではっきりとは言えないが, この実験結果は理論の妥当性を裏書きするためのものとしては不適當ではないかと考える.

結論にもあるように, 非線形要素の特性が飽和形の場合は, $z(t)$ はガウス形とみなしてもよいはずではある. つまり, このことは理論計算値と実験値との差が小さく出るべきことを物語ってはいるが, 実験値(黒点)は非線形要素が飽和特性のこの場合でも理論値の側に近く出るべきと考えられる. 第15図の結果が生じた原因は何であろうか. (森 政弘)

〔回答〕 この分野の実験的研究は, 特に測定関係に未解決の問題が多々あり, 目下盛んに研究が行なわれているようである. 本実験においても

(1) 雑音発生器から得られる不規則信号の定常性

(2) 第14図に示した測定回路のうち, 特に線形検波器→増幅, 振幅制限器→計数回路の Q 値, その他の静特性, 動特性

がさしあたって大きな問題となる. (1) に関しては不規則信号の定常性はだいたい確立されているが, (2) については特にこの部分の Q 値が不良であったように思う. この値は回路の積分性に大いに寄与し, この部分で更にガウス分布に近くなったように思われる. 更にもう一つ実験データの処理法に関し,

(3) 実験データはもちろん有限時間で区切られた長さをもち, これをサンプリングして, 度数分布を算するという手続きで処理されるが, その処理法に対する信頼性という第3の問題が横たわっている. この点については標本分布論から考察した一手法を確立し(答1), いちおうの理論的根拠をもって度数分布を算出する手続きが得られた. したがってこの方法により, その後改良を加えた実験装置により実験的検討を行なった結果, 第15図に比して, よりよいデータを得たので付図1として提出した.

〔質問〕 一般に非線形要素の線形化手法として, 入力 $y(t)$ に対する非線形要素の出力 $x(t)$ と等価線形系の出力 $x_1(t)$ との差の二乗平均値を最小にする規範として

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^\infty \kappa(\sigma) R_{yy}(\tau - \sigma) d\sigma \dots\dots\dots (a)$$

なる式が得られている(問1). ここで $y(t)$ がガウス分

(問1) Y. Sawaragi & N. Sugai, *Proc. 8th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* 1958 (1959), 469.

(答1) 榎木, 砂原, 添田, 第10回応用力学連合講演会論文抄録集, 第IV部(昭35-9-1), 25.

布に属するとすれば等価線形系の特性はゲインのみとなる. すなわち (a) 式において $\tau=0$ とおいて

$$\kappa = R_{yx}(0) / R_{yy}(0) \dots\dots\dots (b)$$

として計算した結果と一致する. すなわち (37) 式と一致する. しかし $y(t)$ がガウス分布に属しないとすれば, (a) 式からの計算結果と (b) 式からの計算結果は一致するであろうか. (a) 式の規範は出力の分散値だけでなく, 相関関数あるいはスペクトル密度の各値を最小二乗法の意味において最適に線形化する方法である.

(2) 第3図に示す制御系において, $z(t)$ が単純マルコフ過程であるとする仮定は非線形性が著しくなければ近似的に合理的と考えられるが, 第2図に示す制御系すなわち次数が高くなれば, かかる仮定は大きな誤りを導く結果とならないか.

第1表の各確率密度関数は k, k_1 の関数となっているが T の関数とはなっていない. これは物理的にみて不合理ではないか. たとえば (39) 式の ϕ_z は γ すなわち (32) 式より ϕ_V/kk_1a^2 のみの関数で T には independent になっているようであるが.

(3) 第7~10図の κ_n' 曲線は $k=k_1=1$ として表わしてあるが, k, k_1 の値によって変ってくるのか. もし変るとすれば $kk_1 < 1$ か $kk_1 > 1$ の場合, どちらの場合が κ_n 曲線に近づくのであろうか.

(菅井 斎喜)

〔回答〕 (1) まず, その出力 $y(t)$ が, 入力 $z(t)$ の現在瞬間値のみに関係するいわゆる Zero-memory 形の非線形要素の伝達特性を $y=f(z)$ とし, その $z>0$ に対する部分を, 特に $f_+(z)$ と表わすことにすると, $y(t)$ と $z(t)$ の間の相互相関関数は対称形伝達特性に対し

$$R_{yz}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{c_+} F_+(jw_1) dw_1 \times \int_{c_+} L_+(jw_2) \cdot \varphi_z(w_1, w_2; \tau) dw_2 \dots\dots\dots (A)$$

となる(答2). ただし上式で c_+, c_+' はそれぞれ w_1 平面, w_2 平面上で実軸に沿い原点を下方にさけて $-\infty$ から $+\infty$ にのびる積分路を表わし(答3), また $\varphi_z(w_1; w_2; \tau)$ は $z(t)$ および $z(t+\tau)$ に関する特性関数 (joint characteristic function), さらに $F_+(jw_1)$ は $f_+(z)$ の Laplace 変換の $s=jw_1$ における値, すなわち

$$F_+(jw_1) = \left[\int_0^\infty f(z) \exp(-sz) dz \right]_{s=jw_1} \dots\dots\dots (B)$$

(答2, 3) Y. Sawaragi & Y. Sunahara, *Tech. Reps. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ.*, VIII, 10 (昭33-10).

であり, $L_+(jw_2)$ は (B) 式において $f(z)=z$ なるとき, すなわち

$$L_+(jw_2)=\left[\int_0^\infty z \exp(-sz) dz\right]_{s=jw_2} \dots\dots\dots (C)$$

で表わされる(答4). $z(t)$ が非正規分布をなすとき, その二次元確率密度関数が

$$f(z_1, z_2; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k H_k(z_1, z_2) f_0(z_1, z_2; \tau) \dots\dots\dots (D)$$

で表わされるものとする(答5). ただし上式において, $z_1=z(t)$, $z_2=z(t+\tau)$ で, また

$$f_0(z_1, z_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\psi_{0z}^2 - \psi_{\tau z}^2}} \exp\left\{-\frac{\psi_{0z}(z_1^2+z_2^2)+2\psi_{\tau z}z_1z_2}{2(\psi_{0z}^2 - \psi_{\tau z}^2)}\right\} \dots\dots\dots (E)_1$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1+\rho)^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(z_1, z_2) \cdot f(z_1, z_2; \tau) dz_1 dz_2 \dots\dots\dots (E)_2$$

であり(答6), また $H_k(z_1, z_2)$ は二次元 Hermite 関数(答7)である. また (E)₁ 式において ψ_{0z} , $\psi_{\tau z}$ はそれぞれ $z(t)$ の分散, および自己相関関数, (E)₂ 式において $\rho=\psi_{\tau z}/\psi_{0z}$ である. (D) 式から特性関数は

$$\varphi_z(w_1, w_2; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \eta_k \varphi_0(w_1, w_2; \tau) \dots\dots\dots (F)$$

となる(答8). ただし

$$\left. \begin{aligned} \eta_k &= (jw_1 + jw_2)^k \\ \varphi_0 &= \exp\left\{-\frac{\psi_{0z}}{2}(w_1^2 + w_2^2) - \psi_{\tau z} w_1 w_2\right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (G)$$

である. (F) 式を (A) 式に代入して計算を進めるならば, 次の関係を得る(答9).

$$R_{yz}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{\psi_{\tau z}^n}{n!} L(n) N(n) + \sum_{n=0}^{\infty} c_2 \frac{\psi_{\tau z}^n}{n!} \left\{ L(n) N(n+2) + 2L(n+1) N(n+1) + L(n+2) N(n) \right\} + \dots\dots\dots (H)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} L(n) &= 1, \quad (n=1) \\ &= 0 \quad (n \neq 1) \\ N(2m) &= 0 \\ N(2m+1) &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{c_+} (jw)^{2m+1} F_+(jw) \exp\left(-\frac{\psi_{0z}}{2} w^2\right) dw \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I)_1$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I)_2$$

(H) 式は結局,

$$R_{yz}(\tau) = N(1) L(1) \psi_{\tau z} + 2c_2 N(1) L(1) + c_2 L(1) N(3) \dots\dots\dots (J)$$

となる.

さてここで (J) 式の c_2 は, (D) 式の二次元 Gram 級数の展開係数 $k=2$ に相当するが, 一次元 Gram 級数展開による確率分布の表現におけるように, 平均値零, 分散を 1 とすると, 二次元において $c_2=0$ となる.

したがって, (J) 式は

$$R_{yz}(\tau) = N(1) \psi_{\tau z} \dots\dots\dots (K)$$

となり, $N(1)$ を計算すれば等価ゲインが得られる⁽¹⁾. したがって (37) 式と (F) 式との計算結果は一致する.

(2) 線形要素が本論文の例の場合は, 仮定について誤りはない. Fokker-Planck の方程式も, この例ならびに他の二, 三の例については解が得られるが, 完全解か否か等の事項に関してなお検討すべき問題が多くあるようである. この場合の例の確率密度関数は T に対しては無関係になる. 理由ならびに多くの例についてこのような現象が認められるかどうかは目下検討中である.

(3), (39), (41) 式から γ を消去することによって, κ_n' が求められるので, κ_n' は k, k_1 の値には影響されない. 確率分布 $p(z)$ は k, k_1 等の値によって変る.

(答4) (答2) と同じ. (答5)~(答8) Y. Sunahara, *Statistical Studies of Non-Linear Control Systems Subjected to Random Inputs*, Thesis of Dr.-deg. Kyoto Univ., (昭 35-9).