539. 383:539. 374:621-233. 18

くさびの押しつぶれの一般的考察*

(第1報, 対称条件の場合の理論的考察)

進 藤 明 夫**

General Considerations on the Compression of
a Wedge by a Rigid Flat Die

(1st Report, Solutions in Symmetrical Condition)

by Akio SHINDO

In this report, the compression of a wedge by a rigid flat die when the initial condition is symmetrical has been investigated. Ten modes of deformation of the wedge are expected depending on the friction at the die surface and the thickness of the wedge but the complete solutions have been obtained for seven modes of them.

Some considerations have been made on the extremum principle taking into account the energy dissipation at the frictional surface and applied to the kinematically admissible field to estimate the load in the modes for which the complete solution is unknown as yet. It seems that the kinematically admissible field which satisfies the stress boundary condition on the frictional surface gives the estimation of the load nearly that of the exact solution. It has been shown that the method to estimate a mean value of strain from the work of deformation is convenient.

1. ま え が き

前報⁽¹⁾ではくさびをなめらかな剛体平面で押しつぶす問題を考察したがくさび頂角の二等分線, 剛体平面の法線およびその運動方向の三者が一致する対称条件の場合のみを取扱った。本研究ではこの三者が異なる一般的な場合について剛体平面との接触面で摩擦が存在する場合をも考察する。しかし紙面の都合上本報は対称条件の場合についてのみ理論的に考察し, 非対称条件の場合および実験結果は後報にゆずる。本研究は衡器類, ひずみ計などに用いられるナイフエッジの強度と変形, 機械のベッド, テーブルなどのかどの部分の損傷, バイトの筋めのある機械仕上面のつや出し仕上における仕上面の変形と工具の押付け力, あるいはまた形削り盤などによる切削における削りはじめの現象などに直接適用されよう。また一般に接触面の真の接触面積, 摩擦や摩耗の現象などを理論的に考察する基礎としても意義を有するものと思われる。

前報では摩擦なし, 対称条件の場合に6種のすべり線場 a~f が得られることを示した。本研究において

も全く同じ記号を用いてすべり線場を区別する。

2. 摩擦なし, 対称条件の場合の完全解

前報第1図にすべり線場 a~f を示したが, このうち a, b は Hill⁽²⁾ によるものであり, f は Green⁽³⁾ によるものである。場 e 以外は塑性域における応力および速度の条件はすべて満足されているのでいわゆる部分解である。これらの場が正解であることを示すためには剛体域と考えている部分において降伏条件を破っていないこと, およびひずみ速度が0であることを示さなければならない。この点に対して前報では塑性域に隣接する部分に Hill⁽⁴⁾ の定理を適用して降伏条件を破っていないことを確認するにとどめた。ここでは Bishop⁽⁵⁾ の方法によって完全解を求めた。これを第1図に示す。この剛体域内の応力場は場 a, b, c については ϕ が同じであれば同じ形になるので (i) 図に $\phi=60^\circ$ の場合を三つ重ねて示した。場 a では点 B で直交する二つのすべり線 BDEC によってこれと CF 10, 11, 12 によって囲まれる場が確定する。さらにその外側に応力 0 の限界線まで応力場が拡張される。すなわち CF が直線であるため CFC は一様領域となり, FC と F 10, 11, 12 とから C 10, 11, 12 で限られる場が得られ, さらにその外側に無応力限界線

* 昭和35年4月1日 第37期通常総会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和34年11月30日。

** 正員, 神戸大学工学部(神戸市長田区水笠通1)。

C7K に至るまで場が拡張される。C7K の接線が鉛直になる点Kからはじまるこの応力場の主応力線 KI は応力の不連続線と考えることができ、IK より下側に降伏点より小さい圧縮応力を受ける柱が密接して並んでいると考えると、この柱群によってくさびにかかる荷重をささえることができる。これより外側のくさびの部分は無応力である。この応力場は Bishop⁽⁵⁾ が V 形切欠き引張試験片について求めたものと全く同一であって、このように考えた応力場 ACKIB はすべてくさび内に存在するので、場 a は完全解であることが確認された。

応力場の作図に当っては Hill⁽²⁾ や Prager, Hodge⁽⁶⁾ の著書にあるような数値積分法によると正確であるがかなり面倒であるから、ここでは Prager⁽⁷⁾ の示した幾何学的な作図法を用いた。この応力場の応力状態を Prager⁽⁷⁾ による応力面上に表現したものを (ii) 図に示した。ダッシュをつけてある同じ記号の点が応力場内の各点に対応している。そして対応する線は互に直交する方向にある。場 b, c についても同様な議論が成り立って完全解であることが確認される。くさび頂角

第1図 完全解の応力場

が大きく $\theta = \pi/2$ に達すると文献⁽⁵⁾の Fig. 7 の応力場と一致する。くさびの大きさが有限であってもくさび底面が IK に接するまでは変形の幾何学的相似が保たれる(くさび底面が側方への動きを拘束される場合には (i) 図の主応力線 CM に接するまで相似が保たれる)。このような幾何学的相似が成立する限界のくさび高さを求めると第2図に示すようになる。

場 d, e*, f においては第1図 (iii) に示すように、それぞれ水平線 CC を限界線とみることができ、AC を下に延長してできる柱 ECCE が一軸圧縮応力 $2k$ を受けてくさびにかかる荷重をささえることができる。したがって場 d, f は完全解、場 e* (前報では e' と書いた) は可容応力場であることが確認された。

つぎにこれらの応力場内の速度を Bishop, Green, Hill⁽⁶⁾ の方法によって考察しよう。たとえば場 b について考えると、KI とその両端 K に終る二つのすべり線 5, 8, 11, 11, 11, 8, K とに囲まれる領域では KI から下側が剛体で速度 0 であることから、それと適合してやはり剛体で速度 0 でなければならない。このような議論を繰返すことによって最初考えていたようにすべり線 DEC の下側はすべて剛体域であることが確認された。場 a ではさらに無応力限界線 CC の外側に剛体域が存在するので、CC 上でも速度 0 である。したがって領域 CFC, CFEE, EEDD, DDBB という順序に速度が 0 であることが示され、結局すべり線 BDEC の下側が剛体域である。場 c ではさらに AC 上でもその外側に剛体域があることから右半分においては AD より下側がすべて剛体域である。以上によって場 a, b, c いずれにおいても最初剛体域であると考えたところはすべてそうであることが確認された。場 d, e*, f においてはそれぞれすべり線 BC, DC, AC の下側が剛体域であることは明らかである。しかし θ が非常に小さいときは変形がある程度進んだところで座屈を生ずられるが、これについては別の機会にゆずる。

第2図

3. 加工硬化の影響

加工硬化材料の塑性変形を理論的に取扱うことは困難であるから以下に述べるような便宜的な方法が用いられ、実験的にそれらが妥当であることが裏付けられている。その第 1 の方法は直接適当な方法で塑性変形域の平均ひずみ量を計算し、これに等しいひずみを生ずるときの加工硬化材料の応力を降伏応力として用いるものであって、前報⁽¹⁾で既にそのような計算結果を示したが計算に誤りがあったので訂正して置く。

ただし、ここではいわゆる相当ひずみ $\bar{\epsilon}$ のかわりに $\epsilon = \sqrt{3}\bar{\epsilon}/2$ で与えられる量を計算する。これは平面ひずみ圧縮試験において得られるひずみ量であって、同じ平面ひずみ状態の問題を考察する場合には、このような ϵ は Mises, Tresca いずれの降伏条件に対しても同じ値になるので、加工硬化を求めるのに平面ひずみ圧縮試験によれば、用いた材料がいずれの降伏条件に従うのかは関係のないことになって便利である。このような計算の結果前報⁽¹⁾の (6・a), (7・a), (8・a) 式のかわりに

$$\epsilon = \cos \psi / (2 + 2 \sin \psi - \cos \psi) \quad \cdots \cdots (1 \cdot a)$$

$$\epsilon = (1 + \sin \psi) / (2 + 2 \sin \psi - \cos \psi) \quad \cdots \cdots (2 \cdot a)$$

$$\epsilon = (3 \cos \psi + \sin \psi - 1) / \sqrt{3} (1 + \sin \psi) \quad \cdots \cdots (3 \cdot a)$$

が得られる。同様に 場 b については前報の (6・b), (7・b) 式にかわって

$$\epsilon = \cos \psi / (4 + 5 \sin \psi - \cos \psi) \quad \cdots \cdots (1 \cdot b)$$

$$\epsilon = \{ \cos \psi / (4 + 5 \sin \psi - \cos \psi) \} + \{ \cos \psi / (1 + 2 \sin \psi) (3 + 2 \psi) \} \quad \cdots \cdots (2 \cdot b)$$

となり 場 c についてはそれぞれ (6・c), (7・c), (8・c) 式のかわりに

$$\epsilon = \cos \psi / (2 + 2 \sin \psi - \cos \psi + \tan \theta \cos \psi) \quad \cdots \cdots (1 \cdot c)$$

$$\epsilon = \{ 1 / (1 + \tan \theta) + \cos \psi / (2 + 2 \sin \psi - \cos \psi + \tan \theta \cos \psi) \} / 2 \quad \cdots \cdots (2 \cdot c)$$

$$\epsilon = (3 \cos \psi + \sin \psi - 1) / \{ \sin \psi + \sqrt{1 + (1 + \sin \psi)^2} \} \quad \cdots \cdots (3 \cdot c)$$

となる。場 d, e', f についてはそれぞれ

$$\epsilon = 1 \quad \cdots \cdots (3 \cdot d)$$

$$\epsilon = 1/2 (1 + \sqrt{\tan \theta}) \quad \cdots \cdots (1 \cdot e)'$$

$$\epsilon = 1 / \{ 2 \sqrt{\tan \theta} (1 + \sqrt{\tan \theta}) \} \quad \cdots \cdots (3 \cdot e)'$$

$$\epsilon = 1 / (1 + \tan \theta) \quad \cdots \cdots (3 \cdot f)$$

となる。ただし 場 e は正解がわからないので可容速度場 e' について計算した。

つぎに第 2 の方法としては塑性変形域 (過去にそうであった部分を含めて) の単位体積当りの塑性仕事を

計算し、これが加工硬化する材料において同じひずみを生ずるまでの塑性仕事に等しいとするものであって、一般に第 1 の方法に比べて便利である。くさびの単位長さを取り剛体平面の下降量が $c=1$ である場合について計算する。ここで取扱っている幾何学的相似の成り立つ問題では荷重 L は c に比例するので $c=1$ までの全仕事量は $L/2$ である。したがって塑性変形域 (過去にそうであった部分を含む) の面積を A とすると単位体積当りの仕事は

$$W = L/2A \quad \cdots \cdots (4)$$

である。一方平面ひずみ圧縮試験では

$$W = 2K\epsilon \quad \cdots \cdots (5)$$

で与えられる。したがって両者を等置して

$$\epsilon = (1/2A)(L/2k) \quad \cdots \cdots (6)$$

によって平均ひずみ量が与えられる。ゆえに (6) 式で求めた ϵ に等しい圧縮ひずみ (平面ひずみ圧縮試験における) に至るまでの圧縮応力の平均値が $2k$ に等しいと考えればよい。実験結果は後報にゆずりここでは 場 a~f について (6) 式を計算しておく。 $L/2k$ の値は既に前報で求めてあるので A を計算すればよい。このようにして得られた結果はつぎのようになる。

場 a,

$$\epsilon = (1 + \psi) \cos \psi / \{ (1 + \psi/2) (1 + \sin \psi) \} \quad \cdots \cdots (6 \cdot a)$$

場 b,

$$\epsilon = 2(1 + \psi) \cos \psi / \{ (3 + 2\psi) (1 + 2 \sin \psi) \} \quad \cdots \cdots (6 \cdot b)$$

場 c,

$$\epsilon = (1 + \psi) \cos \psi / [(1 + \psi/2) \{ \sin \psi + \sqrt{1 + (1 + \sin \psi)^2} \}] \quad \cdots \cdots (6 \cdot c)$$

場 d,

$$\epsilon = 1 \quad \cdots \cdots (6 \cdot d)$$

場 e',

$$\epsilon = 1 / \{ 2 \sqrt{\tan \theta} (1 + \sqrt{\tan \theta}) \} \quad \cdots \cdots (6 \cdot e)'$$

場 f,

$$\epsilon = 1 / (1 + \tan \theta) \quad \cdots \cdots (6 \cdot f)$$

場 e についてはやはり可容速度場について計算した。

以上の計算結果を第 3 図に示す。(6) 式は鎖線で示してあるが、(3) 式とほとんどまたは完全に一致する。このことから塑性仕事から求める方法は簡単でしかもよい結果を与えることは明らかである。いっぽうまた ψ が非常に大きくても扇形域を 1 本の不連続線で置換える方法は非常によい結果を与えるといえる。これに対して Hill ら⁽⁹⁾ がくさびの押し込みの問題において用いた式に相当する (1) 式はかなり近似が悪い。

第3図 平均ひずみ量

4. 対称条件で摩擦のある場合の すべり線場と荷重

この場合については場 c, f については既に前報⁽¹⁾で簡単に述べたが, ここではこれを含めてさらに詳細に考察しよう. 前報の場 b および e においては剛体平面との接触面に全く相対すべりがないので摩擦には無関係である. 残りの四つの場については第4図に示すようになる. 以下これらの場について考察する.

場 a 領域 DBD では降伏条件を破るのでこれは可容速度場ではない. 可容速度場ならば単に速度の境界条件を満たし, かつ連続でありさえすればよいので変形が左右対称でなく第4図(a)に示すように非対称であってもよい. そして β の値が左右でわずかに異なることもあり得るが, いちおうこれに等しいものとしても δ は $|\delta| < (\theta, \pi/4$ のうち小さいほう) なる範囲で任意に取り得る. この場は可容速度場に過ぎないから, これから直接荷重を計算することはできない. そしてこの可容速度場におけるくさびの変形と完全解におけるそれとは一致するという保証はないので厳密には極限定理も使えないのであるが, ここではいちおう近似的には上界を求められるものとして計算する. また簡単のため対称変形だけを考えて $\delta=0$ とする. そうすると $h_1=h_2=h$, $\psi_1=\psi_2=\psi$ となる. 前報と同様な手続きによって

$$\begin{aligned} h/c &= \tan(\psi - \beta) \\ &+ 1/\{\cos(\psi - \beta)(\sin \beta + \cot \beta)\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\psi - \beta) \\ &+ 1/[\cos(\psi - \beta)(\sin \beta + \cos \beta) \\ &\times \{2 + (\sin \beta + \cos \beta) \sin(\psi - \beta)\}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

が得られる. つぎに付録 (20) 式をこの場に適用すると

第4図

$$L(1 - \mu \cdot \overline{BK}) \leq \int \sigma_{ij}' \dot{\epsilon}_{ij}' dV + 2k \overline{OK} \cdot \overline{BDEC} \quad \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

となる. この右辺第1項は扇形域についてのみ計算すればよく $2k \cdot hc\psi$ に等しいことがわかる. また μ は後で場 c について説明するのと同じ考え方ができるものとして

$$\mu = \sin \beta \cos \beta / (\cos^2 \beta + \psi)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \cos 2\beta &= [-\mu^2(1+2\psi) \\ &+ \sqrt{1+\mu^2\{(1+2\psi)^2-1\}}]/(1+\mu^2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

によって β と関係づけられるものとする (9・a) 式から $c=1$ のとき

$$L/2k \leq 2h(\cos^2 \beta + \psi)/c \quad \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

が導き出される. ただし式中の h/c は (7・a) 式で与えられる.

この場では摩擦がないときの正解が前報でわかっている, その結果から付録 (18) 式を用いて上界を求めこともできる. 以後, 摩擦なしのときの諸量にはその右肩に $^\circ$ なる添字をつけて区別することにする. $\int F_i^\circ U_i dS_v$ なる項において積分域 S_v が摩擦なしのときの S_v° と異なるので理論的には不都合であるが, ここでは便宜上形が簡単になるように, 積分域を S_v° とする. Δu_i° は前報第1図 a の $\overline{BK}$ で与えられ $c=1$ に等しいので $\int F_i \Delta u_i^\circ dS_v = \mu L$ となる. したがって (18) 式から

$$L/2k \leq (L^\circ/2k) \{1/(1-\mu)\} \quad \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

によって上界が見積られる.

以上の議論は $\beta < \pi/4$ であって第 4 図 a の領域 A BD が存在する場合であるが, μ が (10) 式において $\beta = \pi/4$ において得られる値

$$\mu = 1/(1+2\psi) \dots\dots\dots (10)'$$

より大きいと領域 ABD は存在せず AD が直接剛体平面に接し, 接触面におけるせん断応力は μ の大きさに関係なく k に等しくなる. したがって μ に関係なく (7・a), (8・a), (11・a) 式において $\beta = \pi/4$ といった式

$$h/c = (1 + \sin \psi - \cos \psi) / (\sin \psi + \cos \psi) \dots\dots\dots (7 \cdot a)'$$

$$\tan \theta = (h/c) (1 + \sin \psi - \cos \psi) / (2 + \sin \psi - \cos \psi) \dots\dots\dots (8 \cdot a)'$$

$$L/2k \leq (h/c) (1 + 2\psi) \dots\dots\dots (11 \cdot a)'$$

が成り立つ. また (18) 式右辺第 2 項において F_i が k に等しくなると第 2 項は上述の μL ではなく μ に無関係に $k \int dS_V = 2k(h^0/c)$ となる. ゆえに (12・a) 式にかわって次式が得られる.

$$L/2k \leq (L^0/2k) (3 + 2\psi^0) / (2 + 2\psi^0) \dots\dots\dots (12 \cdot a)'$$

場 c 第 4 図(c)に示すようになるが, これは前報で示したように

$$2h/c = \tan(\psi - \beta) + \tan \theta + 1 / \{\cos(\psi - \beta)(\sin \beta + \cos \beta)\} \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

$$\tan \theta = [\sqrt{1 + \{1 + \sin(\psi - \beta)(\cos \beta + \sin \beta)\}^2} - 1] / \{(\cos \beta + \sin \beta) \cos(\psi - \beta)\} \dots\dots\dots (8 \cdot c)$$

となる. この場合は $\theta - \psi \geq \beta$ のときにのみ正解であってそのときの荷重は前報 (9) 式で与えられ, これは (11・a) 式と全く同形であって

$$L/2k = 2h(\cos^2 \beta + \psi)/c \dots\dots\dots (11 \cdot c)$$

と書ける. ただし式中の h/c には (7・c) 式を用いねばならない. この場合の摩擦係数 μ は第 4 図(c)の付図の Mohr の応力円から明らかなように点 AA' における比 $\tau/(-\sigma)$ で与えられるので (10) 式となる. $\theta - \psi < \beta$ となると可容速度場でしかないので場 a と同様にして上界を計算すれば当然 (11・c) 式に不等号をつけたものが得られることになる. またこの場合も $\mu = 0$ のときの正解がわかっているので (18) 式によって上界を求めることもできて (12・a) 式と全く同形の式を得る. ただし式中の $L^0/2k$ は場 c のものを用いる. この場合も μ が (10)' 式よりも大きいと接触面のせん断応力は k に等しくなり, 上の諸式で $\beta = \pi/4$ といった式が成り立つ. すなわち

$$2h/c = \{\sin \psi - \cos \psi + \sqrt{1 + (1 + \sin \psi - \cos \psi)^2}\} / (\sin \psi + \cos \psi) \dots\dots\dots (7 \cdot c)'$$

$$\tan \theta = \{\sqrt{1 + (1 + \sin \psi - \cos \psi)^2} - 1\} / (\sin \psi + \cos \psi) \dots\dots\dots (8 \cdot c)'$$

$$L/2k \leq (1 + 2\psi)h/c \dots\dots\dots (11 \cdot c)'$$

ただし (11・c)' 式中の h/c は (7・c)' 式で与えられる. また (12・c) 式にかわって (12・a)' 式と全く同形の式が得られる. ただし $L^0/2k$ は (12・c) 式と同じものを用いる.

場 d 第 4 図(d)に示すようになるが場 a と同様に点 B の近傍で降伏条件を破ることになって可容速度場に過ぎない. そして図に示すような左右非対称な場が考えられるが, ここでは簡単のため対称な場合, すなわち $\delta = 0$, $h_1 = h_2 = h$ なる場合のみを考えると

$$h/c = \tan \theta / [\cos^2 \beta \{1 - \tan \beta - (1 + \tan \beta) \tan \theta\}] \dots\dots\dots (7 \cdot d)$$

となり (11・a) 式を求めたのと同様な計算を行ない, この場合 (10) 式において $\psi = 0$ であるので $\mu = \tan \beta$ であることを用いると

$$L/2k \leq 2 \cos^2 \beta \cdot h/c = 2 \tan \theta / \{1 - \mu - (1 + \mu) \tan \theta\} \dots\dots\dots (11 \cdot d)$$

が得られる. (7・d), (11・d) 式から明らかなように $\mu \leq (1 - \tan \theta) / (1 + \tan \theta)$ でないとこの場は成立しないが, そのような場合には場 a が小さい $L/2k$ を与えて場 a の成立範囲になると考えられるので問題はない. したがってまた接触面でのせん断応力が k に達することはない.

この場合にも摩擦のないときの正解がわかっているので (18) 式によって上界を見積ることができる. 右辺第 1 項の積分域として便宜上 $\mu = 0$ のときの S_V を取ると

$$L/2k \leq (L^0/2k) / (1 - \mu) = 2 \tan \theta / \{(1 - \mu)(1 - \tan \theta)\} \dots\dots\dots (12 \cdot d)$$

が得られる. あるいはまた (18) 式において右辺第 2 項の F_i は k 以上にはなり得ないので, $F_i = k$ となる場合を考えると (12・d) 式のかわりに

$$L/2k \leq (L^0/2k) + h^0/c = (3/2)(L^0/2k) \dots\dots\dots (12 \cdot d)'$$

が得られる. $\mu > 1/3$ のときは (12・d) 式よりも (12・d)' 式のほうが小さい値を与える.

場 f 第 4 図(f)について場 d と全く同じ (7・d) 式が得られる. この場合は $\theta \geq \beta$ のときにのみ完全解となるが, いずれにしても (11・d) 式で $L/2k$ またはその上界が与えられることがわかる. そして $\mu \leq (1 - \tan \theta) / (1 + \tan \theta)$ であるときにのみ場が成立するが, そうでないときには当然場 c が成立するので問題ない. (18) 式を用いると (12・d), (12・d)' 式と全く同じ式が成り立つ. 場 c, f の境界および正解の成立範

囲については前報に示したとおりである。

5. 対称条件, 摩擦のあるときの完全解

この場合場 a, d は可容速度場しかわかっていないので検討できない。場 b, e* は摩擦の影響を受けないので, 第2節で述べたことがそのまま適用される。場 c, f に対して Bishop の方法⁽⁵⁾によって剛体域の応力場を求めると第5図のようになる。これは左右非対称となり, 剛体面との接触面上の摩擦係数は μ であるから限界線 KI の下側に考える柱は $\tan \beta' = \mu$ なる角度 β' だけ傾いていなければならない。したがって無応力限界線 CK は, この柱の方向に接するところまで取らねばならない点が摩擦のない場合と異なるだけである。場 f においてもくさびにかかる荷重をささえる柱 ECCE は AC の延長に一致し, したがって β だけ傾いている。これらの応力場は図の右側において A'C が A'N より内側にあれば作図可能である。したがって場 c では $\theta \geq \psi + \beta$, 場 f では $\theta \geq \beta$ であれば完全解である。これらの条件は前報で Hill の定理⁽⁴⁾を適用して求めた結果と一致している。

剛体域における速度については第2節で述べたのと全く同様の手続きによって最初剛体域であると考えたところが予想どおり速度 0 であることが確認される。場 f については θ が非常に小さいと曲げと座屈を考慮せねばなくなるが, これは別の機会にゆずる。

6. 対称条件, 摩擦のあるときの平均ひずみ量

平均ひずみ量を求めるのに上述のように二通りの方法が考えられるが, ここでは塑性仕事から求める方法による。場 b, e は摩擦の影響を受けないので第3節で述べた結果がそのまま適用される。正解がわかっていない場合には可容速度場について計算し, $L/2k$ の値としては第4節で求めた上界を用いることにする。

第 5 図

このようにして計算した ϵ を用いて加工硬化を考慮した上界を計算しても必ずしも上界を与えるという保証はないがやむを得ない。以下 $L/2k$ として (11) または (11)' 式を用いて (6) 式を計算した結果を示す。

場 a,

$$\epsilon = 2(\psi + \cos^2 \beta) \cos(\psi - \beta) / [\cos \beta \{2 + \psi(1 + \tan \beta)\} \times \{1 + \sin(\psi - \beta)(\cos \beta + \sin \beta)\}] \quad \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$\epsilon = (1 + 2\psi)(\sin \psi + \cos \psi) / 2(1 + \psi)(1 + \sin \psi - \cos \psi) \quad \dots\dots\dots (13 \cdot a)'$$

場 c,

$$\epsilon = \frac{2(\psi + \cos^2 \beta) \cos(\psi - \beta)}{\cos \beta \{2 + \psi(1 + \tan \beta)\} [\sin(\psi - \beta)(\cos \beta + \sin \beta) + \sqrt{1 + \{1 + \sin(\psi - \beta)(\cos \beta + \sin \beta)\}^2}]} \quad \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$\epsilon = (1 + 2\psi)(\sin \psi + \cos \psi) / [2(1 + \psi) \{ \sin \psi - \cos \psi + \sqrt{1 + (1 + \sin \psi - \cos \psi)^2} \}] \quad \dots\dots (13 \cdot c)'$$

場 d,

$$\epsilon = 1/(1 - \tan \beta) \quad \dots\dots\dots (13 \cdot d)$$

場 f,

$$\epsilon = 1/[1 - \tan \beta + (1 + \tan \beta) \tan \theta] \quad \dots\dots (13 \cdot f)$$

以上の各式の計算結果については紙面の都合上省略する。なお $L/2k$ として (12) または (12)' 式を用いることも考えられるがここでは省略する。

7. 荷重の比較および考察

第6図には (7) または (7)' 式で与えられる h/c を

第 6 図

示す。 $2h/c$ は付録で述べる積分域 S_V に等しいが、図から明かなように場 a , c の成立範囲では μ によって大きく相違しない。しかし $\mu=0$ のときが最大であるから (11・a), (11・c) または (11・a)', (11・c)' 式は上界であることを保証されない。そこでこれらの式中の h/c を $\mu=0$ のときの値 h^0/c で置きかえれば上界であることは間違いないであろうが、そうしなくても多分上界と考えてよいであろうし、また上界でないとしても第 6 図における h/c と h^0/c (これは $\mu=0$ のときの値) との相違よりは差が少ないであろう。ゆえに以下においては (11) または (11)' 式のままで考察する。(12・a), (12・c) または (12・a)', (12・c)' 式については事情が逆になってそのままで上界であろう

し、また h/c と h^0/c との差が少ないので変形後のくさびの外形の相違が原因で得られる上界が著しく過大になることはないと考えられる。

以上の議論は場 a では $\theta \geq 26^\circ 34'$, 場 c では $\theta \geq 22^\circ 30'$ なる範囲で成り立つのであって、この範囲の θ に対しては極限定理を使用しても実際上大きい誤りは生じないと考えてよい。そして $\mu=0$ のときには正解となることからだいたい正解に近い値が得られていると考えられる。これに対して場 a , d では $\theta < 24^\circ 41'$, 場 c , f では $\theta < 20^\circ 53'$ では h/c は $\mu=0$ のときの h^0/c が最小で μ が大きくなると h^0/c よりもずっと大きくなり、ある μ の値で極大となって後 $\beta=\pi/4$ のときの値 (7・a)', (7・c)' 式になる。したがってこの範囲では (11), (11)' 式は上界である

と考えてよからう。しかし h/c が大きいので正解よりもかなり大きい値になるかも知れない。(12・d), (12・d)' 式については事情は逆になって上界であることを保証されず、しかも h/c は h^0/c に比べて大きくなるので多分上界がないであろう。したがって θ が小さいときは (12・d), (12・d)' 式は用い得ない。

つぎに、場 a , d では $24^\circ 41' < \theta < 26^\circ 34'$, 場 c では $20^\circ 53' < \theta < 22^\circ 30'$ であるときには h/c は極大値を持つが、 $\beta=\pi/4$ のときのほうが最小となるので、(11) 式は μ の大きさによって上界であることを保証される場合とそうでない場合とがある。(11・a)', (11・c)' 式は上界であることを保証されないが、(11・d)' 式は逆に上界であることを保証される。第 7 図 a は (11・a), (11・d) および (11・a)' 式による $L/2k$ の上界を示す。 $\mu=0$ のときは前報で求めた正解となるが、 $\mu>0$ では上界である。しかしそれが常に保証されるわけではなく、上述のように μ および 0 の大きさによって事情が異なる。鎖線 $\psi=0$ は場 a , d の境界である。 μ が大きいと μ の大きさに関係なく (11・a)' 式で上界が与えられるようになる。第 7 図 c は (11・c), (11・f) 【これは上には示さなかったが (11・d) 式と同じ】 および (11・c)'

第 7 図

第 8 図

式の計算結果を示す。 $\theta = \beta$, $\theta - \psi = \beta$ が場 f, c が完全解である限界を与えるのでこれを鎖線で示した。これより下側の実線で示した部分は正解であり, 上側の破線の部分は上界である。この上界の部分については上述のように場 a, d におけると同様な議論が成り立つ。 $\psi = 0$ が場 c, f の境界となる。第8図には $\mu = 0$ のときの正解荷重 $L^\circ/2k$ と μ が存在するときの荷重またはその上界の $L/2k$ との比 $\eta = L/L^\circ$ を示す。第8図aにおいては実線は (11・a) または (11・d) 式に対応するものである。最も上側にある実線の曲線は (11・a)' 式に対応する。鎖線は (12・a), (12・d) または (12・a)', (12・d)' 式に対応する。これは $\mu < 1/3$ のときは θ に関係なく一定の値である。そして $\theta > 26^\circ 34'$ で μ が比較的大きいときには (12・a)' 式から明らかのように

$$\eta = \frac{3+2\psi^\circ}{2+2\psi^\circ}$$

で与えられる。実線の曲線のピークを結ぶ破線は $\psi = 0$ に対応し, 場 a, d の境界である。したがってこの曲線と $\theta = 26^\circ 34'$ を示す破線との間にある部分では基準とすべき $\mu = 0$ のときの場合 a が存在しないので, そのかわりに場 d の与える $L^\circ/2k$ を用いてある。したがって理論的にはこの部分の比較は妥当であるとはいえない。またこの図に示された上界については上述の議論を考慮に入れておかねばならない。第8図cにおいては

$$\theta = \beta, \theta - \psi = \beta$$

に対応する鎖線より下側の実線は (11・c), (11・f) 式でえられる正解荷重 $L/2k$ と $\mu = 0$ のときの正解荷重 $L^\circ/2k$ との比 $\eta = L/L^\circ$ を示す。破線の部分は同じ値であるが上界である部分である。しかしこれが上界でない可能性があるが, これについては既に述べた。 μ が大きいと (11・c)' 式に対応する図の最も上側の曲線と与えられるようになる。鎖線は第8図aと同様に (12・c), (12・f), (12・c)', (12・f)' 式 [これらは (12・a), (12・d), (12・a)', (12・d)' 式と全く同形である。] に対応する。これも $\theta > 22^\circ 30'$ で μ が比較的大きいとき以外は θ に無関係になる。この上界についても既に述べた議論を考慮に入れておかねばならない。そして特に (11・c), (11・f) 式が正解である範囲で (12・c), (12・f) 式と比較して明らかのように上に予想したとおり (12・c), (12・f) 式は上界となっていない。 θ, μ がともに大きいときには上界となっているが正解よりもかなり大きいものと予想される。このようなことから (18) 式から導出される (12) 式が有効に利用できるのは $\mu = 0$ のときの場合 a, c における ψ の値

ψ° が比較的小さい場合に限られるとみてよい。そこで (12・d), (12・f) または (12・d)', (12・f)' 式における h°/c を h/c に置きかえれば確かに上界であると考えられるが, そのようにしても得られる結果は (11・d), (11・f) 式または (11・a)', (11・c)' 式よりも大きいので無意味である。これに対して (11・c), (11・f) 式は限られた範囲では正解であるし, (11・a), (11・d) 式は全体的に (11・c), (11・f) 式に似た荷重を与えることからみて μ が非常に大きい場合以外はだいたい正解に近い値を見積っているものと考えられる。とくに第6図についての考察から予想された θ が小さいときには, 正解よりかなり大きい上界を与えるということは第8図cの正解部分の値からみて μ が非常に大きくない限りありそうにない。

以上の考察から第7図によって荷重を比較検討することはだいたい妥当であると思われる。第7図の荷重を比較すると μ が比較的小さくて, 場 c または f が完全解であるような場合には, これらの場の与える $L/2k$ は場 b または場 e (予想に過ぎないが) の与える $L/2k$ よりも小さいので, 当然場 c または f が生ずるものと思われる。また場 d の生ずる可能性もあるようである。 θ が大きいときには μ が非常に小さい場合を除いて場 c は生じ難く多分常に場 b (前報) が生ずるであろう。場 a は理論的に完全解が存在し得ないのかも知れない。 μ が比較的大きく $\theta < 14^\circ 02'$ のときには場 b は生じ得ないので場 e が生ずる可能性もある。あるいは場 f が生ずるかも知れない。一般に θ が小さいと場 d, e, f が生ずるのはほんの少しの変形の間だけで, 荷重がある限界値に達すると幾何学的相似でない非定常状態になって座屈が生ずるであろう。

また, ここでは紙面の都合で図を省略したが, μ が小さいときには $\theta = 90^\circ$ のときの ψ は μ に関係し, (7・a), (7・c) 式から明らかのように $\psi - \beta = \pi/2$ で与えられる。 μ が大きいと ψ は μ に関係なく (7・a)', (7・c)' 式で与えられる。この両者の境界は $\beta = \pi/4$ で与えられるので (10)' 式から $\mu = 0.1750$ のときである。すなわち $\mu < 0.1750$ では ψ の最大値は $\theta = 90^\circ$ のとき与えられるが, $\mu > 0.1750$ のときには接触面の摩擦応力が k に達することによって制限される。

8. 結 論

本報ではくさびの押しつぶれの問題において対称条件の場合のみを考察し, 剛体平面との接触面における摩擦の有無および θ の大きさによって10種類の変形様式が予想されることを示した。摩擦のないときには場 e 以外の5種の場合について, 摩擦のあるときには場

b, c, f について完全解を示し、幾何学的相似が保たれるくさびの限界寸法を求めた。そして摩擦のあるときの場合 c, f が完全解であるための条件は前報で求めたものに一致することを示した。このことから一般に剛塑性体の一部にのみ大きい塑性変形が生ずると予想されるような問題においては、剛体域内の応力場の吟味は Hill の定理⁽⁴⁾によって塑性変形域に隣接する部分についてのみ行なえば十分であるといえよう。

加工硬化の影響を考えるためには変形した部分の平均ひずみ量を求める必要があるが、これについては直接すべり線場から計算する方法と塑性仕事から計算する方法とを比較し、後者のほうが簡単でかつ妥当な値を与えることを示した。前者でも扇形域を 1 本の不連続線に置きかえると扇形域の中心角が非常に大きくても後者との一致は非常によいことがわかった。摩擦のあるときは後者によってのみ計算した。

摩擦接触面のあるときの極限定理について考察し、Drucker の下界を改善する (19) 式を得たが、これは実際上使用することはむずかしい。上界の改善は山田による (18) 式がある。これを用いて完全解のわかっていない場の荷重を見積ったが摩擦接触面における応力の境界条件を満足するような可容速度場について通常の形式の上界 (20) 式を用いるほうが正解に近い上界が得られるものと思われる。

今後の問題としては完全解がわかっていない場について完全解を求めることあるいは完全解があり得ないことを確認する方法を考えねばならない。また本研究で得た結論を実験的に確認する必要がある。さらに θ が小さい場合の座屈や曲げの問題およびくさびの大きさが有限であるときの非定常問題がある。非対称条件の場合については続報で述べる。

付録 摩擦接触面のあるときの極限定理について

摩擦接触面でエネルギー消費があるときの極限定理は Drucker⁽¹⁰⁾ によって示されたが、これは摩擦のあるときの外力のなす仕事は摩擦 0 のときのそれより大きく、摩擦が十分大きくて摩擦接触面で相対すべりが生じ得ないときのそれより小さいというものである。この定理から得られる上界は一般に正解よりもかなり大きいので、摩擦が比較的小さいときには実用的でない。

いま考えている物体表面の一部 S_F 上で外力 F_i^* が作用し、これによって生ずる応力を σ_{ij}^* とする。すなわちこれらはつりあい方程式 $\partial\sigma_{ij}^*/\partial x_j = 0$ 、および境界条件 $\sigma_{ij}^* l_j = F_i^*$ (S_F 上) を満足する。このよ

うな応力状態にある物体に仮想速度 u_i' を与えるときは仮想仕事の原理によって

$$\int \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}' dV = \int F_i^* u_i' dS \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。ただし左辺の積分は物体の体積全体、右辺の積分は物体の表面全体について取る。また $\dot{\epsilon}_{ij}'$ は u_i' から

$$2\dot{\epsilon}_{ij}' = \partial u_i' / \partial x_j + \partial u_j' / \partial x_i \quad \dots\dots\dots (15)$$

によって導出されるものとする。いま物体 V の表面 S のうち S_F 上で外力 F_i が与えられ、残りの S_V 上で速度 $u_i = U_i$ が与えられるとき、 S_V 上で摩擦がなくてエネルギー消費がないときの正解を $\sigma_{ij}^0, \dot{\epsilon}_{ij}^0$ 、摩擦があってエネルギー消費があるときの正解を $\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}$ とすると、この 4 者を組合わせて (14) 式を適用すると

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV + \int F_i^0 \Delta u_i^0 dS_V \\ = \int F_i^0 U_i dS_V + \int F_i u_i^0 dS_F \\ \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int F_i \Delta u_i dS_V \\ = \int F_i U_i dS_V + \int F_i u_i dS_F \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int F_i \Delta u_i dS_V \\ = \int F_i U_i dS_V + \int F_i u_i dS_F \\ \int \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int F_i^0 \Delta u_i dS_V \\ = \int F_i^0 U_i dS_V + \int F_i u_i dS_F \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

が得られる。そしてこの 4 式以外の組合せはない。ここでは S_V 上でのみ相対すべりがあるものとし、上式中の $\Delta u_i, \Delta u_i^0$ はそれぞれ S_V 上でエネルギー消費があるときと摩擦のないときとの正解における S_V 上での相対すべり速度である。(16) 式の 2 式の差を取って最大塑性仕事の原理を用いると

$$\begin{aligned} \int F_i U_i dS_V \leq \int F_i^0 U_i dS_V \\ + \int F_i \Delta u_i dS_V - \int F_i^0 \Delta u_i dS_V \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

が得られる⁽¹¹⁾。これによって上界が与えられるが、これを用いるには摩擦なしのときの正解がわかっていなければならない。同様に (17) 式からは

$$\begin{aligned} \int F_i U_i dS_V \geq \int F_i^0 U_i dS_V \\ + \int F_i \Delta u_i dS_V - \int F_i^0 \Delta u_i dS_V \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となり、これは下界を与える。これを用いるには摩擦面での相対すべり速度の正解を必要とするので適用範

囲は非常に制限される(右辺第1項だけなら Drucker に一致する)。

つぎに可応力場の諸量を * 印, 可容速度場の諸量を ' をつけて表わすことにすると, 通常の極限定理は摩擦面でのエネルギー消費の項を加えて

$$\begin{aligned} \int F_i^* U_i dS_V \leq \int F_i U_i dS_V \leq \int \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}' dV \\ - \int F_i u_i' dS_F + \int F_i' [u_i'] d\Sigma + \int F_i \Delta u_i' dS_V \\ \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる。ここで右辺第3項は速度の不連続面 Σ におけるエネルギー消費である。この式から $\Delta u_i'$ が存在する S_V 上での F_i が一定であることがわかっている場合にのみ直ちに荷重の上界を求められるが, F_i の分布が未知であると求められない。エネルギー消費のある接触面上で応力状態が降伏条件を満している場合には最大塑性仕事の原理から (20) 式右辺の最後の項は

$\int F_i' \Delta u_i' dS_V$ で置きかえてもよい。したがって (20) 式は摩擦のあるときの可容速度場さえわかればよいので適用に困ることは少ない。

山田の上界 (18) 式は上述のように適用が制限されることが多いが, このような場合, 工藤⁽¹²⁾ は S_V 上で Δu_i が大きいところほど接触圧力が小さいという仮定を設けて, (18) 式右辺第2項を積分形でなく接

触圧力および相対すべり速度の平均値の積の形で置きかえた。しかし工藤の方法は対応する摩擦係数が後でわかるいわば逆の方法であり, またその式の形から摩擦接触面はその面の法線方向にしか動かない平面またはその組合せである場合にのみ有効に適用できるものである。本研究で取扱う対称条件の場合は (18) 式を用い得るので工藤の方法による必要はなく, 続報で述べる非対称条件の場合には工藤の方法は用い得ないので, ここではこれについて立ち入った議論はしない。

文 献

- (1) 太田, 進藤, 福岡, 杉本, 機械学会論文集, 23, 127 (昭 32-3), 242.
- (2) R. Hill, *Mathematical Theory of Plasticity* (1950), 140, Oxford Press.
- (3) A.P. Green, *Phil. Mag.*, Ser. 7, 42 (1951), 365.
- (4) R. Hill, *J. Mech. Phys. Solids*, 2 (1954), 278.
- (5) J.F.W. Bishop, *J. Mech. Phys. Solids*, 2 (1953), 43.
- (6) W. Prager & P.G. Hodge, Jr., *Theory of perfectly plastic solids* (1951), § 22, 118, John Wiley.
- (7) W. Prager, *Trans. Roy. Inst. Tech.*, Nr. 65 (1953), Stockholm.
または *Probleme der Plastizitätstheorie* (1955), 71, Birkhäuser.
- (8) J.F.W. Bishop, A.P. Green, & R. Hill, *J. Mech. Phys. Solids*, 4 (1956), 256.
- (9) R. Hill, E.H. Lee, & S.J. Tupper, *Selected Government Research Reports*, 6 (1952), 17.
- (10) D.C. Drucker, *J. App. Mech.*, 21 (1954), 71.
- (11) 山田, 機械の研究, 10, 5 (昭 33), 621.
- (12) 工藤, 東京大学航空研究所集報, 1, 3 (昭 34), 212.

討

〔質問〕 従来いろいろな問題に対し提出されているすべり線解は実験から抽出した仮定に基くいけば半理論解であり, この便法は完全解の検討により裏付けられるべきである。このやっかいなしかも世界でも数少ない進藤氏の仕事に対し敬意を表し, 以下いくつかの点につき質問および意見を提出する。

(1) 第3節 (1・a) 式上で ϵ の使用により降伏条件にかかわらず $2k-\epsilon$ 曲線を用い得ると述べてあるが, そのためには硬化が相当ひずみの関数という仮定を明記する必要はないか。

(2) 平均ひずみのいろいろな方法による結果が異なった値になるのは, ある方法に省略が含まれているためであるか。また本問題のような場合には硬化および非硬化性材料の間で実際の平均ひずみは相当違わないか。

(3) 第4節 (10) 式で, β の選び方を上界最低の条件から求めることはできないか。

(4) 第6図について h/c の上界というのはどういう意味か。外力仕事率などについての上界と同じような意味であるか。

論

(5) 付録 (15), (16) 式の間, S_V 上で速度 $u_i = U_i$ が与えられると記されているが, 後の式から見て U_i は工具の速度であると思うが。

(6) 同 (20) 式は $\int F_i \Delta u_i' dS_V$ の上界を私の逆算法で求めれば, 私の式⁽¹²⁾よりも適用範囲が広く, かく上界を低下させ得るので興味深い。

(7) 一般的なことだが, 摩擦の存在は変形を対称にし, また加工硬化性の存在は考えられるいくつかの変形様式のうち, 変形領域最大のものが最低の加工力を与えるというようなことは言えないか。

(工藤英明)

〔回答〕 私の論文を詳細に御検討下さったことを深く感謝します。以下各項ごとにお答えします。

(1) ここでは第1の方法すなわち (1)~(3) 式を用いる場合は硬化を相当ひずみの関数と考え, 第2の方法すなわち (6) 式を用いる場合は硬化を塑性仕事の関数と考えている。このことは第3節の記述で明らかであろうと思う。

(2) 省略のためである。その内容については前

報⁽¹⁾第 6 節に述べたとおりである。ただその計算結果に誤りがあったので正しい結果を示しただけである。また前項とも関連するが、この場合要素の受けるひずみ増分の主方向が要素に対して回転するので相当ひずみの意義が明確でなくなるが、ここでは方向変化にかかわらず単にせん断ひずみの和を取っている。そしてその結果が塑性仕事から求めたものと良く一致している(第 3 図)。なお第 6 節では(11)式の $L/2k$ をそのまま用いたが、この中には摩擦仕事による部分が含まれており、これは加工硬化に関与しないと考えられるので差引くほうが合理的である。そうすると(13・a), (13・c) 式中の $\psi + \cos^2 \beta$ が $\psi + 1/(1 + \tan \beta)$ になり(13・d), (13・f) 式は右辺に $(1 + \mu^2)/(1 + \mu)$ を乗じたものになる。(13)' 式は変らない。更に $L/2k$ として(12)または(12)' 式を用いるときは摩擦部分を差引くと(6)式に一致し摩擦によって ϵ は変らないことになる。次に硬化材料の平均ひずみは実験的にしか求められないが、すべり線場解の塑性変形域よりも広い範囲にひずみが分布して平均ひずみが小さくなる。しかしこのことは速度の不連続線は速度の急変する遷移領域であって硬化材料ではこれが幅広くなることから当然である。したがって実験結果から平均ひずみを見積るには一般に速度が十分大きいところと小さいところとの中間の適当な位置に塑性境界線を考え、生じたひずみがすべてこの塑性境界内で生じたと考えるべきだと思う。なお本問題では剛体平面の近くの変形は実験と理論とでよく似ており⁽¹⁾(答 1), 荷重の大きさは上述のような平均ひずみに関係することおよび加工硬化を忠実に理論に取入れることが困難なため、剛塑性体に対する荷重を硬化材料の荷重の近似値として用いざるを得ないことから、本論文のような平均ひずみを硬化の評価の基準とするのが最も妥当であると思う。

(答 1) 進藤, 吉川, 井上, 関西支部第 35 期定時総会講演会前刷, 講演番号 403 (昭 35-3-18)。

(3) (7・a), (8・a) 式から明らかなように β を変数にすることは h/c を変数にするのと同様であり、これを上界最低の条件から決めるのがよく、またそのような変形が正解に近いのであろうと考えているが、その理論的証明は困難と思う。またこの場合 β だけを単独に決定できず(8・a)式が拘束条件となって ψ をも同時に決定せねばならないので計算も困難である。そこでさしあたりエネルギーの出入のある境界での境界条件をなるべく満足させて荷重の上界を求める方針を取っている。

(4) h/c の上界ではない。本問題には厳密には極限定理を使用できないのであるが、付録に示した各式の S_v はこの場合 $2h/c$ に等しいので、これを $\mu=0$ の正解のときと比較しておけば荷重の上界の妥当性についてだいたいの見当がつくと考えた。

(5) 確かに物体の速度 u_i ではなくて剛体平面の速度である。したがって「 S_v 上で速度 $u_i = U_i$ が……」とあるのを「 S_v 上では剛体に接してその剛体の速度 U_i が……」と訂正させていただく。なお(17), (18) 式の間で「 $\Delta u_i, \Delta u_i^\circ$ は……相対すべり速度である。」と書いてあるつぎに「すなわち S_v 上での物体の速度はそれぞれ $u_i = U_i - \Delta u_i, u_i^\circ = U_i - \Delta u_i^\circ$ である。」と追加すれば更に明確になると思う。

(6) そうすれば $\int F_i' \Delta u_i' dS_v$ で置換えるよりは低い上界になると思う。

(7) 対称条件の場合には当然摩擦のために変形が対称な形に近づく。また剛塑性体ではいずれの変形様式も生じ得るはずであるが、加工硬化する弾塑性体では特定の一つの変形様式だけが生ずると思う。実験結果では⁽¹⁾(答 1), その変形様式は加工硬化を考慮して荷重が最小になるものである。したがっていくつかの変形様式の与える荷重の理論値が等しい場合には、変形領域が大きいほど一般に平均ひずみが小さく加工力も小さいといえるであろう。

水力掘進機の能率が 20 倍

リモート・コントロール式で現在の採炭機の 20 倍の能率を有する沿層の水力採炭機がもっかうクライナのルガンスク地方の炭鉱で試験中である。モスクワ・ニュース紙の報道によれば、同機の採炭能力は 1 時間 100 t から 130 t であり、リモート・コントロール係員以外はぜんぜん人手を要せずに炭層の中だけを選んで

前進する。他の採炭機と異なり、この先端には強力な掘さく装置が 3 個ついている。削られた小粒の石炭は同機から噴出する水で流されてみぞの中をとおり、たまり場まで流れてきたときに水力押し上げ機によって地表に送られる。[S. Afric. Mining & Eng. J., 71, 3543(1960), 1695] (日本科学技術情報センター提供)