539, 383:539, 374:621-233, 18

くさびの押しつぶれの一般的考察*

(第2報, 非対称条件, 摩擦なしの場合の理論的考察)

進 藤 明 夫**

General Considerations on the Compression of
a Wedge by a Rigid Flat Die

(2nd Report, Solutions in Unsymmetrical Condition and with Smooth Die)

by Akio SHINDO

The load on and deformation of a wedge compressed by a smooth rigid flat die were investigated. Seven types of slip line field have been shown for the wedge which has any inclination to the die face. These fields are classified into three modes of deformation where

- (a) the material flows separately on the contact face,
- (b) dead metal zone is in contact with the die and
- (c) the material flows only on one side of the wedge.

Four of the seven fields are complete solution. The width of the contact face, load or its upper and lower limits and the mean strain of the wedge were compared with these modes of deformation, and it has been revealed that the mode (a) exists in a very narrow range of the inclination and thickness of the wedge and is hardly realized and that the load of the mode (b) is larger than that of mode (c) but as the mean strain is small, mode (b) will be realized rather than mode (c) when the inclination of wedge is small and thickness of wedge is moderately large and when the material is in the state of strain hardening.

1. ま え が き

本報ではなめらかな剛体平面によるくさびの押しつぶれを理論的に考察する。ただし前報⁽¹⁾⁽²⁾とは異なり, 剛体平面の運動方向, 法線方向およびくさび頂角の二等分線の3者が一致しない一般の場合(これを非対称条件と名付けた)を取扱う。これは第1図に示す三つのパラメータ θ_1 , θ_2 , α によって表現される。しかし剛体平面が完全になめらかであって摩擦力が0で

第1図

あるとしているので, 剛体平面の接線方向の速度成分の有無はすべり線場の形に影響を与えない。したがって $\alpha=0$ としても一般性は失なわれない。予想されるすべり線場の形状を第2図に示す。前報⁽¹⁾⁽²⁾と同様な記号によって

すべり線場を区別する。図中にはこれを単位線図であるとも考えて焦点の位置も示してある。以下これらのおおのこの場について解析する。

2. 塑性変形域におけるすべり線場と荷重

2.1 場 a (第2図 a) 剛体域 D_1BD_2 において降伏条件を破らないためには左右の扇形域 $A_1D_1E_1$ および $A_2D_2E_2$ と記すべきであるが以下同様な略記法を用いる) の中心角 ψ が等しくなければならないことは容易にわかる。点 C_1 が変形前のくさびの表面上にあるべきことから

$$\tan \theta_1 = \frac{(h_1/c)(1 + \sin \psi) \mp \tan \delta}{1 + (h_1/c) \cos \psi} \quad \dots\dots (1.a)$$

(添字および複号は同順に取る。以下同様の略記法を用いる) また焦点 H_1 は A_1C_1 上になければならないことから

$$h_1/c = \sec \psi + \tan \psi \pm \tan \delta \quad \dots\dots (2.a)$$

となる。したがって (1.a) 式は

$$\tan \theta_1 = \frac{(\sec \psi + \tan \psi)^2 \pm \tan \psi \tan \delta}{2 \sec \psi + \tan \psi \pm \tan \delta} \quad \dots\dots (3.a)$$

* 昭和35年3月18日 関西支部第35期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和35年7月8日.

** 正員, 神戸大学工学部 (神戸市長田区水篠通1).

と書ける.

前報⁽¹⁾第 1 図における場 a は $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $\delta = 0$,
場 c は $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $\delta = \theta$ なる特別な場合としてここ
に示した場 a に含まれることになる. しかし $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

のとき δ は (3・a) 式の両式を等置することによって
必ず $\delta = 0$ でなければならないので [$\delta = \theta$ なる特別
な場合には一方の塑性変形域は消滅するので (3・a)
式の一方はなくなる], 前報⁽¹⁾第 1 図 a, c の中間の

第 2 図

任意の場合は完全解とならない。いま考えている場 a においても θ_1, θ_2 が指定されると (3・a) 式によって ψ, δ の値は決定される。

この場 a の存在範囲は $\psi \geq 0$ でなければならないことと、分流点 B が焦点 K_2 を結ぶ線分 $K_1 K_2$ 上に存在し、その外側に出ることはない。したがって $|\delta| \leq \pi/4$ であることによって制限される。すなわち $|\delta| \leq \pi/4$ であれば完全解となるが、 $|\delta| > \pi/4$ であっても $-\theta_1 \leq \delta < \pi/4$ または $\pi/4 < \delta \leq \theta_2$ であれば速度の境界条件が満足されないだけであるから可容応力場ではある。

剛体平面の速度は OG で与えられるが、その剛体平面の法線方向の成分 $OB_1 = c$ を前報⁽¹⁾⁽²⁾と同様に変形の尺度として取る。剛体平面にかかる荷重は

$$P = 2k(1 + \psi)(h_1 + h_2)$$

で与えられるので $c = 1$ のとき (1・a) 式から

$$P/2k = 2(1 + \psi)(\sec \psi + \tan \psi) \dots \dots \dots (4 \cdot a)$$

となって、これは前報⁽¹⁾ (4) 式と全く同じである。剛体平面の運動方向の荷重成分 L は

$$L/2k = (P/2k) \cos \alpha \dots \dots \dots (5 \cdot a)$$

それに直角な方向の成分 Q は

$$Q/2k = (P/2k) \sin \alpha \dots \dots \dots (6 \cdot a)$$

で与えられる。

この場合も前報⁽²⁾と同様、極限定理を厳密には使用できないのであるが、この点についての考察は後述することにして極限定理を使用すると $-\theta_1 \leq \delta < \pi/4$ または $\pi/4 < \delta \leq \theta_2$ のときには (4・a), (5・a), (6・a) 式はそれぞれの荷重成分の下界を与えるものと考えられる。

2・2 場 b (第2図 b') この場は前報⁽¹⁾第1図 b と異なり、領域 $A_1 DA_2$ はつりあいが保たれていないし、また剛体域 $E_1 DE_2$ においては降伏条件を破っている。これらの条件が守られるのは $\psi_1 = \psi_2$ である場合に限るので、すべり線場の形は対称でなければならず、したがってくさび頂角の二等分線の方に剛体平面の法線方向が一致した場合にしか完全解となり得ない。しかし、この場は速度の境界条件は満たしているので、可容速度場であって實際上この場によって正解荷重に対する上界が求められると考えてよいであろう。

点 C_2 が変形前のくさびの表面上にあることから

$$\tan \theta_2 = \frac{(h/c)(1 + \tan \delta + 2 \sin \psi_2) + \tan \delta}{1 + 2(h/c) \cos \psi_2} \dots \dots \dots (1 \cdot b)$$

焦点 H_2 が $A_2 C_2$ 上になければならないことから、

$$\frac{h}{c} = \frac{1}{2 \cos \psi_2} + \frac{\tan \psi_2 \pm \tan \delta}{1 \mp \tan \delta} \dots \dots \dots (2 \cdot b)$$

あるいはこれから $\tan \delta$ を求めると

$$\left. \begin{aligned} \tan \delta &= \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a(a+c)}}{2a} \\ \text{ここで} \\ a &= \frac{1}{2} (\sec \psi_1 - \sec \psi_2) \\ b &= 2 + \tan \psi_1 + \tan \psi_2 \\ c &= \tan \psi_1 - \tan \psi_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3 \cdot b)$$

となる。

荷重の上界は前報⁽¹⁾ (5) 式を用いて

$$P/2k \leq (h/c) \{ (1 + \psi_1)(1 - \tan \delta) + (1 + \psi_2)(1 + \tan \delta) \} \dots \dots \dots (4 \cdot b)$$

2・3 場 c (第2図 c) 点 C が変形前のくさびの表面上に存在すべきことから

$$\tan \theta_1 = \frac{(2h/c)(1 + \sin \psi) - \tan \theta_2}{1 + (2h/c) \cos \psi} \dots \dots \dots (1 \cdot c)$$

焦点 H が AC 上にあるべきことから

$$2h/c = \sec \psi + \tan \psi + \tan \theta_2 \dots \dots \dots (2 \cdot c)$$

(2・c) 式を (1・c) 式に用いて

$$\tan \theta_1 = \{ (\sec \psi + \tan \psi)^2 + \tan \psi \tan \theta_2 \} / (2 \sec \psi + \tan \psi + \tan \theta_2) \dots \dots \dots (3 \cdot c)$$

となる。荷重は $P = 2k(1 + \psi) \cdot 2h$ で与えられるから $c = 1$ のとき (2・c) 式から

$$P/2k = (1 + \psi)(\sec \psi + \tan \psi + \tan \theta_2) \dots \dots \dots (4 \cdot c)$$

2・4 場 d (第2図 d) 点 C_2 が変形前のくさびの表面上にあるべきことから

$$h_2/c = (\tan \theta_2 \pm \tan \delta) / (1 - \tan \theta_2) \dots \dots \dots (2 \cdot d)$$

となる。 $c = 1$ のとき荷重は

$$P/2k = (h_1/c + h_2/c) \dots \dots \dots (4 \cdot d)$$

となる。 δ は $-\theta_1 \leq \delta \leq \theta_2$ (またはその大部分) の範囲で任意であるが、実際上は P を最小にするものが実現しよう。このような δ は一般に $-\theta_1 \leq \delta \leq \theta_2$ の中間にはなく場 f のほうが小さい荷重を与え、実現の可能性が大きい。ただし場 f の成立しない範囲では δ は θ_2 (または $-\theta_1$) に等しくなり得ず、第2図 d において F_1 が A_1 より左側にあるべきことから $F_1 B \geq A_1 B$ すなわち

$$1 + \tan \delta \geq h_1/c$$

したがって (2・d) 式を用いて

$$\tan \delta \leq \cot \theta_1 - 2 \dots \dots \dots (5 \cdot d)$$

となる。 δ が大きいほど $P/2k$ が小さく、したがって上式の等号の成立する場合が最も実現しやすい (δ が θ_2 に接近する場合について考えたが、 δ が $-\theta_1$ に近づくときは F_2 が A_2 より右にあるべきことから δ が制限される。この場合には上の各式において θ_1, θ_2

を交換し, δ の符号を変えた関係が成り立つ. しかしこのような場合は $\theta_2 < \theta_1$ のときにのみ問題となる).

対称条件の場合には前報⁽¹⁾ (4)' 式に示したように $P/2k$ は δ に無関係になって場 d から f までの中間の場も剛体平面が完全になめらかである限り等しく実現の可能性のあることになる. 対称, 非対称いずれの条件の場合においても場 a, c の中間の場は完全解ではあり得ないのに対して場 d, f の中間の場は完全解となるのは対照的である.

上述のように場 a では $\psi \geq 0$ でなければならず, (4-a) 式において $\psi=0$ とおくと $P/2k=2$ となるので, 場 d は $P/2k \leq 2$ なる範囲でのみ成り立つ. そこでいま (4-d) 式において $P/2k=2$ とおいて (5-d) 式の等号が成り立つものとする,

$$\cot \theta_1 = \cot \theta_2 + 4 \quad \dots\dots\dots (6 \cdot d)$$

となってこの (6-d) 式によって場 a, d の境界が与えられる. さらに場 f の成立範囲は (5-f) 式によって与えられるので結局場 d は (6-d), (5-f) 式の間の非常に狭い範囲でのみ実現し得るであろう. そしてもちろん (2-d) 式から明らかなように $\theta_{1/2} \leq \pi/4$ でなければならない.

2.5 場 e (第 2 図 e*, e') 前報第 1 図 e' に対応して第 2 図 e* も可容応力場である. 点 $C_{1/2}$ がくさびの表面上にあるべきことから,

$$\tan \theta_{1/2} = \{(h/c)(1 \mp \tan \delta) \mp \tan \delta\} / \{1 + 2(h/c)\} \quad \dots\dots\dots (1 \cdot e^*)$$

これを解いて

$$h/c = (\tan \theta_1 + \tan \theta_2) / \{2(1 - \tan \theta_1 - \tan \theta_2)\} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot e^*)$$

および

$$\tan \delta = (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) / (2 - \tan \theta_1 - \tan \theta_2) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot e^*)$$

となる. 極限定理から $c=1$ のとき

$$P/2k \geq (\tan \theta_1 + \tan \theta_2) / (1 - \tan \theta_1 - \tan \theta_2) \quad \dots\dots\dots (4 \cdot e^*)$$

この場においては $F_{1/2}$ が $\overline{A_1 A_2}$ の外側になければならない. F_2 が A_2 の右側にある条件は

$$\triangle O B J_2 \geq \triangle A_2 C_2 J_2$$

したがって

$$c(c+2h)(\tan \theta_2 - \tan \delta) \geq 2h^2(1 + \tan \delta)$$

である. これに (1-e*) 式を用いると

$$2h/c \leq (1 + \tan \delta) / (1 + \tan \delta)$$

となり, これに (2-e*), (3-e*) 式を用いて

$$\begin{aligned} & (\tan \theta_1 + \tan \theta_2) / (1 - \tan \theta_1 - \tan \theta_2) \\ & \leq (1 - \tan \theta_2) / (1 - \tan \theta_1) \end{aligned}$$

となるが (2-e*) 式から当然 $1 - \tan \theta_1 - \tan \theta_2 \geq 0$ でなければならないので

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta_1 & \leq 1 - \tan \theta_2 - \sqrt{\tan \theta_2} \\ \tan \theta_2 & \leq 1 - \tan \theta_1 - \sqrt{\tan \theta_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5 \cdot e^*)$$

が得られる.

つぎに第 2 図 e' に示す可容速度場において $h, \delta, \phi_1, \phi_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ なる 8 個のパラメータのうち, 点 $C_{1/2}$ が変形前のくさびの表面上にあることと焦点 $H_{1/2}$ が $A_{1/2} C_{1/2}$ 上にあることの四つの条件があるので, 4 個だけは自由に取れるが, 計算の簡単のため, ここではこの 4 個を $\psi_{1/2} = \pi/2, \varphi_{1/2} = \pi/4 \mp \delta$ とする. こうすれば得られる荷重の上界は大きくなるがやむを得ない. このように場を限定すると

$$\tan \theta_{1/2} = \frac{(h/c)(\tan \phi_{1/2} \mp \tan \delta) \mp \tan \delta}{(h/c)(1 + \tan \phi_{1/2}) + 1} \quad \dots\dots\dots (1 \cdot e)$$

$$h/c = (1 \pm \tan \delta) \tan \phi_{1/2} / \{(1 \mp \tan \delta)(1 + \tan \phi_{1/2})\} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot e)$$

これから

$$\left. \begin{aligned} \tan \delta & = (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) / (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \\ \alpha_{1/2} & = \sqrt{\tan \phi_{1/2}}, \quad \beta_{1/2} = \sqrt{1 + \tan \phi_{1/2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot e)$$

これを (2-e) 式に用いて

$$h/c = \alpha_1 \alpha_2 / (\beta_1 \beta_2) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot e)$$

となる. 前報⁽¹⁾ (5) 式から $c=1$ のとき

$$P/2k \leq \alpha_1 \alpha_2 (\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2) \quad \dots\dots\dots (4 \cdot e)$$

が得られる.

2.6 場 be (第 2 図 be') 場 e' では $\psi_{1/2}, \varphi_{1/2}$ を上述のように定めたので ϕ_2 が $\pi/2$ に等しくなると不連続線 $A_1 D C_2$ が無限に長くなって成立しない. ゆえに $\phi_2 \leq \pi/2$ でなければならない. そして $\theta_1 < \theta_2$ とすると ϕ_1 のほうはなおさら小さくしなければならない. しかも (4-e) 式から明らかなように $\phi_{1/2}$ が $\pi/2$ より小さくても $\pi/2$ に近くなると, 得られる上界は非常に大きくなって役に立たない. このような場合には第 2 図 b' のほうが小さい上界を与える. しかしここでは非対称条件のときを考えているので θ_1, θ_2 が小さくなるとき ϕ_1, ϕ_2 が同時に 0 になることはできない. したがって場 e' をもっと自由に考えるよりは, 場 b と e' との中間を埋める第 2 図 be' に示すような可容速度場を考えるほうが, 簡単でかつ得られる上界も小さくなるものと考えられる. この場の左半分は場 e', 右半分は場 b と同じであるから, (1-e), (1-b) 式から

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta_1 & = \frac{(h/c)(\tan \phi_1 - \tan \delta) - \tan \delta}{(h/c)(1 + \tan \phi_1) + 1}, \\ \tan \theta_2 & = \frac{(h/c)(1 + \tan \delta + 2 \sin \psi_2) + \tan \delta}{1 + 2(h/c) \cos \phi_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot be)$$

(2・e), (2・b) 式から

$$\begin{aligned} \frac{h}{c} &= \frac{(1+\tan\delta)\tan\phi_1}{(1-\tan\delta)(1+\tan\phi_1)} \\ &= \frac{1}{2}\sec\psi_2 + \frac{\tan\psi_2 - \tan\delta}{1+\tan\delta} \dots\dots\dots (2\cdot be) \end{aligned}$$

となる。(2・be) 式から

$$\left. \begin{aligned} \tan\delta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 + ac}}{a}, \\ a &= (1-2\cos\psi_2)(1+\tan\phi_1) + 2\cos\psi_2\tan\phi_1 \\ b &= (\sin\psi_2 + \cos\psi_2)(1+\tan\phi_1) + 2\cos\psi_2\tan\phi_1 \\ c &= (1+2\sin\psi_2)(1+\tan\phi_1) - 2\cos\psi_2\tan\phi_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3\cdot be)$$

となる。荷重の上界は $c=1$ のとき

$$\begin{aligned} P/2k \leq (h/c) \left\{ \frac{1}{2}(1+\tan\phi_1)(1-\tan\delta) \right. \\ \left. + (1+\psi_2)(1+\tan\delta) \right\} \dots\dots\dots (4\cdot be) \end{aligned}$$

で与えられる。

場 b において $\psi_1=0$ となると場 be' に一致し場 be' において $\psi_2=0$ となると場 e' に一致する。したがって常に $\phi_2 \leq \pi/4$ と考えてよい。

2.7 場 f (第2図 f) すでに 2.4 項で述べたように場 f は場 d の一つの特別な場合である。すなわち場 d において $\delta \rightarrow \theta_2$, $h_1 \rightarrow 2h$, $h_2 \rightarrow 0$ となった極限であるから (2・d), (4・d) 式から

$$\frac{2h}{c} = \frac{P}{2k} = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1} \dots\dots\dots (2\cdot f), (4\cdot f)$$

となる。(4・c) 式において $\psi=0$ とおけば $P/2k=1+\tan\theta_2$ であるから、場 f は (4・f) 式から

$$\cot\theta_1 \geq 2 + \tan\theta_2 \dots\dots\dots (5\cdot f)$$

なる範囲にある。そしてもちろん (2・f) 式から明らかなように $\theta_1 \leq \pi/4$ でなければならない。

3. 平均ひずみ量

前報⁽²⁾ 第3節で述べたように塑性変形域の単位面積当りの塑性仕事から平均ひずみ量 ϵ を計算し加工硬化の評価の基準とする。ここでは剛体平面の法線方向の速度 $c=1$ としているので前報⁽²⁾ (6) 式のかわりに

$$\epsilon = (P/2k)/2A$$

を計算すればよい。場 b, e, be では可容速度場によって A を求め、 $P/2k$ としては上界を用いることにする。以下おのおの場について ϵ を計算しよう。

場 a,

$$\epsilon = \frac{(1+\psi)(1+\sin\psi)}{\left(1+\frac{\psi}{2}\right)\cos\psi \left\{ \left(\frac{1+\sin\psi}{\cos\psi}\right)^2 + \tan^2\delta \right\}} \dots\dots\dots (7\cdot a)$$

場 b,

$$\epsilon = \frac{(1+\psi_1)(1-\tan\delta) + (1+\psi_2)(1+\tan\delta)}{2\frac{h}{c}(3+\psi_1+\psi_2)} \dots\dots\dots (7\cdot b)$$

場 c,

$$\epsilon = \frac{(1+\psi)}{\left(1+\frac{\psi}{2}\right)(\sec\psi + \tan\psi + \tan\theta_2)} \dots\dots (7\cdot c)$$

場 d, 面積 A の中には過去に塑性変形域内にあった材料からなる無応力域 $A\frac{1}{2}C\frac{1}{2}F\frac{1}{2}$ も含めねばならないので (4・d) 式を用いて

$$\epsilon = 1/[1 + \tan\delta \{(h_1-h_2)/(h_1+h_2)\}] \dots\dots (7\cdot d)$$

となる。あるいは (5・d) 式の等号が成り立つときは

$$\epsilon = 1/\left[1 + \frac{\cot\theta_2(\cot\theta_1-2)^2}{\cos\theta_1-2+\cot\theta_2}\right] \dots\dots\dots (7\cdot d)'$$

となる。

場 e,

$$\epsilon = \frac{1}{2}\beta_1^2\beta_2^2 \frac{(\beta_1\beta_2)/(\alpha_1\alpha_2)-1}{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2} \dots\dots\dots (7\cdot e)$$

場 be,

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{2}(1+\tan\phi_1)(1-\tan\delta) + (1+\psi_2)(1+\tan\delta)}{2\frac{h}{c}(2+\tan\phi_1+\psi_2)} \dots\dots\dots (7\cdot be)$$

場 f,

$$\epsilon = 1/(1+\tan\theta_2) \dots\dots\dots (7\cdot f)$$

(7・f) 式は θ_1 に無関係である。

4. 剛体域内の応力場

第2図のすべり線場の剛体域において降伏条件を破っていないかどうかを確かめるのに、このような問題では Hill の定理⁽³⁾を用いれば、実際上十分であることを前報⁽²⁾で示したが、本報では Bishop の方法⁽⁴⁾にしたがって応力場を作図した。これを第3図に示すが、これは前報⁽²⁾の第1図に示したものと全く同形式のものである。この応力場が作図できるので場 a は完全解であり、場 c は無応力限界線 ACK がくさび内にあれば、すなわち $\theta_2 \geq \psi$ であれば完全解である。第3図 a, c の応力場は ψ が同じであれば全く同形であるから、場 a においては左右の塑性域の大きさの比 h_1/h_2 が $|\delta| \leq \pi/4$ なる範囲で変動して生ずる一連の θ_1, θ_2 の組合せに対して、また場 c に対しては $\theta_2 \geq \psi$ なる範囲内でくさびの頂点 O が図に示す破線 OA 上を動いて生ずる一連の θ_1, θ_2 の組合せに対してすべて適用される。前報⁽²⁾ 第1図の対称条件の場合も当然この中に含まれている。

場 d, e*, f に対してはそれぞれ第 3 図 d, e*, f に示した $2h$ なる単純圧縮応力を受ける柱 ECDG (d), ECCE (e*), ECDE (f) を考えることができるので場 d, f は完全解であり, 場 e* は可容応力場であることが確認される. ただしいずれにおいても $\theta_2 \geq 0$ でなければならない. したがって θ_1, θ_2 のいずれかが負になるようなくさびの問題はここで論じた範囲外のことであって別に研究せねばならない.

以上の結果は Hill の定理⁽³⁾によっても直ちに得られる.

つぎに前報⁽²⁾で述べたのと同様に Bishop, Green, Hill の方法⁽⁵⁾によってこれらの応力場内は速度 0 であることが確認される. しかし場 d, e*, f において θ_1, θ_2 がともに小さいときには曲げまたは座屈を生ずる可能性がある. これについては別の機会にゆずる.

5. 計算結果および考察

5.1 計算結果 第 2, 3 節で求めた諸量の数値計算結果を第 4, 5, 6 図に θ_1 - θ_2 面上の等高線形で

第 3 図

(a)

(b)

(c)

第 4 図

示す。いずれにおいても $\theta_1 \leq \theta_2$ として計算してあるが、第4, 5, 6図(a)の場合aおよび第4, 5, 6図(b)においては $\theta_1 > \theta_2$ なる範囲では直線 $\theta_1 = \theta_2$ (AC または OA) に関して鏡像となる結果が得られることは明らかである。したがってこれらの図に示す $P/2k$ の値またはその上下界、接触面の幅 $2h/c$ または $(h_1 + h_2)/c$ および平均ひずみ量 ϵ の値の等高線はこの直線 $\theta_1 = \theta_2$ に直交しているし、またこの直線 $\theta_1 = \theta_2$ は $\delta = 0$ の線でもある。これに対して第4, 5, 6図(a)の場合a以外の部分および第4, 5, 6図(c)においては $\theta_1 > \theta_2$ では計算しないと値はわからないが、 $P/2k$ の値は明らかにここに計算した $\theta_1 < \theta_2$ なる場合よりも大きくなって、このような場合は実現し難く、上述の諸式において添字 1, 2 を交換した場合のほうが生ずるであろう。したがって結局すべての場合を通じて直線 OA を対線軸とする鏡像が、これらの図の右下半分にもあるものと考えてよい。ただし後者の場合には等高線は直線 OA 上で折れた形になる。以下これらの図について考察しよう。

5.2 変形様式について 第4図には $(h_1 + h_2)/c$ または $2h/c$ および δ の等高線を示す。第4図(a)は場 a, d における $(h_1 + h_2)/c$ および δ を示す。場 a は ACDFa なる範囲では正解であるが、 $\delta = 45^\circ$ の曲線 AFD および $\delta = \theta_2$ の曲線 AGD で限られる区域内では可容応力場であるので破線で示してある。ただし曲線 AGD 上では第4図(c)に全く一致する。したがってこの位置を第4図(c)上にも示してある。AGD より上側は場 c の成立範囲で、このように θ_1, θ_2 の相違のなはだしいときは場 a は生じないものと考えられる。つぎに OBCDEO なる範囲では場 d が成立し、 δ は任意の値を取り得るのであるが、第2・4項で述べたように $P/2k$ が最小になるような場合が実現しやすいと考えられるので、この場合について計算した結果が示してある。そうすると場 d が成立するのは BCD なる非常に狭い範囲となる。(5・d) 式から明かなように δ は θ_2 に無関係になるので、その等高線は θ_2 軸に平行になっている。残りの部分 OBDEO では場 f が生じて場 d は生じ難い。この部分は第4図(c)と全く同一であり、境界線 BD は第4図(c)の BC と全く一致する。DE すなわち $\delta = \theta_2 = 45^\circ$ の線より上の部分は場 d が成立せず場 f が成立する範囲である。結局、接触面上に分流点があって、くさび材料が左右に流れわかれるような変形様式は第4図(a)に線図を示した範囲(もちろんその鏡像を含む)に限られることになり、しかもそのうち OBDEO 内では実現の可能性はまずないといつてよい。 $(h_1 + h_2)/c$ はくさびが剛体平面に傾いて

当るほど小さい。これは第4図(b), (c)とは逆の傾向であるから、AFDGA なる可容応力場の範囲で $(h_1 + h_2)/c$ は多分正解のそれより小さいであろう。したがって第5図(a)に示したこの範囲における $P/2k$ の下界は事実下界になっているとみてよからう。なお前報⁽¹⁾ではこの図の直線 OC 上で場 d を考えたが、その場合当然 $\delta = 0$ とした。しかるにこの図の OC 上では $\delta = 0$ ではない。 $\theta_1 = \theta_2$ のときは荷重は δ に無関係であったので $\delta = 0$ としたのであるが、 $\theta_1 \neq \theta_2$ のときとのつながりからみれば $\theta_1 = \theta_2$ のときも $\delta \neq 0$ とするほうが自然である。

第4図(b)は場 b, be および e における $2h/c$ および δ を示す。いずれも $\theta_1 \neq \theta_2$ では可容速度場である。場の形が異なっているが曲線はほとんど連続した形になっている。くさびが傾くほど $2h/c$ は大きい。第4図(a)および(b)に2点鎖線で示した曲線 AKL はそれぞれにおける接触面の幅 $(h_1 + h_2)/c$ と $2h/c$ とが等しくなる位置を示し、場 a, d の成立範囲の大部分で場 b よりも接触面の幅が大きいことになる。OBC なる範囲は場 e' の、OBC* は場 e* の成立範囲である。場 e* に対する計算結果は破線で示してある。

第4図(c)に示す ABC および OBC なる区域はそれぞれ場 c および f に対応し、すべての θ_1, θ_2 の組合せに対してこれらの場が完全解を与える。図から明かなように、場 c では常にそして場 f でも頂角が比較的大きく、傾きが大きいくさびの場合にはくさびが傾くほど $2h/c$ が大きい、場 f で頂角が比較的小さいときは逆に小さくなる。場 c, f では δ は考えなくてよいが、しいていえば $\delta = \theta_2$ である。

5.3 荷重の比較 第5図(a)においてAFDGA なる範囲では場 a は可容応力場であるので $P/2k$ の下界の等高線を破線で示してある。ただし AD 上では場 c の $P/2k$ の正解値に一致する。したがって AD の位置を第5図(c)上にも示してある。ACD なる範囲では場 a が正解を与え、OBCDE なる範囲は上述のように場 d が正解となるのであるが $P/2k$ が最小になる δ を取って計算してあるので BCD で場 d、OBDE では場 f となる。ところで第5図(a)および b を比較すると、これらの図に2点鎖線で示した曲線 AH 上で両者の値が一致し、AH より下側では場 b の与える $P/2k$ の上界のほうが場 a の正解または下界値よりも小さい。したがってこの範囲では場 a は実現しないと考える。結局場 a および d が実現し得るのは ABDA なる範囲から曲線 AH の下側を除いた範囲に限られる。しかもくさび頂角が比較的大きい範囲では $P/2k$ の下界と上界とを比較しているのであるから実際上やはり

実現性は少ないと考えられる。第 5 図 (a) によればくさびが傾いて当るほうが荷重が小さくなるので場 a, d は $\theta_1 = \theta_2$ であるよりはくさびが少し傾いたほうがより生じやすいと考えられることは興味がある。場 a, d の境界線 CD 上では $P/2k=2$ であって OBCDE なる範囲では $P/2k=(h_1+h_2)/c$ であるから曲線は第 4 図 (a) のものと一致する。また場 a においても $P/2k, (h_1+h_2)/c$ とともに ψ のみの関数として表わされるので等高線の形だけは同一である。

つぎに第 5 図(b)では直線 AB 上で場 b が正解であるほかはすべて可容速度場から求めた $P/2k$ の上界が示されている。OBC* なる範囲では場 e* による $P/2k$ の下界が示されている。これは第 4 図(b)における対応する $2h/c$ の値と等しい。そこでこの部分における可容速度場および可容応力場の $2h/c$ の値およびそれらによる $P/2k$ の上下界を比較すると $2h/c$ の差のほうが $P/2k$ の上下界の差よりもずっと大きい。このことから考えて上界は正解よりかなり大きいと予想され、正解は多分この上下界の間にあるものと考えてよいであろう。なおこれらの等高線がほとんど平行に近いので、この結論はくさびの傾きに関係なく当てはまるであろう。前報⁽¹⁾ではこの図の直線 OB 上において何らの考慮をすることなく極限定理を用いたが、ここに述べたことから不都合はなかったものと考えてよいであろう。OBC* なる範囲以外では可容応力場が求められていないので直線 AB の近くでは正解に近いと考えられるが、それから遠いところでは正解とどの程度離れているのかわからない。また、ここに得られた値が上界になっていると保証することもできないが、第 4, 5 図 (b), (c) を比べると $2h/c$ および $P/2k$ のいずれも直線 OA から離れるほど第 4, 5 図 (b) の値のほうが著しく大きくなっているので多分上界であってしかも正解よりかなり大きいであろう。また第 5 図(b)によればくさびが傾くほど $P/2k$ は大きくなっている。

第 5 図(c)は場 c, f の $P/2k$ の正解値が示してある。これは第 5 図 (a), (b) のいずれの値よりもすべての点で小さい値であって特に直線 OA から離れるほどその差は著しく、したがって場 c, f が最も生じやすくなると考えられる。なお第 5 図(b)と異なりくさびの傾きが比較的小さいときにはくさびが傾くほど荷重が小さく極小点があって、それを越えて傾きが大きくなると荷重は大きくなるのが著しい特徴である。

5.4 平均ひずみ量 ϵ 第 6 図(a)の AFDGA なる範囲では可容応力場しかわかっていないので ϵ を計算できないのであるが、いちおう可容応力場について計算した結果を破線で示した。場 a, d および f の部分

第 5 図

第 6 図

で等高線の形が著しく異なるが、いずれにしてもくさびが傾くほど ϵ は著しく小さくなる。このことからみても第 5.3 項で述べたようにくさびが少し傾くほうが場 a, d が生じやすくなると考えられる。前報⁽²⁾では場 d において $\delta=0$ のときを考えたので $\epsilon=1$ で一定であったが、この図の直線 OC 上では一定でなく B 点で $1/\sqrt{2}$ で最も小さくなっている。加工硬化が存在すれば当然ここで考えたような $\delta \neq 0$ の場合のほうが ϵ が小さいので実現しやすいと考えられる。また BC 上では第 5 図 (a), (c) の $P/2k$ の値が一致しているが ϵ のほうは第 6 図 (a), (c) の値が一致しない。

つぎに第 6 図 (b) では AB 上以外では可容速度場について計算した ϵ の値を示す。この ϵ は塑性仕事の上界を用いて計算してあるので当然正解値より大きいであろう。図から明らかなようにくさび頂角が比較的小さいときは ϵ はくさびの傾きにあまり関係しないで傾きが大きいほどやや大きくなる傾向があるが、これは多分上界を用いて計算したことの原因であろう。全体的にみれば第 6 図 (a), (c) に比べて ϵ が小さくなっているが O 点では ϵ は無限大となる。したがってこれらの図に 2 点鎖線で示した曲線 IJ より左側では第 6 図 (b) の ϵ が最も大きい。残りの部分では (a), (c), (b) の順に大きい。 $P/2k$ は第 5 図 (c) が最小であったので、加工硬化のある場合には OIJ の範囲では場 be または e が生ずる可能性はなく、場 f が必ず生ずるものと思われる。残りの範囲においては $P/2k$ は第 5 図 (b) のほうが(ただし上界であるが)(c) よりも大きい ϵ は逆に (b) のほうが小さいので加工硬化の程度によっていずれかの場が生ずるものと思われる。しかしだいたいの見当としてはくさび頂角が小さくくさびの傾きが大きいほど場 f のほうが場 b, be または e よりも生じやすくと考えられ、したがって場 be または e の実現性は加工硬化がかなり大きくても非常に少ないといえる。

第 6 図 (c) は場 c, f の ϵ の正解値を示す。場 f では ϵ は θ_1 に無関係なので等高線は水平な直線となる。場 c でも θ_1 の影響が比較的小さいが $\theta_2 > 45^\circ$ のときは ϵ は θ_1 に関して極大値を持つのが著しい特徴である。 OIJ なる範囲では第 6 図 (b) よりも ϵ が小さいがそれ以外では大きい。しかし第 6 図 (a) と比べれば小さい。 $P/2k$ も (a) よりも (c) のほうが小さかったので結局場 a および d の生ずる可能性は非常に少ない。

6. む す び

本報では完全になめらかな剛体平面によってくさびが押しつぶされる現象を理論的に考察した。くさびは剛体平面に対して任意の傾きを持つものとした。剛体

平面の運動方向も任意でよいのであるが、摩擦がないので法線方向に動くと考えても一般性を失なわない。

前報⁽¹⁾⁽²⁾で述べたのと同様な 6 種の場合を考えたが本報では条件が非対称であるため場 b と場 e の中間を埋める場 be を考えねばならないので 7 種となった。第 2 節ではこれらの 7 種の場合について考察し荷重またはその上下界を計算した。ただし 7 種の場合のうち b および be については可容速度場しかわからなかった。第 4 節では残りの 5 種の場合について剛体域における応力場を考察し、場 a, c, d および f はそれぞれ完全解であり、場 e* は可容応力場であることを確認した。ただし、くさびの傾きは $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ なる範囲にあるものとした。 θ_1, θ_2 いずれかが負になるときは曲げが生ずる可能性があるので別途に研究せねばならない。

第 3 節では塑性仕事から平均ひずみ量を計算した。

第 5 節では第 2, 3 節で求めた諸量の数値計算結果について考察した。それによれば場 a, d のようなくさび材料が左右に流れわかれる変形様式は存在範囲が非常にせまく、かつその範囲内でも実現性が少ない。場 b, be および e のような剛体平面にいわゆるデッドメタルの形で接触する変形様式は可容速度場しかわからないので存在範囲に限界があるのかどうかかわらな

い。場 e に対しては場 e* なる可容応力場が得られるので、これによって荷重の下界も計算した。場 c, f なる一方にくさび材料が流れる変形様式はすべてのくさびの範囲で完全解となった。そして荷重も他の 2 様式に比べて小さい。しかし平均ひずみ量は場 b のほうが小さいので加工硬化のあるときは、くさびの傾きが小さいときは場 b のほうが生じやすいと考えられる。結局全般的にみてくさび頂角が比較的小さく、くさびの傾きが大きいときは場 f, そうでないときは場 b が最も生じやすいであろう。

以上完全解のわからない場が多いので、得られた結論を実験的に裏付けるのがよいが、これは後報にゆずる。

文 献

- (1) 太田, 進藤, 福岡, 杉本, 機械学会論文集, 23, 127 (昭 32-3), 242.
- (2) 進藤, 本論文集, 447 ページ.
- (3) R. Hill, *J. Mech. Phys. Solids*, 2 (1954), 278.
- (4) J.F.W. Bishop, *J. Mech. Phys. Solids*, 2 (1953), 43.
- (5) J.F.W. Bishop, A.P. Green, & R. Hill, *J. Mech. Phys. Solids*, 4 (1956), 256.

半 導 体 研 究 振 興 会 設 置

民間企業、学界の共同出資による財団法人半導体研究振興会が、このほど仙台市東北大学付近に設立された。

これは、さきに黒川東北大学学長、永井東北大学電気通信研究所長、小池電気通信工学振興会理事長、内ヶ崎東北開発審議会長、永野富士製鉄社長の 5 名がかねて設立世話人代表として日立、東芝などの関係業界 16 社に働きかけていたところ、賛同を得て 6 600 万円の基金が整ったので、これをもとにして東北大学付近に 5 000 万円で 3 階建 (建坪 990 m²) を作る事になったものである。

そもそも、ダイオード、モロトロンクスなどいわゆる半導体に関する研究は学問的にも、製品的にも近年めざましいものがあり、わが国においてもその応用分野の拡大進展は日進月歩の勢いをみせ、このため各界の研究態勢の充実が急務となっている。

しかし、大学の施設やその付属研究所では一部門の定員、設備、研究課題には制限があって、産業界から

急激に特定部門だけの研究が要請されてもこれに応ずることが不可能で、その研究も大きく制限されて世界の進歩に立ちおくれるという心配があったものであるだけ、とくに今回の発足は各方面の注目を集めている。

さて、この研究財団は半導体工学および基礎電子工学の研究を行ない、とくに独創的な研究の育成促進と人材養成ならびにその援助をおもな目的とし、(1) 半導体工学および基礎電子工学の研究、(2) 独創的科学技術の育成、研究指導への協力、(3) 有為な研究者、技術者の養成ならびに養成援助、(4) 科学技術に関する研究調査の受託、文献の出版およびその援助、(5) 著者学者の招へいおよび学術研究者の海外派遣に対する援助、(6) この法人の所有する特許権維持、確保、外国特許の取得に対する援助などの各事業などを行なう。

なお、研究員は東北大学の関係教授が兼任するほか、専任の研究員を数名置き、当初はメーカから研究員を受入れ研究させる。 (服 部 敏 夫)