534. 121. 01 : 539. 384. 6

円筒かくの振動方程式について*

溝 口 孝 喜**

On Fundamental Differential Equations of
Vibrations of Cylindrical Shells

by Kōki MIZOGUCHI

In this paper, the fundamental differential equation of vibration of cylindrical shell in a single displacement is discussed on utilization of the fundamental differential equation of thin cylindrical shell for statical problem introduced by the present author.

This fundamental equation may be utilized to discuss the problems of general forced vibrations, of pressurized cylinders, or of vibrations of short wave length, etc.

1. 緒 言

円筒かくが微小変形の運動をしている場合の基礎微分方程式の誘導法およびその方程式から種々な特殊形態の振動のありさま、波長が小になった場合への拡張応用などを論じたもので、この方程式は筆者が前に求めた静力学の場合における基礎微分方程式を利用し、半径方向の変位のみを含む微分方程式として求められており、静力学の場合と同様一般強制振動の問題の取

扱いに有効に利用される。また、加圧円筒の振動、回転円筒の振動、小波長振動などの場合にも応用ができて最後の問題の応用例を5章のところに述べてある。

2. 基礎方程式の誘導

静的面内荷重が作用する場合の円筒かくの半径方向の変位に関する基礎微分方程式は筆者により次のように導かれている⁽¹⁾。

$$\begin{aligned}
 & A \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{4B}{a^2} \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \theta^2} + \frac{6C}{a^4} \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \theta^4} + \frac{8-2\nu^2}{a^4} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{6L}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
 & + \frac{4}{a^6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{a^8} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\
 & = \frac{1}{D} \left[A \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \frac{2U}{a^2} \frac{\partial^4 p}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{B}{a^4} \frac{\partial^4 p}{\partial \theta^4} \right] \\
 & + \frac{1}{D} \left[\frac{\nu A}{a} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{(1+\nu)(2-\nu)}{12(1-\nu)a} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial \theta^2} - \frac{V}{a^3} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{c} \right)^2 \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial \theta^4} \right] \\
 & - \frac{1}{D} \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial \theta} - \frac{(2+\nu)}{a^2} \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^2 \partial \theta^3} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial \theta^5} - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 q}{\partial \theta^3} \right] \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

ここで w は半径方向の変位、 a は半径、 h は厚さ、 ν はポアソン比、 p, f, q はそれぞれ半径方向、軸方向、円周方向の単位面積当りの静外力で、 D は板のたわみ剛性である。また

$$\left. \begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2, & B &= 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2, & C &= 1 + \frac{1-\nu^2}{72} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \\
 L &= 2(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 A, & U &= 1 + \frac{1+(1-\nu)^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2, & V &= 1 - \frac{\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

いま第1図を参照し、かくの微小運動の運動方程式を考えるに面素の回転慣性、横断せん断ひずみを無視すれば、その方程式は次のようになる。

* 昭和35年9月3日 第10回応用力学連合講演会において講演、原稿受付 昭和35年10月10日。

** 正員、大阪府立大学工学部（堺市百舌鳥梅町）。

$$\left. \begin{aligned} T_\theta + \left[\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho a h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a p_t, \quad a \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \theta} - \rho a h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a f_t = 0, \right. \\ \left. \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + a \frac{\partial S'}{\partial x} - N_\theta - \rho a h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a q_t = 0, \quad a \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - a N_\theta = 0, \right. \\ \left. \frac{\partial M}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} - a N_x = 0, \quad S' = S - M/a \right\} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

第 1 図

ここに p_t , f_t , q_t はそれぞれ半径方向, 軸方向 および円周方向のかく単位面積に対する動外力, ρ はかくの密度 (単位体積の質量) である. また内力およびモーメントとひずみとの関係は静力学の場合と同一であるから, 基礎微分方程式は (1) 式の右辺の p , f , q のかわりにそれぞれ

$$-\rho h \partial^2 w / \partial t^2 + p_t, \quad -\rho h \partial^2 u / \partial t^2 + f_t, \quad -\rho h \partial^2 v / \partial t^2 + q_t$$

とおけば得られる. いま (1) 式の左辺を $H(w)$ で表わせれば次のようになる.

$$\begin{aligned} H(w) = & -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2U}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{B}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] \\ & -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\nu A}{a} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(1+\nu)(2-\nu)}{12(1-\nu)a} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \theta^2} - \frac{V}{a^3} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} \right. \\ & + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)a^3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial \theta^4} \left. + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \theta} - \frac{(2+\nu)}{a^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right. \right. \\ & + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial \theta^3} + \frac{1}{12a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 v}{\partial \theta^5} - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \left. \right] \\ & + \frac{1}{D} \left[A \frac{\partial^4 p_t}{\partial x^4} + \dots \right] + \frac{1}{D} \left[\frac{\nu A}{a} \frac{\partial^3 f_t}{\partial x^3} + \dots \right] - \frac{1}{D} \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q_t}{\partial x^4 \partial \theta} - \dots \right] \dots\dots (4) \end{aligned}$$

(4) 式の最後の 3 項は (1) 式の右辺の p , f , q のかわりに, それぞれ p_t , f_t , q_t をおいた式を表わす.

筆者の前論文⁽²⁾において $u \sim w$ および $v \sim w$ の関係式は, その論文に求められたもの以外にも求められることを述べておいたが, これらは求める際取扱う式の順序を変更すればよく, したがって他に 2 種類求められる. そのうちの 1 種類は次のとおりである.

$$\begin{aligned} & \frac{\nu A}{a} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(1+\nu)(2-\nu)}{12(1-\nu)a} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \theta^2} - \frac{V}{a^3} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)a^3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial \theta^4} \\ & + \frac{h^2}{12} A \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[\frac{2(2-\nu)}{1-\nu} + \frac{(1+\nu)}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{(5-\nu)}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \theta^4} \\ & + \frac{(2-\nu)}{3(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{A}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{6(1-\nu)a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + \frac{1}{3(1-\nu)a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \\ & + \frac{1}{6(1-\nu)a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{h^2 A}{12D} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{B}{6(1-\nu)D} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{(2-\nu)h^2}{72(1-\nu)D} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial \theta} \\ & + \frac{1}{72(1-\nu)D} \left(\frac{h}{a} \right)^4 \frac{\partial^3 q}{\partial \theta^3} - \frac{1}{6(1-\nu)D} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \theta} - \frac{(2+\nu)}{a^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial \theta^3} + \frac{1}{12a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 v}{\partial \theta^5} \\ & - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{a^2}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - \frac{2(1+\nu)}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{(5-\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} \\ & - \frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \theta^4} - \frac{1}{12a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{h^2}{6(1-\nu)D} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{12D} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)aD} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

(5), (6) 式の右辺の p , f , q にそれぞれ $-\rho h \partial^2 w / \partial t^2 + p_t$, $-\rho h \partial^2 u / \partial t^2 + f_t$, $-\rho h \partial^2 v / \partial t^2 + q_t$ を代入し, さらに平衡式 (3) の第 1 式を変位で表わした式

$$\begin{aligned} & \frac{12\nu}{ah^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(2-\nu)}{a^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \frac{12}{a^2 h^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{12}{a^2 h^2} w \\ & = \frac{1}{D} \left[-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_t \right] \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

を利用すると (4) 式の右辺はすべて w で表わされ基礎微分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} H(w) = & \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{h^2}{6} \left\{ \frac{3-\nu}{2(1-\nu)} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ & + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left\{ \frac{3(3-\nu)}{1-\nu} + \frac{(1+\nu)}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \left\{ 3+2\nu + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & - \frac{2}{a^2} \left\{ 1 - \frac{2-\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{3-\nu}{4(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \theta^4} + \frac{1}{a^4} \left\{ 1 + \frac{1}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \\ & \times \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^4} \left\{ 1 - \frac{3+\nu}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{3-\nu}{12(1-\nu)a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} \Big] \\ & + \frac{\rho^2 h^4}{6(1-\nu)D^2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left[\left\{ \frac{3-\nu}{2} + \frac{(1-\nu)}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{3-\nu}{2} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \\ & - \frac{h^2}{12} \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right\} - \frac{w}{a^2} \Big] - \frac{\rho^3 h^7}{72(1-\nu)D^3} \frac{\partial^6 w}{\partial t^6} \\ & - \frac{\rho h^3}{6(1-\nu)D^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left\{ \frac{3-\nu}{2} + \frac{(1-\nu)}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{3-\nu}{2} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 p_t}{\partial \theta^2} \right] \\ & + \frac{\rho^2 h^6}{72(1-\nu)D^3} \frac{\partial^4 p_t}{\partial t^4} + \frac{\rho h^3}{6(1-\nu)D^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{(2-\nu)}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^3 q_t}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{12a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^3 q_t}{\partial \theta^3} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial q_t}{\partial \theta} \right] \\ & - \frac{\nu \rho h^3}{6(1-\nu)aD^2} \frac{\partial^3 f_t}{\partial x \partial t^2} + \frac{1}{D} \left[A \frac{\partial^4 p_t}{\partial x^4} + \dots \right] + \frac{1}{D} \left[\frac{\nu A}{a} \frac{\partial^3 f_t}{\partial x^3} + \dots \right] \\ & - \frac{1}{D} \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q_t}{\partial x^4 \partial \theta} - \dots \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

(8) 式が変位 w に関する基礎微分方程式で、(1) 式が静力学の問題を解く場合有効な利器となった⁽³⁾と同様この式は一般強制振動の問題を解くのに有効に利用される。また加圧円筒の振動、回転円筒の振動などの問題にも有効である。

(8) 式を微小変形の振動に応用し、振動が

$$w = \alpha \cos \frac{\mu x}{a} \cos m\theta \cdot \cos pt \dots\dots\dots (9)$$

のような規準形で表わされ、表面力がないとき振動数は

$$\Theta^6 - 6K\Theta^4 + 72(1-\nu)J\Theta^2 - 72(1-\nu)I = 0 \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。ただし

$$\begin{aligned} \Theta^2 = & \frac{\rho a^2 h^3 p^2}{D} \\ K = & \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\mu^2 + m^2)^2 + 12 \right\} + \left\{ 3-\nu + \frac{1-\nu}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \mu^2 + \left\{ 3-\nu + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} m^2, \\ J = & \frac{1}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left\{ \frac{3-\nu}{2(1-\nu)} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \mu^6 + A\mu^4 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left\{ \frac{3(3-\nu)}{1-\nu} + \frac{(1+\nu)}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \mu^4 m^2 \\ & + \left\{ 3+2\nu + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \mu^2 + \left\{ 2 - \frac{2-\nu^2}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \mu^2 m^2 + \frac{3-\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^2 m^4 \\ & + \frac{3-\nu}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 m^6 + \left\{ 1 - \frac{3+\nu}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} m^4 + \left\{ 1 + \frac{1}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} m^2, \\ I = & 12(1-\nu^2)A\mu^4 + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[A\mu^8 + 4B\mu^6 m^2 + \{6Cm^4 - 2(4-\nu^2)m^2\} \mu^4 \right. \\ & \left. + 4m^2(m^2-1)^2 \mu^2 + m^4(m^2-1)^2 \right] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

3. 変位間の関係式

2章で述べた $u \sim w$ および $v \sim w$ の関係式中他の1種類は次のものである。

$$\begin{aligned} & \frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{(2+\nu)}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{12a^4} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \\ & - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)a}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + \frac{\nu(2-\nu)}{6(1-\nu)a} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & + \frac{(1+\nu)}{6(1-\nu)a} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)a^3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial \theta^4} + \frac{\nu}{6(1-\nu)a^3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \\ & + \frac{(2-\nu)h^2}{72(1-\nu)D} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{6(1-\nu)D} \left(\frac{h}{a}\right)^2 f + \frac{1}{72(1-\nu)D} \left(\frac{h}{a}\right)^4 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ & - \frac{(1+\nu)a}{12(1-\nu)D} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nu A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)(2-\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{V}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} \\ & - \frac{(1+\nu)h^2}{12(1-\nu)} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \theta} - \frac{(1+\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta^3} - \frac{\nu(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^5 w}{\partial \theta^5} \\ & - \frac{\nu}{6(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)D} q + \frac{(1+\nu)h^2}{12(1-\nu)D} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

(12), (13) 式にそれぞれ $p = -\rho h \partial^2 w / \partial t^2 + p_t$, $f = -\rho h \partial^2 u / \partial t^2 + f_t$, $q = -\rho h \partial^2 v / \partial t^2 + q_t$ とおけばこれらの関係を求めるに都合のよい関係式が得られる。

4. 特別の場合

(a) w が θ に無関係の場合 この場合 $q_t = 0$ で,

$$\begin{aligned} F \equiv & \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{a^2} \right\} - \frac{\rho^2 h^4}{12D^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ & + \frac{\rho h^3}{12D^2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial t^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2} - \frac{\nu}{aD} \frac{\partial f_t}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

とおくと (8) 式は

$$A \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\rho h^3}{6(1-\nu)D} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

このうち、軸対称振動は $F=0$ に相当し、(15) 式には表面力が零なる場合

$$w = \alpha \cos \frac{\mu x}{a} \cos pt, \quad u = \beta \sin \frac{\mu x}{a} \cos pt, \quad v = \gamma \theta \cdot \cos \frac{\mu x}{a} \cos pt \quad \dots\dots\dots(16)$$

なる形の振動が含まれ、 α, β, γ 間の関係は (12) 式および平衡式から定まり、その振動数は

$$\theta^2 = 6A(1-\nu)\mu^2 \quad \dots\dots\dots(17)$$

で与えられ、 x 方向の波動速度は $\sqrt{AG/\rho}$ で与えられる。これは軸方向の横波の速度と同一である。

(15) 式の解は (16) 式の形のものだけでなく

$$w = f\left(\frac{\mu}{a}x + pt\right), \quad u = \varphi\left(\frac{\mu x}{a} + pt\right), \quad v = \theta \cdot \psi\left(\frac{\mu x}{a} + pt\right) \quad \dots\dots\dots(18)$$

なる形の振動を含むが、これに対する研究は後の論文に譲ることにする。

(b) w が x に無関係の場合 この場合 $f_t = 0$ で,

$$\begin{aligned} \Phi \equiv & \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\rho a^2 h^3}{12D} \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^4 \partial t^2} - \frac{\rho a^4 h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho a^4 h B}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} \\ & - \frac{\rho^2 a^6 h^4}{12D^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{a^2 h^2}{12D} \frac{\partial^3 q_t}{\partial \theta^3} - \frac{a^4}{D} \frac{\partial q_t}{\partial \theta} - \frac{a^4 B}{D} \frac{\partial^2 p_t}{\partial \theta^2} + \frac{\rho a^6 h^3}{12D^2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

とおくと (8) 式は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\rho a^2 h^3}{6(1-\nu)D} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(20)$$

このうち、二次元ひずみとしての振動は $\Phi=0$ に相当し、(20) 式には表面力のない場合

$$w=\alpha \cos m\theta \cdot \cos pt, \quad u=\beta x \cdot \cos m\theta \cdot \cos pt, \quad v=\gamma \sin m\theta \cdot \cos pt \quad \cdots (21)$$

なる形の振動が含まれ、 α, β, γ 間の関係は (13) 式および平衡式から定まり、その振動数は

$$\Theta^2=6(1-\nu)m^2 \quad \cdots (22)$$

で与えられ、円周方向の波動速度は $\sqrt{G/\rho}$ で与えられる。これは円周方向の横波の速度と同一である。この場合も (a) の場合の (18) 式と同様 (21) 式の他にさらに一般的な形の解が存在する。

(c) 表面力がない場合で (8) 式は

$$w=\alpha \theta \cos \frac{\mu x}{a} \cos pt \quad \cdots (23)$$

なる形の解を有する。これに対する u, v は

$$u=\beta \theta \sin \frac{\mu x}{a} \cos pt, \quad v=\gamma \cos \frac{\mu x}{a} \cos pt \quad \cdots (24)$$

α, β, γ の間の関係は (12), (13) 式から求まる。(23) 式なる解を有するためには、その振動数は次式で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} \Theta^6 - \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + \left\{ 6(3-\nu) + 2(1-\nu) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \mu^2 + 12 \right] \Theta^4 \\ + 12(1-\nu) \left[\left\{ \frac{3-\nu}{2(1-\nu)} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + 6A\mu^4 + 6 \left\{ 3+2\nu + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \mu^2 \right] \Theta^2 \\ - 72(1-\nu)A \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^8 + 12(1-\nu^2)\mu^4 \right] = 0 \quad \cdots (25) \end{aligned}$$

(25) 式は次のように分解できる。

$$\left. \begin{aligned} \Theta^4 - \left\{ \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + 12\mu^2 + 12 \right\} \Theta^2 + 12 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + 144(1-\nu^2)\mu^2 = 0 \\ \Theta^2 - 6(1-\nu)A\mu^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots (25)'$$

(25)' 式の前者は軸対称振動の場合と同一となり、後者は $\alpha=\beta=0$ なる場合に相当し、軸方向に進む横波となる。

(d) 表面力がない場合で (8) 式は

$$w=\alpha x \cos m\theta \cdot \cos pt \quad \cdots (26)$$

なる形の解を有する。これに対する u, v は

$$u=\beta \cos m\theta \cdot \cos pt, \quad v=\gamma x \sin m\theta \cdot \cos pt \quad \cdots (27)$$

α, β, γ の間の関係は (12), (13) 式から求まる。(26) 式なる解を有するためには、その振動数は

$$\begin{aligned} \Theta^6 - \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 m^4 + \left\{ 6(3-\nu) + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} m^2 + 12 \right] \Theta^4 \\ + \left[6(3-\nu) \left(\frac{h}{a} \right)^2 m^6 + \left\{ 72(1-\nu) - 6(3+\nu) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} m^4 + 12 \left\{ 6(1-\nu) + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} m^2 \right] \Theta^2 \\ - 72(1-\nu) \left(\frac{h}{a} \right)^2 m^4 (m^2-1)^2 = 0 \quad \cdots (28) \end{aligned}$$

(28) 式は次のように分解できる。

$$\left. \begin{aligned} \Theta^4 - \left\{ \left(\frac{h}{a} \right)^2 m^4 + 12Bm^2 + 12 \right\} \Theta^2 + 12 \left(\frac{h}{a} \right)^2 m^2 (m^2-1)^2 = 0 \\ \Theta^2 - 6(1-\nu)m^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots (28)'$$

(28)' 式の前者は (b) に述べた二次元ひずみ振動の場合の振動周期と同一になり、後者の場合は $\alpha=\gamma=0$ に相当し円周方向に進む横波である。

ここで (c), (d) の場合の振動周期は、表面力のない (a), (b) の場合の周期と全く同一であることは注意を要するが、これは (23), (26) 式がそれぞれ (14), (15) 式および (19), (20) 式の解となりうることから当然であることがわかる。

二次元ひずみの振動数を決定する (28)' 式の第 1 式において m があまり大でなく $(a/h)^4$ 以上の項を無視すれば、

$$\left. \begin{aligned} \Theta^2 &= \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{m^2(m^2-1)^2}{m^2+1}, \\ \Theta^2 &= 12(m^2+1) + \frac{4\left(\frac{h}{a}\right)^2 m^4}{m^2+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

をうる。この初めのものはほとんど不伸張で、初めから不伸張変形として求めたものと一致している⁽⁴⁾。後のものは伸びが主で円周方向へ進む縦波に相当しており、その波動の速度 c は

$$c = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho} \left[\frac{m^2+1}{m^2} + \frac{\left(\frac{h}{a}\right)^2 m^2}{3(m^2+1)} \right]} \dots\dots\dots (30)$$

で与えられる。すなわち波動の進路は $1/a$ なる曲率を有するため、その速度は波長に無関係とならないことがわかる。しかしその影響はあまり大きくない。

(e) 表面力がない場合で (8) 式は

また次の解を有す。

$$w = \alpha \cdot x \cdot \theta \cdot \cos pt \dots\dots\dots (31)$$

これに対応する u , v は, (12), (13) 式から

$$u = -\alpha v a \theta \cos pt, \quad v = -\alpha x \cos pt \dots\dots\dots (32)$$

と求まり、その振動数は

$$\Theta^2 = 12 \dots\dots\dots (33)$$

で与えられる。

5. 短波長振動への応用

基礎微分方程式 (8) は古典理論の一種であるから、波長がかく厚に比し相当大きいときでないと応用できない。波長がかく厚に比しあまり大きくない場合は面

$$\left. \begin{aligned} f_1(u, v, w) + a D k \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial s} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial s} \right\} \right] &= 0 \\ f_2(u, v, w) &= 0, \quad f_3(u, v, w) \cong 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

ここに $f_1(u, v, w) = 0$, $f_2(u, v, w) = 0$, $f_3(u, v, w) = 0$ は補正を考えないときの半径方向、軸方向 および円周方向の平衡式を変位で表わしたものの、すなわち (35) 式の第1式の第2項は補正による付加項である。いま表面力のない場合を考え、補正の影響は波長の小さいときだけであることを考えれば、さらに

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial s} \cong -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots\dots (36)$$

(36) 式を (35) 式に代入すれば、その平衡方程式は表面力が存在し、補正を行なわない場合の平衡式の p_t , f_t , q_t にそれぞれ

$$p_t = D k \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \quad f_t = 0, \quad q_t = 0 \dots\dots\dots (37)$$

とおいたものになっている。したがって、補正を行なったときの自由振動の基礎微分方程式は (8) 式の右辺の p_t , f_t , q_t に (37) 式を代入したものとなる。

特別の場合として $a \rightarrow \infty$ の場合を考えると、この基礎式は初めから平板として解析した厳密解と一致している⁽⁶⁾。振動が (9) 式のような規準形で表わされる自由振動の場合は、その振動数は次式で与えられる。

$$\left[1 + \xi \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\mu^2 + m^2) \right] \Theta^6 - 6 \left[K + (3-\nu) \xi \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\mu^2 + m^2)^2 \right] \Theta^4 + 72(1-\nu) \left[J + \xi \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\mu^2 + m^2)^3 \right] \Theta^2 - 72(1-\nu) I = 0 \dots\dots\dots (38)$$

素の回転慣性、横断せん断ひずみを無視できなくなる。これらを考慮した厳密な理論ももちろん作りうるが、なほだ複雑となる。しかし基礎式 (8) を利用すると実用的な補正式は次のように割合簡単に求まる。この補正に対しては横断せん断ひずみの影響のほうが、回転慣性よりはるかに大きいので、まず横断せん断ひずみだけの補正を考える。

この補正を考えに入れても面内力 T_x , T_θ , S と変位との関係は何ら変りはなく、各モーメントと変位との関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D [\dots] + D k \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial N_\theta}{\partial s} \right] \\ M_\theta &= D [\dots] + D k \left[\frac{\partial N_\theta}{\partial s} + \nu \frac{\partial N_x}{\partial x} \right] \\ M = (1-\nu) D [\dots] + \frac{(1-\nu) D}{2} k \left[\frac{\partial N_\theta}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial s} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

ここに $D [\dots]$ は補正を考えないときの各モーメントを変位で表わしたものの、すなわち (34) 式の右辺の各第2項は横断せん断ひずみを考慮に入れたときの補正項を表わす。また $s = a\theta$ であり、 $k = h^2/5(1-\nu)D$ ⁽⁵⁾ である。

T_x , T_θ , S を変位で表わした式および (34) 式を平衡式 (3) に代入する(いまのところは回転慣性の影響は考慮に入れないので平衡式には変化がない)。また補正項の影響は波長の小なるとき、すなわち波長との関係が平板に近い状態のとき表われることを考慮すると各平衡式は次の形となる。

ここで Θ , K , J , I は (11) 式で与えられるものであり, $\xi = 1/5(1-\nu)$ である.

$(\mu^2 + m^2) \rightarrow \infty$ の極限の場合には 1 に対し $(h/a)^2$ を無視し,

$$\left. \begin{aligned} K &\rightarrow \frac{1}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\mu^2 + m^2)^2, \\ J &\rightarrow \frac{3-\nu}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\mu^2 + m^2)^3, \\ I &\rightarrow \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\mu^2 + m^2)^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

したがって, いま $\Theta^2 = (\mu^2 + m^2)x$ とおけば (38) 式は

$$\begin{aligned} \xi x^3 - [1 + 6(3-\nu)\xi]x^2 \\ + [6(3-\nu) + 72(1-\nu)\xi]x - 72(1-\nu) = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (40)$$

となり, これは次のように分解できる.

$$\xi x - 1 = 0, \quad x - 12 = 0, \quad x - 6(1-\nu) = 0 \dots\dots\dots (40)'$$

(40)' 式の後の二つは補正を行なわない場合と同一で初めのものは

$$\Theta^2 = 5(1-\nu)(\mu^2 + m^2) \dots\dots\dots (41)$$

で, これは $\mu=0$ または $m=0$ の場合それぞれ Rayleigh の表面波の波動速度を与え合理的となる.

(38) 式で $m=0$ なる特別の場合は次の 2 式に分解できる.

$$\begin{aligned} \left[1 + \xi \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^2 \right] \Theta^4 \\ - \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 (1 + 12\xi) \mu^4 + 12\mu^2 + 12 \right] \Theta^2 \\ + 12 \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + 12(1-\nu^2)\mu^2 \right] = 0 \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

および

$$\Theta^2 - 6(1-\nu)\mu^2 = 0 \dots\dots\dots (43)$$

これらの式はいずれも 1 に対し $(h/a)^2$ は省略してある. (42) 式が軸対称の場合を示し, (43) 式は 4 章 (a) で述べたと同様特殊な振動形を含む. (42) 式によって横軸に μ を取り, 縦軸に軸方向の波動速度に相当する値 Θ/μ を取り図示すると第 2 図の実線の

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{\Theta^2}{12} - \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\mu^4}{12} - 1}{\nu\mu}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{\Theta^2}{12} - \mu^2}{\nu\mu} \dots\dots\dots (44)$$

をうる. (44) 式から α , β を消去すればもちろん (42) 式に $\xi=0$ とおいた式, すなわち (25)' 式の第 1 式が得られる. この式を解けば

$$\begin{aligned} \Theta^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + 6\mu^2 + 6 \pm \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + 6\mu^2 + 6 \right\}^2 - 12 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 - 144(1-\nu^2)\mu^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + 6\mu^2 + 6 \pm \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 - 6\mu^2 + 6 \right\}^2 + 144\nu^2\mu^2} \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

(45) 式を (44) 式のたとえば第 2 式に代入すれば

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu^2} \right] \pm \frac{\mu}{\nu} \sqrt{\left\{ \frac{1}{24} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu^2} \right\}^2 + \frac{\nu^2}{\mu^2}} \dots\dots\dots (46)$$

第 2 図

ようになる. この図は $a/h=30$, $\nu=0.3$ の場合である. いま, 低波動速度のほうを第 1 形, 高波動速度のほうを第 2 形と呼べば, 第 2 形のほうは $\mu=0$ から $\mu \cong 2\sqrt{3} \cdot (a/h)$ 付近までは補正を行なったものもほとんど変化なく, その差は図上に示すことができないほど小さい. 第 1 形のほうは μ の値が 20 弱付近までは第 2 形と同様補正の影響はほとんどなく, この辺より μ が大きくなるとその影響がしだいに現われてくる. 図中点線は補正を行なわない第 1 形の Θ/μ を図示したものである. これらの結果は初めから軸対称振動として三次元の厳密理論として取扱ったもの⁽⁷⁾からの計算とよく一致している. ここで注意すべきは第 1 形, 第 2 形を上記のように定義したが

$$w = \alpha \cos \lambda x \cdot \cos pt, \quad u = \beta \sin \lambda x \cdot \cos pt, \quad v = 0$$

の形を取ったとき $|\alpha/\beta| > 1$ の場合をたわみ振動, $|\alpha/\beta| < 1$ の場合を縦振動と呼ぶことにすれば, たわみ振動は第 2 図において AC, C'D となり, 縦振動は BC', CE となる. これらの関係および C, C' の位置は次のようにして求まる. α , β の間の関係は (12) 式により求まるが, この場合は $\nu=0$ なる特別の場合であるから, その関係はむしろ (3) 式の第 1, 2 式を変位で表わした式を利用したほうが便利である. C, C' 付近では横断せん断ひずみの補正は必要がないので, これを行なわない式を用いると (3) 式の第 1, 2 式からそれぞれ

(46) 式をみれば $|\alpha/\beta|$ 値は第1項が正または負になるにしたがい $\oplus$ のほうが大となり, または $\ominus$ のほうが大となる. 第1項が零となるときこの両値は等しくなる. そのときの μ の値は十分な精度において $\mu=1$ なることがわかる. またそのときの θ^2 の値は (45) 式より $\theta^2=12\mu^2 \pm 12\nu\mu \cong 12(1 \pm \nu)$ で, そのときの θ/μ はしたがって $\nu=0.3$ のときそれぞれ 3.95 および 2.895 となる. これらが C および C' である. これらの関係は $\nu=0$ なる特別の場合を考えればさらによくわかる. この場合 (42) 式は次の二つの式に分けられる.

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \xi \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^2 & \theta^2 - \left\{ \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + 12 \right\} = 0 \\ \theta^2 - 12\mu^2 & = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)'$$

これらより

$$\left(\frac{\theta}{\mu} \right)^2 = \frac{\left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^2 + \frac{12}{\mu^2}}{1 + \xi \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^2}, \quad \left(\frac{\theta}{\mu} \right)^2 = 12 \dots\dots (47)$$

(47) 式の第1式が曲線 ACC'D に当り, 第2式が BC'CE に相当する. 第2式は初等理論による波長に無関係ないわゆる棒に対する波動速度を与える. しかしてこの場合第1式に対しては $\beta=0$ となり, 第2式

に対しては $\alpha=0$ となる ($\xi=0$ の場合).

以上は横断せん断ひずみの影響だけを考慮に入れたが, 回転慣性を考慮に入れた補正式も全く同様にして基礎式 (8) を利用して得られる.

6. 結 言

円筒かくが微小変形運動をしている場合における半径方向変位に関する基礎微分方程式を (8) 式のように求めた. この式は静力学の場合, その基礎式が実際問題を解く際有効に利用できたと同様, 各種強制振動の問題, 特殊形の振動, 加圧円筒, 回転円筒の振動, 小波長振動など広範囲に応用できる. その応用の一, 二例を 4, 5 章に述べておいた.

文 献

- (1) 溝口, 機械学会論文集, **20**, 95 (昭 29-7), 483.
- (2) 溝口, 同上, 485 ページ.
- (3) たとえば溝口, 同上論文; 溝口, 機械学会論文集, **21**, 107 (昭 30-7), 518; **23**, 135 (昭 32-11), 767; **24**, 139 (昭 33-3), 142; **25**, 159 (昭 34-11), 1172; **26**, 164 (昭 35-4), 544.
- (4) Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Edition, Cambridge, 513 ページ.
- (5) 湯浅, 材料力学 上巻 (昭 24-9), 170, 日本機械学会.
- (6) R.D. Mindlin, *J. Appl. Mech.*, **18** (1951), 31.
- (7) G. Herrman & I. Mirsky, *J. Appl. Mech.*, **23** (1956), 563.

酸素混合燃料で高能力の平炉

酸素混合の燃料を送入して平炉の生産能力を高める実験が, もっかミンガン州シアボーン市リバー・ルー・ジュ工場 (フォード自動車会社) で行なわれている. 今のところふつうの平炉方式の 2 倍の能力に達したといわれている.

この新方式を発明したのはペンシルバニア州アレントownのエア・プロダクツ社である. その特長は天然ガスと酸素との混合で燃焼が強くなって炉内の溶解時間を短縮する点にある. そのあとは燃料の補給だけを止めると, 酸素含有度が高くなって精錬時間が短縮される. 従来の平炉方式では温度が約 1870°C まで上がるが, 新方式では 2800°C まで上がる.

しかもこれは現在使用中の炉をほとんど改造しないでもできる.

新方式では酸素の使用量が増加するが, 鋼の生産高

の増加と燃料の節約がこれを相殺してなおあまりがある.

平炉の 1 時間当り鋼生産高は, 酸素を補給しない場合の 20~30 t に対して roof-lance を装置した場合は 30~45 t, LD 式の場合は 85~100 t である.

以上の差が生ずるのは消費する酸素の量の差に基づくものである. アメリカにおける roof-lance 式では酸素の消費量は 1 時間当り 20 000~40 000 ft³ であるが, LD 式は 150 000 ft³ 以上である.

現在フォードで使用している lance の酸素量は 1 時間当り, 50 000 ft³, 平炉の生産高は 60~100 t だから現在の LD 方式の生産高に近づいている.

[Iron & Coal, **181**, 4824 (1960), 1419] (日本科学技術情報センター提供)