当であれば、案内弁機構のゲインに関する限りは油の圧縮性を無視した解析の結果が相当な高周波領域まで適用できることがわかる。操作ピストンの変位波形は mQ が大きくなると第5図に示されるような加速がゆるやかで減速が急激な波形を示し、この点からも上記の実験における油の圧縮性の影響が少ないことが予想される。

6. 結 論

案内弁機構の操作ピストンの負荷が質量と摩擦のみからなる場合について、直線入力に対する応答の厳密解を求め、さらにこれの応用として階段入力、定速度入力、正弦波入力を与えたときの応答およびスプールに微小振動を与えた場合の案内弁機構の特性を解析した。この方法によれば非常に重負荷あるいは高周波の入力信号に対する応答をも解析しうる利点があるので、これを適用することにより特にスプールの摩擦軽減の目的で与える高周波の微小振動の影響を明らかにすることができた。この解析の方法の妥当性を確かめ

る目的で周波数応答試験を行ない、少なくともゲインに関する限りは油の圧縮性を無視した解析結果が、相当な高周波あるいは重負荷の場合でも実験結果と一致することが確かめられた。なおこれらの計算結果を用いて導いた等価伝達関数は、複雑な回路を構成する油圧サーボ機構の設計に際しても、その構成要素の特性表示として有用である。

終りに本研究に対して有益な御指導をいただいた京都大学 榎木教授に厚くお礼申し上げますとともに、計算ならびに実験に協力された京都大学 平山賢二氏、井野洋志氏をはじめ、京都大学工学部オートメーション研究実験所の学生諸君に感謝の意を表するものである。なお本研究の費用の一部は文部省科学研究費の補助によるものであることを記し、謝意を表するものである。

文 献

- (1) E.I. Reeves, *Trans. ASME*, **79**, 2 (1957), 427.
- (2) T. Sawamura & H. Hanafusa, *Proc. 8th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1958 (1959), 481.
- (3) 沢村, 花房, 乾, 制御工学, **3**, 2 (昭34), 77.

621-52 : 66-52

試 行 法 に よ る 一 入 力 系 の 最 適 化 制 御*

藤 井 省 三**

Optimalizing Control by a Cut-and-Try Method Applied to One-Variable System

by Seizō FUJII

In order to maintain the output (ex. efficiency) of any engineering system at a desired extreme value, in spite of natural changes in the environment of the system, it is necessary to apply optimalizing control.

Various methods for optimalizing control have been contrived by several investigators. The author proposes "a cut-and-try method" with an input move proportionate to the difference of output values before and after the preceding move.

In the present paper, the problems of stability and offset depending on the initial condition and parameters for the system with one input are analyzed in detail. Moreover, the author presents a method of designing the optimalizing controller which makes the output, starting with any initial condition, arrive near a desired extreme value in a shortest time with the least offset possible.

1. 緒 言

生産プロセスの出力たとえば効率あるいは収率など

を、各種の外乱のいかんにかかわらず、常に望ましい極値に保持するためには、最適化制御を適用する必要がある。たとえば、ボイラ効率を、消費蒸気量のいかんにかかわらず、常に最大値に保持するために、最適化制御を適用して、最適の空燃比をえらび出す場合がそのよい例である。

* 昭和34年11月19日 第2回自動制御連合講演会において講演, 原稿受付 昭和35年1月11日.

** 正員, 名古屋大学工学部 (名古屋市千種区不老町).

このような最適化制御系が、従来の最適化能力を有しない制御系と異なる一つの点は、目標というものに対する考え方にある。いずれの系も、フィードバック制御系であることは共通だが、後者は、制御量を、たとえば温度何度とか pH をいくつにとかというふうに、具体的な値（すなわち目標値）に一致させる動作を行なうのに対し、前者は、具体的な目標の値をもたず、単に出力を最大値あるいは最小値に保つという抽象的な目標しかあたえられていない。したがって、最適化制御系においては、各種の外乱の状態における出力の極値を探し出し、常にその近辺に出力を保持することが必要である。そのような極値検出の方法については、すでにいろいろなものが考案され⁽¹⁾⁽²⁾、筆者も、相関法について、さきに発表した⁽³⁾。

本論文では、比例ステップ式試行法を提案する。ここでいう、試行法とは、入力に階段状の変化を与えて制御対象の出力に極値をとらせる最適の入力の値を試行的に決定する方法である。この方法は、他の方法に比べて、応答速度はわるいが、制御装置が比較的簡単になり、また多入力最適化制御系にも拡張できる利点をもっている。ここで提案する比例ステップ式試行法は、その中でも、最も常識的な制御動作を行なうものである。すなわち、周期的に試行を行ない、試行前後の出力のサンプル値を比較して、次の入力の変化方向を、それら 2 個の出力のサンプル値の差の符号と、そのときの入力の変化方向とから決定し、その大きさを、その出力変化量に比例した値にとる制御方法である。このような試行法あるいは、もっと一般的な制御動作を行なう試行法による最適化制御系の理論的な解析および設計法についての論文は、まだ発表されていないようである。

そこで筆者は、その比例ステップ式試行法を、最適化する入力の一つである一入力系に適用する場合に、初期条件（すなわち、制御動作がはじまるとき、極値からどれだけはなれた位置から、どれだけの出力変化量でもって出発するかということ）、制御装置の比例感度および制御対象の静特性の形が、制御経過の安定性、オフセット（すなわち、極値からどれだけずれた位置に収束するかということ）および速応性（すなわち、極値に収束する速さ）にどのような影響を与えるかを理論的に解明し、次にどんな初期条件から出発しても、できる限りオフセットを小さくして、極値に最も早く収束させる制御装置の設計法についてのべる。

2. 記 号

本論文には、次の記号が用いられる。

K_p : 制御装置の比例感度, k : 制御対象の比例定数, N_a : 任意の入力比 x_0/x_m から出発したときの極値の近傍の、ある許容誤差 ϵ % 以内に収束するまでの試行回数, N : 特に入力比が 1, すなわち入力の最大値 x_m から出発するときの収束回数, n : 整数, T_s : サンプル周期, t : 時間, ϵ : 出力の最大値 y_m に対する許容誤差 %, x, y : 制御対象の無次元化された入・出力, x_m, y_m : 無次元化入, 出力の最大値, $x_{\min}, y_{\min}$: 無次元化出力が極値をとる x, y の値で、このときには、ともに零である. $x_0, \Delta y_0$: 無次元化された入力および出力変化量の初期値, x_n : 第 n 番めのサンプリング時刻 nT_s に加えられる無次元化入力値, $y_n: x_n$ に対応する出力 y の定常値（すなわち、 $(n+1)T_s$ 時刻の y の値), Δx_n : 無次元化入力 x の変化量 ($=x_{n-1}-x_n$), Δy_n : 無次元化出力 y の変化量 ($=y_{n-1}-y_n$), Δx_l : 無次元化入力 x の変化量の飽和値, x_∞ : 無次元化入力の収束値 ($=\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$),

x, y の記号において、肩に一つダッシュのついたものは、規格化された量を表わし、二つダッシュのついたものは、実際の量を示すものとする。これらの間には、 $y=x^2, x=K_p k x', y=K_p^2 k y', y'=k x'^2, y''=y_{\min}'+y', x''=x_{\min}'+x'$ などの関係がある。

3. 制 御 系 の 概 略

比例ステップ式試行法による制御経過のようすが第 1 図に、また、最適化制御装置の第 $(n+1)$ 番めのサンプリング時刻 $(n+1)T_s$ の直後の状態が第 2 図に示されている。第 1 図の左上の図は、制御対象の入力 x'' 、出力 y'' の間の関係、すなわち制御対象の静特性で、入力 x'' に対して、対象の出力 y'' に極値（この

第 1 図 比例ステップ式試行法による制御経過のようす

場合は最小値)が存在し、しかもその最小値は、外乱の大きさが、I, II, III と変るにしたがい変化することを示している。たとえば、それは、ボイラにおいて入力空燃比で、出力が燃料量、外乱が消費蒸気量の場合にだいたいあてはまる。さて、いま、外乱Iの状態の極値近傍で運転されているとき、第1図において、外乱が、Iの状態からIIIの状態に変化するとすれば、出力 y' は(この場合、入力 x' は不変であるとする) y_{-1}'' から y_0'' にへることになる。制御装置は、ある一定のサンプリング周期 T_s で動作し、出力 y' の検出装置、記憶装置および次の入力の増減を決定する増減判別器などをもっている(第2図参照)。そこで、まず出力 y_0'' と、それより1回前のサンプリング時刻の出力 y' の値 y_{-1}'' (記憶装置に記憶されている)と比較され、出力の変化量 $\Delta y_0'' (=y_{-1}'' - y_0'')$ を生ずる。したがって、その出力の変化量 $\Delta y_0''$ と、そのときの入力の値 x_0'' を初期条件として、新しい外乱の状態IIIにおける極値($x_{\min}''$, $y_{\min}''$)を探し出す制御動作がはじまることになる。

これ以後の制御経過の様子は第1図および第2図を参照して説明する。第 n 番めのサンプリング時刻 nT_s に、入力 x_n'' が加えられる。制御対象の過渡おくれが無視できる程度に、十分長い時間 T_s をへた後、すなわち $(n+1)T_s$ 時刻に、制御対象の出力の定常値 y_n'' が測定される。その出力の値 y_n'' は、1回前のサンプリング時刻の入力 x_{n-1}'' のときの出力の定常値 y_{n-1}'' (これは、記憶装置で記憶されている)と比較されて、出力の変化量 $\Delta y_n'' = y_{n-1}'' - y_n''$ を生ずる。次にその値 $\Delta y_n''$ が、 K_p 倍されて、 $K_p \Delta y_n''$ となる。次に、増減判別器で、この $K_p \Delta y_n''$ の符号すなわち入力の变化量 Δx_{n+1} の符号が、1回前のサンプリング時刻で決められた入力の变化量 $\Delta x_n''$ と現在の出力の変化量 $\Delta y_n''$ の符号に依存して第1表のように定められる。この表は、たとえば、入力をへらしたとき($\Delta x_n'' > 0$)、出力がへれば($\Delta y_n'' > 0$)、次の入力の变化量は、へらす方向に($\Delta x_{n+1}'' > 0$)加えられ、また、入力をへらしたときに($\Delta x_n'' > 0$)、出力がませば($\Delta y_n'' < 0$)、逆に次の入力の变化量は、ます方向に($\Delta x_{n+1}'' < 0$)

加えられることなどを意味している。

その符号をもった入力の变化量 $\Delta x_{n+1}''$ が、現在の入力 x_n'' からひかれて、次の入力 x_{n+1}'' が決定される。次の入力 x_{n+1}'' が決定されると、記憶装置内の y_{n-1}'' の値が消されて、現在の出力値 y_n'' が記憶される。

同様な制御動作が繰返されて、出力は、その外乱状態IIIの極値へと収束する。

さて、このような最適化制御系を解析的に取扱いやすくするために、制御対象の入・出力の静特性を、極値近傍で、二次曲線で近似を行なう。また、制御経過中の外乱の変化は、非常に少ないということを仮定して、その二次曲線を規格化する。すなわち、ある外乱状態における極値の入・出力の値(たとえば、 $x_{\min}''$, $y_{\min}''$)を新しい原点にえらび、その点に、入・出力の座標系を移動させる。新しい座標系の入・出力を x' , y' とすれば、実際の入・出力の x'' , y'' との間には、 $x'' = x' + x_{\min}''$, $y'' = y' + y_{\min}''$ の関係がある。このような座標系の移動を行なっても、制御の基本動作は、何ら影響をうけない。なぜならば、試行法による制御動作は、入・出力の変化量のみに依存し、入・出力の絶対値には依存していないからである。したがって、上記の仮定のもとでは規格化された制御対象について、制御経過の解析を行なえばよい。

4. 制 御 系 の 解 析

このような比例ステップ式試行法による最適化制御系では、その静特性だけを考慮する場合にも制御経過が安定であるか、極値からずれた値に収束して、オフセットを生ずることはいないか、また極値に収束する速さ、すなわち連応性をよくするには、どうすればよいかなどの問題がある。

最初に、制御経過の安定性の問題について論ずる。

4.1 安定性 比例感度 K_p の大きさによって、また、系そのものが非線形であることから、その初期条件(入力の初期値 x_0' と出力の変化量の初期値 $\Delta y_0'$)によって、制御経過の安定性が変化しないかという問題を考える。

実際に、それら初期条件のいかんによって、不安定な制御経過が存在するので

第 1 表

入力の变化量 $\Delta x_n''$ の符号	出力の変化量 $\Delta y_n''$ の符号	次の入力变化量 $\Delta x_{n+1}''$ の符号
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

第2図 第 $n+1$ 番めのサンプリング時刻 $(n+1)T_s$ の直後における比例ステップ式試行法による最適化制御装置の状態

あって、その一例が第3図(b)のような場合である。同図(a)は、安定な制御経過を示す例である(ここで、 $k=1$, $K_p=1$)。

さて、これらすべての安定、不安定条件をもとめることは、一般に複雑であるので、まず制御経過が安定になる比例感度 K_p 、および初期条件 (x_0', y_0') の領域をもとめる。その前に、後の解析に必要な基本的制御経過をもとめる。最初の試行が、いずれも入力 x' の正の側から、極値に向かって行なわれると仮定するとき、2回の試行によって生ずる制御経過には、次の三とおりの場合がある〔第4図の(1),(2),(3)参照〕。

(1)の制御経過は、入力 x' が、ある値 x_0' から出発したときに、次にとる入力 x_1' の値が、入力 x_0' と同じ側で、 x_0' よりも小さくなる場合である。したがって、次の試行は、 x_1' よりもさらに小さくなるように、

第3図 各種初期条件に対する制御経過の例

極値に向かって制御される。(2)の制御経過は、行き過ぎを生じて、入力 x_1' が入力 x_0' と逆の側にくる場合である。しかも、 x_1' の絶対値が、 x_0' よりも小さくなるので、その次の入力 x_2' は、極値からずれる方向に制御される。(3)の制御経過は、(2)と同様、行き過ぎを生じて、入力 x_1' が、入力 x_0' と逆の側にはいり、 x_1' の絶対値が x_0' よりも大きくなる場合である。したがって、次の試行は、入力 x_1' の位置から極値に近づくように、さきの x_0' から x_1' への操作方向と逆方向に制御される。

次に極値まわりで、振動を生ずるとき、入・出力の振動の振幅をもとめる。第5図に示すように、入力 x' が周期 $4T_s$ で振動するとき、前節で述べた制御動作原理より次の関係が成立する。

$$x_{n+1}' = x_n' - K_p \Delta y_n' \quad (1)$$

$$x_{n+2}' = x_{n+1}' - K_p \Delta y_{n+1}' \quad (2)$$

$$x_{n+3}' = x_{n+2}' + K_p |\Delta y_{n+2}'| \quad (3)$$

$$\text{ここで, } \Delta y_n' = kx_{n-1}^2 - kx_n^2$$

$$\text{一方, 振動条件より, } x_n' = -x_{n+2}' \quad (4)$$

$$x_{n+1}' = -x_{n+3}' \quad (5)$$

(1)式と(2)式より、 x_{n+1}' を消去し、(4)式を代入すれば、

第4図 三つの基本的な制御経過

第5図 極値($x'=0$, $y'=0$)まわりでの仮想的振動(入力 x' の振動周期が $4T_s$ の場合、ただし $i=0,1,2,\dots$)

$$x_n' - K_p \Delta y_n' - K_p k \{x_n'^2 - (x_n' - K_p \Delta y_n')^2\} = -x_n' \quad \dots\dots\dots (6)$$

(6)式の両辺に、 $K_p k$ をかけて、無次元量 $K_p k x' = x$, $K_p^2 k \Delta y_n' = \Delta y_n$ を導入すれば(無次元化された比例ステップ式試行法による最適化制御系のブロック線図を描けば、第6図となる)、(6)式は、

$$(2x_n - \Delta y_n)(\Delta y_n - 1) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

(7)式より、 $\Delta y_n = 1$ をうる(ここで、 $\Delta y_n = 2x_n$ の解は、容易にわかるように第5図に示すような振動を生じないので題意に適さない)。同様に、(2)、(3)式と(5)式とより、 $\Delta y_{n+1} = 1$ をうる。 $\Delta y_n = \Delta y_{n+1} = 1$ を、(1)、(2)および(3)式に代入すれば、 $x_{n+1} = -x_{n+3} = 0$, $x_n = -x_{n+2} = 1$ をうる。結局、入力の振動周期が $4T_s$ であるとき、無次元化入力 x の振幅は1である。一方、無次元化出力 y の振幅は1で、周期は $2T_s$ である。また、無次元化出力の変化量 Δy は1となる。そこで、安定な領域をもとめるために初期条件すなわち、無次元化入力の初期値 $|x_0|$ 、出力変化量の初期値 $|\Delta y_0|$ が、ともに1以下の領域から出発

する場合と、1以上の領域から出発する場合とに分ける(以下、 $y = x^2$ は、 $x=0$ の軸について対称であるので、 $x_0, \Delta y_0$ の正の場合についてのみ考え、また最初の試行は、極値に向かって出発するとする)。

まず、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ が、ともに1以下の領域から出発する場合を考える。この領域から出発するときには、つぎつぎにとる無次元化入力と出力変化量 $(x_1, \Delta y_1), (x_2, \Delta y_2), \dots\dots$ は、ともに1以下で、この領域から出ないことが容易に証明できる(付録1を参照)。したがって、その制御経過は、極値のまわりに、振動をしながら極値の近傍に収束することはあっても、発散して、この領域からとび出すようなことはない。ゆえに、この領域から出発する初期条件に対しては、制御経過は常に安定である。この安定領域を、かりに第1の安定領域とする。

次に、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ が、ともに1以上の領域から出発する場合を考える。この領域から出発するときには、次にとる値 $(x_1, \Delta y_1)$ [ただし、第4図の(2)の場合には、第3番めにとる値 $(x_2, \Delta y_2)$]が、上記の第1の安定領域にはいる値すなわち1以下であれば、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ から出発する制御経過は安定なものとなる。したがって、このように、第1の安定領域にはいる初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ の領域を、1以上の領域内にもとめれば、この領域も

安定になる(これをかりに、第2の安定領域とする)。次に、この第2の安定領域にはいる初期条件の領域を、さらに1以上の領域内にもとめることができる(第3の安定領域となる)。このような領域も安定で、その制御経過は、第2の安定領域を通して、第1の安定領域にはいるものとなる。このような考え方により、つぎつぎと安定領域を拡張することができる。これらの安定領域をもとめることを容易にするため、まず、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ の1/4面(すなわち、 $x_0 \geq 0, \Delta y_0 \geq 0$ の領域)を前述の三つの基本的制御経過に対して、大きく3分割する。まず、(1)の制御経過を示す領域は、その制御経過より無次元化量を用いて、 $x_0 > x_1 > 0$ の関係がある。次にとる値 x_1 は、前述の動作原理より、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0$ となる。よって、両式より、 $\Delta y_0 > 0, \Delta y_0 < x_0$ をうる(第7図のAOBの領域)。(2)の領域は、同様に、 $x_0 > -x_1 > 0$ と、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0$ とより、 $\Delta y_0 < 2x_0, \Delta y_0 > x_0$ をうる(同図のBOCの領域)。(3)の領域は、 $-x_1 > x_0 > 0$ と $x_1 = x_0 - \Delta y_0$ とより、 $\Delta y_0 > 2x_0, x_0 > 0$ をうる(同図のCODの領域)。第7図において、 $(x_0, \Delta y_0)$ がともに1以下の領域1,2,3におい

第6図 無次元化された比例ステップ式試行法による最適化制御系のブロック線図

第7図 各種初期条件による安定領域

ては、すでに、その制御経過が安定になることを示した。次に、この 1, 2, 3 の第 1 の安定領域にはいる第 2 の安定領域をもとめる。まず、COD 領域への拡張を行なう。

次にとる値 $(x_1, \Delta y_1)$ が、第 1 の安定領域内にはいなければならないことから、 $-x_1 < 1$ 、 $-\Delta y_1 < 1$ の関係を満足しなければならない(ここで、両式の左辺に、負の符号をもっているのは、COD 領域の制御経過が、前述したように極値を行き過ぎて x_0 と反対側にきて、 x_1 が負になり、また、 x_0 よりも x_1 の絶対値が大きくなって、 $\Delta y_1 (= x_0^2 - x_1^2)$ が負になるからである)。二つの不等式の最初の式に、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0$ を代入して、 $\Delta y_0 < x_0 + 1$ をうる。第二の不等式からは、 $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$ を代入して、

$x_0 - \sqrt{x_0^2 + 1} < \Delta y_0 < x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1}$ をうる。しかるに、この条件式は、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ が、COD 領域内にあるための条件式 $\Delta y_0 > 2x_0$ および最初の不等式からの条件式 $\Delta y_0 < x_0 + 1$ に比べて、いずれも Δy_0 の制限はゆるやかである。よって、 $\Delta y_0 > 2x_0$ 、 $\Delta y_0 < x_0 + 1$ 、 $\Delta y_0 > 1$ がもとめる領域となる(第 7 図の 4 の領域)。同様にして、BOC 領域の 1 以上の領域に拡張する。

この領域内から出発した初期条件は、前述したように、一度、極値からずれる方向に進むので、第 3 にとる $(x_2, \Delta y_2)$ が、第 1 の安定領域にはいらなくてはならない。したがって、 $-x_2 < 1$ 、 $-\Delta y_2 < 1$ の関係を満足しなければならない。最初の不等式に、 $x_2 = x_1 - \Delta y_1$ 、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0$ 、および $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$ の関係を用いて、 $\Delta y_0 > 1/2 [(2x_0 + 1) + \sqrt{4x_0^2 - 3}]$ 、 $\Delta y_0 < 1/2 [(2x_0 + 1) - \sqrt{4x_0^2 - 3}]$ をうる。また、第 2 の不等式からは、 $\Delta y_2 = x_1^2 - x_2^2$ の関係を追加して、一般に、四次式をとくことにより、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ の満足すべき領域をもとめることができるが、ここでは、最初の条件式 $-x_2 < 1$ が満足されれば、 $-\Delta y_2 = x_2^2 - x_1^2 < 1$ をうる(なぜならば、BOC 領域の制御経過では、必ず $|x_2| > |x_1|$ の関係が成立するからである)。よって、 $\Delta y_0 > 1$ 、 $\Delta y_0 < 2x_0$ 、 $\Delta y_0 > 1/2 [(2x_0 + 1) + \sqrt{4x_0^2 - 3}]$ 、および $\Delta y_0 < 1/2 [(2x_0 + 1) - \sqrt{4x_0^2 - 3}]$ がもとめる領域となる(第 7 図の 5 の領域)。最後に、AOB の領域に拡張する。この領域では、次にとる値 $(x_1, \Delta y_1)$ が、第 1 の安定領域にはいればよい。したがって、 $x_1 < 1$ 、 $\Delta y_1 < 1$ 、最初の不等式から $\Delta y_0 > x_0 - 1$ 、第 2 の不等式から、 $\Delta y_0 > x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}$ 、 $\Delta y_0 < x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1}$ をうる。しかるに、 $\Delta y_0 > x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}$ は、AOB の領域内に存在しない。したがって、 $x_0 > 1$ 、 $\Delta y_0 < x_0$ 、 $\Delta y_0 > x_0 - 1$ 、および $\Delta y_0 < x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1}$ がもとめる領域となる(第 7 図の 6 の領域)。以上で、第 1 の安定

領域に、1 回の試行ではいる第 2 の安定領域をもとめることができた。さらに、第 2 の安定領域にはいる第 3 の安定領域をもとめることができる。たとえば、AOB 領域の 6 の領域にはいる第 3 の安定領域は、第 3 番めにとる値 $(x_2, \Delta y_2)$ が、第 1 の安定領域にはいることから、第 7 図の 7 の領域をうる。また、さらに、この 7 の領域にはいる第 4 の安定領域の 8 の領域、さらに、第 5 の安定領域の 9 の領域と、つぎつぎともとめることができる(領域の計算の詳細は、付録 2 を参照)。このようにして、BOC、COD 領域に対しても、安定領域を拡張していくことができるが、設計に際して、それらすべての領域をもとめる必要のないことがわかる(4・2、4・3 参照)。

4・2 オフセット 前項において、もとめられた安定領域内の初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ から出発したとき、つぎつぎにとる値 $(x_1, \Delta y_1)$ 、 $(x_2, \Delta y_2)$ 、……がどのような経過をたどって、極値の近傍に到達するか、また、その場合に、極値に一致しないで、途中の値に、収束すること、すなわち、オフセットを生ずることはないか等の問題について検討を行なう。

第 1 の安定領域すなわち初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ が 1 以下の領域を、制御経過の追跡を容易にするため、いろいろな制御経過に対して、細分割を行なう。第 8 図に、第 1 の安定領域のみが示されてある。まず、同図において、上記の三つの基本的制御経過を行なう領域に相当するものを、(1) $\triangle aeb$ 、(2) $\triangle abc$ 、(3) $\triangle acj$ の領域で示す。次に制御経過が、極値を 1 回も行き過ぎないで、途中のある値に収束する場合、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ が、どんな関係を満足しているかをしらべる。 $(x_0, \Delta y_0)$ が、ともに正の値から出発するとすれば、こ

第 8 図 各種初期条件 $(x_0 < 1, \Delta y_0 < 1)$ より出発する時の制御経過とオフセットを推定するための説明図

の場合には、つぎつぎにとる値 $(x_1, \Delta y_1)$, $(x_2, \Delta y_2)$, $\dots, (x_n, \Delta y_n), \dots$ の間には、前述の制御動作原理より、次の(8)式の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 - \Delta y_0, \quad x_2 = x_1 - \Delta y_1, \quad \dots, \\ x_n &= x_{n-1} - \Delta y_{n-1}, \quad \dots \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ここで、 $\Delta y_i = y_{i-1} - y_i$ ($i \geq 1$), $y_i = x_i^2$ ($i \geq 0$)

(8)式の両辺を相加え合わせ、制御経過が収束する入力 x の値を x_∞ (すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}$, $x_n \rightarrow x_\infty$)とすれば、

初期条件 $x_0, \Delta y_0$ が満足すべき関係式として、

$$\Delta y_0 = -\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_\infty - \frac{1}{2}\right)^2 \dots (9)$$

極値に収束する場合には、 $x_\infty \rightarrow 0$ とおくことにより

$$\Delta y_0 = -\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \dots (10)$$

(10)式を満足する任意の初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ から出発する制御経過は、すべて極値すなわち零に収束する。また、(9)式において、入力 x の収束値 x_∞ に、零でなく有限の正の値をとらせることによって、(9)式の二次曲線の頂点の座標を、下に移動させることができる。すなわち、ある有限の値を収束値にもつ制御経過が可能である。たとえば、第8図に、 $x_\infty = 0$ の曲線 ade と $x_\infty = 0.1$ のときの曲線を示してある。この曲線間の任意の初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ から出発するときには、オフセットは、入力 x で、0.1以内になることを示している。このようにして、(1)の領域を、二次曲線 ade すなわち $x_\infty = 0$ となる曲線で二分する。その曲線の下部分の初期条件から出発する制御経過は、その二次曲線 ade を、 Δy_0 軸にそって、下に平行移動させたその初期条件を通る二次曲線上を移動し、1回も極値を行き過ぎないで、途中で収束を生ずる。また、その収束値は、その曲線 ade から下に大きく離れた初期条件から出発するほど大きくなる。すなわちオフセットは大きくなる。また、(9)式より、 $x_\infty = 1/2$ のときに、ちょうどこの二次曲線は、この図表から消える。すなわち、オフセットは、無次元化入力 x で、0.5以内であることが、後の考察とから結論できる。

次に二次曲線 ade の上側の部分について考える。

(1)領域において、その上側の部分から出発した初期条件は、二次曲線 ade を上へ、 Δy_0 軸にそって、平行移動させたその初期条件を通る二次曲線上を移動し、何回かの試行の後、(2)領域との境界線 ab 上、あるいは、その少し手前に達する。次の試行により、その二次曲線を延長した曲線上(第8図の破線で示された曲線)に移動し、(2)あるいは(3)領域のどちらかにはいる。次に、(2)と(3)領域から出発するときには、次にとる値すなわち、(2)領域では、 $(x_2, \Delta y_2)$,

(3)領域では $(x_1, \Delta y_1)$ が、次の試行でどの領域に移動するかを調べる。ここでは計算の詳細は省略するが、付録3を参照すると、(2)と(3)領域の境界線 ac 直線は、(1)領域の ai 直線に、(1), (2)領域の境界線 ab 直線は、(1)領域の $afdb$ の二次曲線に、そして(3)領域の cj あるいは、(2)領域の cb 直線は、(1)領域の ib 直線に移動することがわかる(矢印の方向は、おのおの相対応するものである)。したがって、この計算結果により、(2), (3)領域内から出発した任意の初期条件は、(1)領域の $afdbi$ 領域内に移動し、(2)領域から(3)領域、あるいは、(3)から(2)への直接の移動は生じない。さらにくわしくその内部のようすを調べるために、(2), (3)領域内の $\Delta y_0 = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8$ に対応する曲線群(破線と細線)を、 $afdbi$ 領域内に示した(矢印の方向は、いずれも x_0 のふえる方向に対応する。付録3参照)。また、 $afdbi$ 領域のうち、二次曲線 ade の下側の $afdk$ 領域に移動する制御経過は、移動後は、(1)領域から出ないで、入力 x は収束値 x_∞ が0~0.5のある値に収束する。その $afdk$ 領域に移動する(2), (3)領域の初期条件の領域は、おのおの、 $ahc'c$ と $acc'g$ である(付録3参照)。なお、それ以外のすべての安定領域の初期条件から出発するときには、この二次曲線 ade より上に、右に大きくずれるほど、何回も極値を行き過ぎることが容易に推察できる。これらの制御経過の追跡と考察によって、オフセットを小さくするために、次の対策が考えられる。

(1) 無次元化入力の変化量 $\Delta x_n (= x_{n-1} - x_n)$ 、この場合、制御系は無次元化されているので、無次元化入力の変化量 Δx_n の大きさは、無次元化出力の変化量 Δy_{n-1} の大きさに等しくなる)に飽和値を設ける。各サンプリング周期ごとに無次元化された制御対象に加えられる入力の変化量 Δx_n は、任意の値をとりうる。この Δx_n が、その飽和値以上になるときは、常にその飽和値が、入力の変化量 Δx_n になるようにする。このように、入力の変化量 Δx_n に飽和値をもうけることは、まちがった動作(特に、最初の出発の際に多い)をした場合に、入力が最適の入力の値(無次元入力では $x=0$)から大きなずれを生じない。また、未知の領域(不安定領域を含むかも知れない)の初期条件から出発する場合にまで、設計領域を拡張させることが可能になる。

結局、制御経過は安定化され、極値からのずれ量すなわちオフセットも小さくすることが可能になる。その他、制御対象の入・出力間の静特性を、二乗曲線すなわち $y' = kx'^2$ で近似することに対して、寛容な条件

を与える。なぜならば、入力の変化量 Δx_n が、出力の変化量 Δy_n に比例する（ただし、無次元化量であるので、比例感度は 1 である）。制御経過は、二乗特性の極値の近傍だけで極値の近傍からはなれたところでは、入力の変化量 Δx_n には、ほとんど飽和値が用いられるからである。したがって、極値から大きくはなれるにしたがって、極値近傍で近似した二乗曲線が、実際の静特性からずれてくることは制御経過にほとんど悪い影響を与えない。たとえば第 9 図に、途中で静特性の比例定数 k が変化する場合の制御経過が示してある。実線は、極値近傍の比例定数 $k=1$ に対して設計されたもので、オフセットが出力 y' の最大値の 0.5% 以内に収まっている。

一方、破線は、極値からずれた位置での比例定数 $k=3$ を用いて設計をしたもので、このときには、C 点で収束を起し、大きなオフセットを生ずる。結局、極値近傍の比例定数 k を用いて、設計を行ないまた、それで十分な制御経過がえられることを示している（設計値の計算の詳細は、第 5 節参照）。

(2) オフセットは、無次元化入力で 0.5 であることから、未知の初期条件の領域にまで拡張して、無次元化入力 x に対する許容誤差が、0.5 以上の値となるように、無次元化入力の最大値 x_m を大きくとる。すなわち見掛け上、オフセットをなくする〔一見、規格化された入力の最大値 x_m' 、あるいは、実際の入力の最大値 x_m'' を任意に選ぶことができるように思われるが、後の設計法の節で述べるが、規格化入力の最大値 x_m' と無次元化入力の最大値 x_m との間には、

第 9 図 途中で比例定数 k の変化するときの制御経過例
(比例感度 $K_p=1$ (実線), $1/3$ (破線), 規格化入力変化量の飽和値 $\Delta x_i'=0.2$)

$K_p k x_m' = x_m$ の関係がある。 x_m を任意に選ぶことは、比例感度 K_p を任意に選ぶことに相当するのであって、 x_m' あるいは $x_m'' (= x_{\min} + x_m')$ を任意に選ぶことではないことに注意されたい。しかし、この場合にも、不安定領域から出発する初期条件が、安定な制御経過を示すために、(1) の条件、すなわち入力の変化量に飽和値を設けることは必要である。

(3) 無次元化入力の最大値 x_m を小さく、たとえば 1 近くで設計を行なうとき、初期値 x_0 が、0.5 付近で小さな出力変化量の初期値 Δy_0 より出発することが起る場合には、そのオフセットは大きくなり、極値以前で制御動作が停止してしまうことになる。そのときには、出力の変化量 Δy_n が、ある値以下になったときに、別にある大きさの階段状の入力変化量を加えて、極値へと収束させることが必要になる。このように、別に階段状の入力を加えることは、極値まわりで、振動を起して良くないが、オフセットを打消すには必要な対策である。

これら三つの対策に対する次の問題、すなわち無次元化入力の変化量 Δx_i をいくつにとるか、また、未知領域への拡張をどの程度許すべきか、また、それと飽和値 Δx_i との関係は、また別に階段状の入力変化量を加える必要があるかどうか等の問題は、次項の速応性を考慮して解決されるべきである。

4.3 速応性 飽和値 Δx_i をどのくらいの値にとれば、オフセットを小さくでき、しかも速応性をあげることができるかを定める。一般に飽和値 Δx_i を大きくとると、入力の初期値 x_0 が大きな値から出発したときには、出力は極値に早く近づくが、小さな値から出発したときに、出力は極値を何回も行き過ぎて速応性がわるくなる。しかもオフセットが大きくなる可能性も大となる。逆に飽和値 Δx_i を小さくとると、入力の初期値 x_0 が、大きな値から出発したときに、速応性がわるくなる。しかし、小さな値から出発したときには、極値を行き過ぎないので、速応性はよくなり、しかもオフセットは小さくなる。したがって入力の初期値 x_0 が、どんな値から出発する場合にも、速応性がよくなり、オフセットもかなり小さくするような最適の飽和値 Δx_i を決定することが必要である。

いま、無次元化出力の最大値 $y_m (= x_m^2)$ の $\varepsilon\%$ 以下の極値からのずれ量すなわちオフセットは許すとして、その許容誤差内に収束するまでの試行の数 N と、無次元化入力の最大値 x_m との間の関係を調べる。まず、 x_m がまずにつれて、見掛け上の許容誤差範囲はふえてくる。その大きさは、無次元化入力に対して、 $\sqrt{y_m \cdot \varepsilon / 100} = x_m \cdot \sqrt{\varepsilon / 100}$ である。

許容誤差内に、最も早く収束させるためには、次の手続により決定される飽和値 Δx_1 を採用すればよい。

(1) 常に飽和値 Δx_1 を利用して、許容誤差内にはいり、それよりとび出さない場合が、最も早い制御経過と考えられる。そのときの制御経過として、二通りの場合がある。

(a) 最初に、許容誤差内にはいる入力値をもとめるときに、初めて、入力の変化量が飽和値 Δx_1 以下となること。

(b) (a)の場合において、なお入力の変化量が、飽和値 Δx_1 に等しくなるとき、いったん、許容誤差内にはいった後、次の試行で、極値を行き過ぎて、許容誤差限界をとび出さずとも、許容誤差限界をとび出さないように飽和値 Δx_1 を決めること。

第 n 番めのサンプリング時刻 nT_s の無次元化入力値 x_n で、許容誤差内に、はじめてはいるとすれば (a) の条件は、まず、入力値 x_n が、許容誤差以内であることから、 $x_n = x_{n-1} - (x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2) \leq x_m \cdot \sqrt{\varepsilon}/10$ である。いま、常に、飽和値 Δx_1 を用いるときに、収束回数が、 N 回で、無次元化入力の最大値 x_m より、出力に極値を与える入力値 $x=0$ に到達するとすれば、すなわち、 $\Delta x_1 = x_m/N$ とすれば、上式は、 $\Delta x_1 - [(2\Delta x_1)^2 - (\Delta x_1)^2] \leq x_m \cdot \sqrt{\varepsilon}/10$ となる。

したがって、

$$\Delta x_1 \geq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{N\sqrt{\varepsilon}}{10} \right) \quad (11)$$

また、このとき、 Δy_{n-2} まで、 Δx_1 以上であることから、 $\Delta y_{n-2} = x_{n-3}^2 - x_{n-2}^2 \geq \Delta x_1$ 、同様に、

$$(3\Delta x_1)^2 - (2\Delta x_1)^2 \geq \Delta x_1 \quad \text{より}$$

$$\Delta x_1 \geq 0.2 \quad (12)$$

(b) の条件は、まず許容誤差内にはいる入力の変化量が、飽和値 Δx_1 より大きいことから、 $\Delta y_{n-1} \geq \Delta x_1$ をうる。これより、

$$\Delta x_1 \geq \frac{1}{3} \quad (13)$$

しかるに、この(13)式の条件は、(12)式の条件によって制限を受ける。次に、次の試行で極値を行き過ぎるが、このとき、第 n 番めのサンプリング時刻における入力値 x_n は零となり、次のサンプリング時刻の入力値 x_{n+1} は、 $-\Delta x_1^2$ となるから、その値、すなわち、 Δx_1^2 が許容誤差の範囲をとび出さないためには、 $\Delta x_1^2 \leq x_m \cdot \sqrt{\varepsilon}/10$ とならねばならない。この関係式より、

$$\Delta x_1 \leq N\sqrt{\varepsilon}/10 \quad (14)$$

したがって、(11)、(12)、および(14)式を同時に満足する領域の飽和値 Δx_1 が、入力の最大値 x_m から、

N 回でもって、出力の最大値 y_m の許容誤差 $\varepsilon\%$ 以内に収束する制御経過を示すものとなる。

(2) しかるに、上記の条件の領域内の飽和値 Δx_1 を用いても、任意の初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ から出発するときには、オフセットを生ずる可能性がある。前項のオフセットのところでも述べたように、オフセットは、無次元化入力 x でたかだか 0.5 であることから、ちょうど、この値 0.5 が、入力 x に対する許容誤差内にはいるように、無次元化入力の最大値 x_m を決めることができる。それは、 $x_m \cdot \sqrt{\varepsilon}/10 \geq 0.5$ より、

$$\Delta x_1 \geq 5/N\sqrt{\varepsilon} \quad (15)$$

よって、(15)式が満足される飽和値 Δx_1 を採用すれば、見掛け上、オフセットをなくすることができる。

(3) (1)での条件は、入力 x が入力の最大値 x_m から出発した際に、満足されるべきものであった。その他の任意の入力比 x_0/x_m から出発した際にも、(1)の条件が成立するためには、 $x_m \cdot x_0/x_m \geq \Delta x_1$ をみたせば十分である。

したがって、

$$N\sqrt{\varepsilon} \geq \sqrt{\varepsilon} \cdot x_m/x_0 \quad (16)$$

(4) 無次元化入力の最大値 x_m の値を大きくとったり、飽和値 Δx_1 を小さくすると、入力に対する許容誤差範囲が決められているから、飽和値 Δx_1 の値が、その範囲内にはいってしまう大きくなる。そのときには、 $\Delta x_1 \leq x_m \cdot \sqrt{\varepsilon}/10$ より、

$$N\sqrt{\varepsilon} \geq 10 \quad (17)$$

(17)式を満足する領域は、多位置オンオフ式になる。なぜならば、比例ステップ式のように、比例帯をもつ必要がなくなってくるからである。

かくして、(11)、(12)、(14)、(15)、および(16)式を満足し、(17)式を満足しない領域(第10図の斜線の

第10図 各種設計条件を満足する領域

部分,ただし,(16)式において,入力比 $x_0/x_m=0.1$, 許容誤差 $\varepsilon=0.5\%$ とする)が,見掛け上,オフセットが零で,入力の初期値が最大値の $1/10$ の値から出発する場合にも,許容誤差範囲を行き過ぎないで収束する,入力の变化量に飽和値をもたせた比例ステップ式制御の領域である.その領域で最も速応性のよい点は C で,飽和値 $\Delta x_l=0.706$,収束回数 $N=10$,入力の最大値 $x_m=7.06$ となる.また,(15)式の条件,すなわち,見掛け上オフセットを零にする条件を除外した領域において,早い応答を示すのが直線 BC 上である.さらに,(16)式の条件を除外した.すなわち,入力の最大値 x_m から出発するときだけを考慮した領域においては,直線 ACD 上が,早い応答を示すものとなる.この第 10 図から,無次元化入力の最大値 x_m と収束回数 N との関係は許容誤差 $\varepsilon=0.5\%$ に対してもとめたのが第 11 図である(ここで,AGB の曲線などは,第 10 図中の AGB 折直線などに対応するものである).

第 11 図 第 10 図の各種設計領域において無次元化入力の最大値 x_m と収束回数 N との関係

(a)

以上の場合,すべて,上記の望ましい条件を満足する領域に対する飽和値 Δx_l をもちいたものである.しかし,それ以外の大きさの飽和値 Δx_l をもたせると,どんな制御経過を示し,収束回数はどうなるかを調べる.第 12 図(a), (b) に,無次元化入力の最大値 x_m が, 1 と 3 の場合の計算例を示してある.ここで,記号の肩の数字は,別に階段状の入力変化量を加えて許容誤差内に収束させた場合の別に加えた試行の数で,階段状入力の変化量の大きさは,入力の最大値 x_m の 5% とする.

これより,容易に推察できることは,

1) 入力比 x_0/x_m が大きな値から出発するときには,速応性をまず目的で, Δx_l を望ましい値($x_m=1$ では,だいたい 0.2 , $x_m=3$ では, 0.3 で第 5 節の設計法を参照せよ)よりも大きくとると,入力比 x_0/x_m が小さな値から出発するときに,応答は振動的になり,ときには階段状入力の変化量を別に加える必要が生ずる.

2) 飽和値 Δx_l を望ましい値よりも小さくしたときには,入力比 x_0/x_m が,大きな値から出発するときに,速応性がわるくなり,また入力比 x_0/x_m が小さい値から出発するときに,オフセットが大きくなる.結局,この問題は実際と関連するのであるが,入力比 x_0/x_m の小さな値から出発するときに,大きな出力変化量の初期値 Δy_0 がおこななければ,速応性の点から,たとえば, $x_m=1$ の場合,望ましい飽和値 $\Delta x_l=0.2$ よりも, 0.3 のほうがよいことになる.一般に,飽和値 Δx_l を極端に大きくあるいは小さくすることは望ましいことではない.

(b)

第 12 図 無次元化入力の変化量の飽和値 Δx_l および入力比 x_0/x_m が収束回数 N_a に及ぼす影響の計算例

図中,記号の肩の数字は,別に階段状入力変化量を加えて収束させた場合のその入力変化量の数とその入力変化量の大きさは無次元化入力の最大値 x_m の 5%

5. 設 計 法

前節の速応性の議論により、無次元化入力の変化量の飽和値 Δx_i および最大値 x_m に望ましい領域が存在することがわかった。次に、制御装置の比例感度 K_p および規格化入力の変化量の飽和値 $\Delta x_i'$ を決定する設計法を述べる。

さきに行なった無次元化式を、無次元化入力および規格化入力の最大値 x_m と x_m' また、無次元化入力および規格化入力の変化量の飽和値 Δx_i と $\Delta x_i'$ との間に用いれば、おのおの、 $x_m = K_p k x_m'$ 、 $\Delta x_i = K_p k \Delta x_i'$ をうる。これらの式を用いて、以下に述べるようにして、 K_p および $\Delta x_i'$ を決定する。

(1) 比例定数 k 、規格化入力の最大値 x_m' を、実際の制御対象の静特性から決定する。次に、たとえば許容誤差 ϵ が 0.5% 以下の要求に対しては、その規格化入力の最大値 x_m' を無次元化入力の最大値 x_m が 2~7 くらいの値に対応させ、 $K_p k x_m' = 2 \sim 7$ より、比例感度 K_p を決定する。

(2) 規格化入力の変化量の飽和値 $\Delta x_i'$ (すなわち実際の入力の変化量の飽和値 $\Delta x_i''$) は、(1) で用いた無次元化入力の最大値 x_m に対応する無次元化入力の変化量の飽和値 Δx_i の値を採用して決定する。たとえば、(1) の場合の x_m に対応して、 Δx_i を 0.2~0.7 にとり、 $K_p k \Delta x_i' = 0.2 \sim 0.7$ より $\Delta x_i'$ をもとめる。

以上の設計法についての、二、三の設計定数の選び方の注意を述べる。

(1) **規格化入力の最大値 x_m'** 規格化入力の最大値 x_m' は、実際の制御対象の静特性より決めるわけであるが、その値をあまり大きくすると、それに対応する規格化出力の最大値 $y_m' (= k x_m'^2)$ の値が大きくなるので、同じ許容誤差以内に到達するまでの試行の数、すなわち収束回数 N が大きくなる。また、比例感度 $K_p (= x_m / k x_m')$ の値が小さくなるので、規格化入力の変化量の飽和値 $\Delta x_i' (= \Delta x_i / K_p k)$ が大きくなり、入力の変化量が $\Delta x_i'$ 以上となるひん度が、小さくなるのでオフセットが大きくなる可能性がある。

(2) **比例定数 k** 制御対象の入・出力間の静特性は、外乱の大きさによって多くの曲線を生ずる(たとえば、第1図参照)。そこで、それらの曲線の極値近傍を二乗特性が近似し、一つの比例定数 k で代表させなければならない。それらの曲線の極値近傍の形が、非常に類似している場合を除いては、比例定数 k は、どの値を採用したらよいであろうか、

そこで、(a) 一番小さな比例定数 k_1 に対して、設計を行なう場合、(b) 一番大きな比例定数 k_2 に対して、

設計を行なう場合の両極端の値をとったときについて考える。(b) の場合には、 k_1 をもった曲線の追跡に際して、見掛け上、許容誤差が大となるので速応性がよくなるように考えられがちであるが、見掛け上、比例感度 K_p は小さくなるので途中で収束し、オフセットを生ずる。逆に、(a) の場合には、 k_2 をもった曲線の極値追跡に際して、見掛け上、許容誤差が小となり速応性はわるくなるが、極値到達までの制御経過のようすはあまり変らない。しかし、行き過ぎをおこして、極値の近傍に収束し、ときには極値のまわりに振動をおこすおそれがある。これは比例感度 K_p が、見掛け上大きくなるためである。そのような振動を生じない条件をしらべる。小さな比例定数 k_1 で設計を行なったときの比例感度 K_p 、飽和値 $\Delta x_i'$ を、大きな比例定数 k_2 をもった曲線の極値追跡に用いたとき、その極値付近でのようすを調べる。行き過ぎを生じた後には、規格化出力の変化量は、前の出力値が零であることから、 $k_2 \Delta x_i'^2$ となり、振動しないためには、

$$K_p k_2 \Delta x_i'^2 < \Delta x_i' \quad \dots\dots\dots (18)$$

一方、 $K_p = x_m / k_1 x_m'$ 、 $\Delta x_i' = \Delta x_i / k_1 K_p$ より、(18) 式は、

$$\frac{k_2}{k_1} < \frac{1}{\Delta x_i} \quad \dots\dots\dots (19)$$

(19) 式より、無次元化入力の変化量の飽和値 Δx_i を小さくえらぶほど、比例定数の比 k_2/k_1 は大きくなり、振動を生ずる危険が少なくなる。たとえば、 $\Delta x_i = 0.2$ に対しては、比例定数の比 k_2/k_1 は 5 となり、小さい比例定数 k_1 の 5 倍の静特性における比例定数 k の変化があっても、その応答はおそくなることはあるが、振動を生ずることはない。

(3) **無次元化入力の最大値 x_m** 前節の速応性の項で記したことから明らかなように、 x_m を 7 以上にとるとは、速応性の点でまずいが、オフセットがすべて許容誤差以内になるので、場合によっては少しぐらいの超過は考慮されてよい。逆に、2 以下、あるいは 2~7 の中でも、飽和値 Δx_i を小さくえらんで(第9図中、AGB あるいは AC 区間の値)、速応性をよくする場合には、入力比 x_0/x_m の小さな値から出発したときに、行き過ぎを起す危険があるが、その付近において、小さな出力変化量からのみ、いつも出発するような状態(すなわち、あまり大きな外乱変化がおこらない状態)であれば、行き過ぎをすることは少ないので、オフセット、速応性はともによくなる。

結局、以上の考察により、実際の制御対象の静特性、運転状態および外乱の性質などを十分観察した後、比例定数 k 、無次元化入力の最大値 x_m の最も適

当な値を決定し、それらより比例感度 K_p 、実際の入力変化量の飽和値 $\Delta x_1'' (= \Delta x_1')$ の値をもとめるべきである。

6. 結 言

本論文において、比例ステップ式試行法による一入力系の最適化制御系の解析および設計を行なった。そのおもな解析方法および結果を要約すれば、以下のようである。

(1) 入・出力を無次元化して、制御対象の比例定数、制御装置の比例感度の影響を陰にし、初期条件すなわち、無次元化入力の初期値と試行前後の無次元化出力の変化量の初期値との面上だけで安定領域の計算、および制御経過の追跡を行ない、各種初期条件、比例感度および比例定数によるオフセットの大きさを明らかにした。

(2) (1)の結果より、安定でしかもオフセットを小さくするには、入力の変化量に飽和値を設けることが必要であることがわかった。また、これにより、制御対象の二乗特性による近似は、その極値近傍で十分に、極値からはなれるに従い、実際の静特性がその二乗特性からずれてくるような場合にも、制御経過は、なんらまずくならないことがわかった。

(3) その飽和値の大きさは、できる限りオフセットを小さくして、最も速応性がよくなるように決定した。その最もよい速応性は、その制御経過として、常に、その飽和値を利用して、極値近傍の許容誤差以内にはいり、ついで、その範囲内からとび出さない場合にえられるとした。最適の飽和値の決定後、最適の比例感度 K_p が決められた。

(4) その他、設計の際において、いろいろな外乱の大きさに相当する多くの極値近傍を、一つの二乗特性で代表させる場合には、その二乗特性の比例定数はオフセットを少なくするために、一番小さい値を採用する。その場合に、大きな比例定数をもった極値追跡のときに、極値のまわりで、ハンティングをおこすおそれがあるが、入力の変化量の飽和値を適当にえらぶことにより、比例定数の比のある範囲内で調整できることがわかった。

終りにのぞみ、名古屋大学工学部機械工学科 山本敏男教授、および自動制御研究室の各位より、終始貴重な御助言および御討論をいただいた。ここに深く感謝の意を表する。なお、昭和 33, 34 年度文部省科学機関研究費の援助のもとで行なわれたものであることを付記する。

文 献

- (1) C.S. Draper & Y.T. Li, *Principles of Optimizing Control Systems and an Application to the Internal Combustion Engine* (1951), ASME Publ.
- (2) H.S. Tsien, *Engineering Cybernetics* (1954), 214, McGraw-Hill.
- (3) 藤井, 古賀, 機械学会論文集, 26, 161 (昭 35-1), 129.

付 録

1. $|x_0| < 1, |\Delta y_0| < 1$ の領域が安定である証明

入力の初期値 x_0 の次のサンプリング時刻の入力の値 x_1 は、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ との間に、最初の出発は、極値に近づく方向に進むという仮定から、 $x_1 = x_0 \mp |\Delta y_0|$ の関係がある (この式において、 x_0 が正のときに負の符号、 x_0 が負のときに正の符号をとる)。したがって、 $|x_0| < 1, |\Delta y_0| < 1$ から $|x_1| < 1$ をうる。また出力変化量 Δy_1 は、 $x_0^2 - x_1^2$ に等しいから、 $|x_0| < 1, |x_1| < 1$ を用いて、 $|\Delta y_1| < 1$ 、次に、第 4 図の (2) に示すように、一度極値からずれる方向に制御動作が働く場合には、さらに、次の入力の値 x_2 と出力変化量 Δy_2 を調べる必要がある。 x_2 と $x_0 (> 0)$ との大きさを比較してみると、 $x_0 - |x_2| = x_0 + x_1 - \Delta y_1 = (x_1 + 1/2)^2 - (x_0 - 1/2)^2 = (x_0 + 1/2 - \Delta y_0)^2 - (x_0 - 1/2)^2$ 、最後の式において、 $\Delta y_0 < 1$ から、 $x_0 > |x_2|$ となる。また、 $\Delta y_2 = x_1^2 - x_2^2$ において、 $1 > x_0 > |x_2| > |x_1|$ から、 $|\Delta y_2| < 1$ となる。したがって、 $|x_0| < 1, |\Delta y_0| < 1$ の初期条件から出発するときには、次々にとる $(x_1, \Delta y_1), (x_2, \Delta y_2), \dots$ は、この領域内を移動し、決してこの領域からでることはない。

2. 各安定領域の計算の追加

7 の領域においては、第 3 番めにとる $(x_2, \Delta y_2)$ の値が、第 1 の安定領域にはいることから、まず、 $x_2 < 1, \Delta y_2 < 1$ を満足し、しかも、第 2 番めの入力は 1 以上であることから、 $x_1 > 1$ をうる。最後の不等式、 $x_1 > 1$ において、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0$ より、 $\Delta y_0 < x_0 - 1$ をうる。また、第 1 の不等式 $x_2 < 1$ において、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0, x_2 = x_1 - \Delta y_1$ 、および $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$ から、満足なものとして、 $\Delta y_0 > 1/2[2x_0 + 1 - \sqrt{4x_0^2 + 5}]$ をうる。最後に、第 2 の不等式 $\Delta y_2 < 1$ から Δy_0 と x_0 との関係をもとめると、一般に、四次式となりとくのが面倒である。そこで、近似的に、以下に示す点をむすんだ直線でおきかえてよい。一般に、第 n 番めに、 $x_n = 1, \Delta y_n = 1$ に到達した制御経過は、極値すなわち $x = y = 0$ のまわりで、振動を生ずることを前に示したが、そのような、 $x_n = 1, \Delta y_n = 1$ に到達する初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ を、AOB

の領域内にもとめてみる。いま、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ から出発したときに、第 n 番めに、入力 x_n が 1, 出力変化量 Δy_n が 1 になるために満足すべき関係式は、AOB 領域内においては、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0$, $x_2 = x_1 - \Delta y_1$, $\dots$, $x_n = x_{n-1} - \Delta y_{n-1}$, $x_{n+1} = x_n - \Delta y_n = 0$ (ここで、 $\Delta y_n = x_{n-1}^2 - x_n^2$) である。これらの式の両辺を相加えると、 $x_0 - \Delta y_0 - x_0^2 + x_n^2 = 0$ をうる。ここで、 $x_n = 1$, $\Delta y_0 = 0$ にとれば、 $x_0 = 1/2 \cdot (1 + \sqrt{5}) \doteq 1.62$ をうる。また、各入力の系列は、 $x_n = 1$, $x_{n-1} = \sqrt{2}$, $x_{n-2} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, $x_{n-3} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$, $\dots$ また、出力変化量の系列は、 $\Delta y_n = 1$, $\Delta y_{n-1} = \sqrt{2} - 1$, $\Delta y_{n-2} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{2}$, $\Delta y_{n-3} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}} - \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, $\dots$ をうる。結局、おのおの入力の系列の任意の位置が、それに対応する出力変化量の系列中の値をもって出発したとき、すべて制御経過は $x_n = 1$, $\Delta y_n = 1$ に到達する。したがって、7 の領域は $(y_0, \Delta y_0)$ の上限となる $(x_{n-1}, \Delta y_{n-1})$ の点と $(x_{n-2}, \Delta y_{n-2})$ の点とを結ぶ直線と、さきの条件とによってかこまれる領域と近似的に考えてよい。同様に、8 の領域に対しては第 4 番めの $(x_3, \Delta y_3)$ が、おのおの 1 以下になる場合であるから、 $(x_{n-2}, \Delta y_{n-2})$ の点と $(x_{n-3}, \Delta y_{n-3})$ の点とを結ぶ直線、および 7 の領域との境界線とでかこまれた領域である。また、9 の領域に対しても、同様にしてもとめることができる。

3. (2), (3) 領域と (1) 領域との対応関係

(1) ac 直線が、ai 直線に対応すること (ac $\rightarrow$ ai)

(2) と (3) 領域の境界線 ac 直線は、 $\Delta y_0 = 2x_0$ (ただし、 $x_0 < 0.5$) である。一方、次の $(x_1, \Delta y_1)$ の値は、おのおの $x_0 - \Delta y_0 = x_1$, $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$ である。よってこれらの式より、 x_0 , Δy_0 を消去して $\Delta y_1 = 0$ (ただし $x_0 < 0.5$) をうる。

(2) ab 直線 $\rightarrow$ afdb 曲線 (1) と (2) 領域との境界線の ab 直線は、 $\Delta y_0 = x_0$ である。この場合は、(2) 領域であるから、第 3 番めの $(x_2, \Delta y_2)$ の値をとり、それらの間には、 $x_0 - \Delta y_0 = x_1$, $\Delta y_2 = x_1^2 - x_2^2$ の関係がある。よって、これらの式より x_0 , Δy_0 , x_1 を消去すれば、 $\Delta y_2 = -x_2^2$ をうる。しかるに、 Δy_2 , x_2 はともに負となるので、 Δy_2 , x_2 がともに正の領域に表現するために、あらためて、 $-\Delta y_2 \rightarrow \Delta y_2$, $-x_2 \rightarrow x_2$ とおけ

ば、 $\Delta y_2 = x_2^2$ をうる。

(3) cj あるいは、cb 直線 $\rightarrow$ ib 直線 (3) 領域の cj 直線に対しては、 $\Delta y_0 = 1$ (ただし $x_0 < 0.5$)、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0$, $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$ の関係をうる。これらの式より、 Δy_0 , x_0 を消去すれば、 $\Delta y_1 = 2x_1 + 1$ をうる。(2) と同様に、 $\Delta y_1 = 2x_1 - 1$ (ただし $x_0 > 0.5$) をうる。

(2) 領域の cd 直線に対しては、 $\Delta y_0 = 1$ (ただし $x_0 > 0.5$)、 $x_1 = x_0 - \Delta y_0$, $x_2 = x_1 - \Delta y_1$, $\Delta y_2 = x_1^2 - x_2^2$ の関係より、 $\Delta y_2 = 2x_2 + 1$, (2) と同様に、 $\Delta y_2 = 2x_2 - 1$ (ただし $x_0 > 0.5$) をうる。

(4) $\Delta y_0 = c$ (一定) に対応する (1) の領域 (3) 領域に対しては、 $\Delta y_0 = c$, $x_1 = x_0 - \Delta y_0$, $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$ の関係より、 $\Delta y_1 = 2cx_1 + c^2$ をうる。(2) と同様に、 $\Delta y_1 = 2cx_1 - c^2$ となる。

(2) の領域に対しては、 $\Delta y_0 = c$, $x_1 = x_0 - \Delta y_0$, $x_2 = x_1 - \Delta y_1$, $\Delta y_2 = x_1^2 - x_2^2$ の関係より、 Δy_0 , x_0 , x_1 , Δy_1 を消去して、(2) と同様符号をかえると、 $\Delta y_2 = \{4c(c-1)x_2^2 + 2c^2x_2 - c^4\} / (1-2c)^2$ をうる。

(5) afdki 領域に対応する (2), (3) の領域 (3) 領域においては、その領域内から、初期条件 $(x_0, \Delta y_0)$ で出発したときに、次の $(x_1, \Delta y_1)$ の値が、ade 曲線の下にはいれればよい。したがって、 $x_0 - \Delta y_0 = x_1$, $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$ および $\Delta y_1 = -x_1^2 + x_1$ (ade 曲線) を (3) の領域に書きあらためた $\Delta y_1 = x_1^2 + x_1$ [(3) の領域では、 $x_0 < 0$, $\Delta y_0 < 0$ であるから] とより、 x_1 , Δy_1 を消去すれば、 $\Delta y_0 = 1/4 (4x_0 + 1 + \sqrt{8x_0^2 + 1})$ がもとめる (3) での領域となる。

(2) 領域に対応するものは、同様に、第 3 番めの $(x_2, \Delta y_2)$ の値が、ade 曲線の下にはいれればよいから、 $x_0 - \Delta y_0 = x_1$, $x_1 - \Delta y_1 = x_2$, $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$, $\Delta y_2 = x_2^2 + x_2$ [前と同様に (2) の領域に書きあらためてある] より、 x_0 と Δy_0 との関係をもとめればよい。しかし、これらの式より、 x_1 , Δy_1 , x_2 , Δy_2 を消去してもとめることは、複雑であるので次の逐次解法による。 $\Delta y_2 = x_2^2 + x_2$ を満足する x_2 , Δy_2 を与えれば、 $\Delta y_2 = x_1^2 - x_2^2$ より負の x_1 [(2) 領域では、 x_1 は負となるから] をもとめ、次に $\Delta y_1 = x_1 - x_2$ より Δy_1 をもとめる。最後に $\Delta y_1 = x_0^2 - x_1^2$, $x_0 - \Delta y_0 = x_1$ より、 x_0 , Δy_0 をもとめる。ここで、最初の x_2 , Δy_2 は、dk 曲線上の値を用いれればよい。