621.833.1.031.2:539.384/.385

船用減速歯車の荷重分布*

(第1報, 平歯車の場合)

林

国

—**

Load Distribution in Marine Reduction Gears

(1st Report, Spur Gears)

by Kunikazu HAYASHI

The exact or approximate solutions of the equation of tooth load distribution in marine turbine reduction gears have been developed in these fifteen years. On the other hand there have been many qualitative considerations from the empirical data about the factors which affect the load distribution. Also, some approximate formulae have been used to obtain the maximum concentrated load which generally arises at the torqued end of a pinion. Nevertheless, it is still necessary to consider the important factors theoretically in detail, and to assure the theory on the basis of proper experiments. In this paper the theory of load distribution in the case of a spur gear is presented describing the shape of the pinion as exactly as possible. The experimental results are also included. And it is shown that the theory agrees very well with the experimental load distributions.

1. 緒 言

船用主機の減速歯車では小歯車が軸方向に細長いので、トルクが加わると小歯車がたわみ、そのために歯に加わる軸方向の荷重分布は様にはならない。一般にトルクを加える端部で最も大きく、平均値の2倍程度に達することは普通である。したがって荷重分布を知ることが設計上必要で、この問題については Poritsky, Sutton, Pernick⁽¹⁾による微分方程式の解および星野⁽²⁾による積分方程式の近似解があるが、結果を実用するに当ってはなお考慮すべき因子が残されているようである。たとえば軸くび部分のたわみの影響として荷重分布はかなり変化する。また小歯車のたわみは単純な曲げおよびねじりの理論に従って求めているので、実際と一致するか否かを実験的に確かめることが必要で、本報では平歯車の場合について小歯車の軸くびのたわみを考慮して荷重に関する積分方程式の級数解を求め、模型によって行なわれた実験値と比較した。

2. 荷重分布の基礎式

計算を簡単にするために次の仮定を設けた。(1)平歯車で中みぞおよび端部の逃げはない。(2)せん断力

による小歯車のたわみを無視する。(3)軸受の部分は単純支持で荷重を受けても変位しない。(4)小歯車には純トルクが加わる。(5)大小歯車の歯を単純線形ばねが軸方向に連続に分布したものにおきかえる。(6)小歯車を歯のない円筒でおきかえ、歯すじに加わる荷重は円筒の外周に軸に直角な面内で接線方向に加わる。(7)大歯車の歯以外の部分は剛体である。(8)大小歯車の歯は無荷重のとき均一に当たっている。なお以上の仮定のうち(6)については後に歯のある場合を考慮し、また歯の当りが均一でないときの荷重分布も後に求める。第1図は小歯車を単純化した円筒の外周に荷重が加わっている状態を示す。円筒にトルク T_0 が加えられたとき反力として外周に荷重 w が発生する。

第1図 小歯車のたわみ

* 昭和 35 年 6 月 24 日 東海支部浜松地方講演会において講演、原稿受付 昭和 35 年 10 月 25 日。

** 正員、東京工業大学精密工学研究所(東京都目黒区大岡山 1)

この荷重のために円筒は曲げたわみ δ_1 とねじりたわみ δ_2 を生ずる。ただし δ_2 は円筒の外周におけるねじれ量を表わす。また荷重 w による歯すなわちばねのたわみを δ_3 とし、 δ_1 、 δ_2 、 δ_3 を材料力学の簡単な公式に従って求めれば

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{EI} \int \int_{-l}^x (x-\xi) w(\xi) d\xi dx^2 - \frac{R_B}{EI} \left(\frac{L}{2} x^2 + \frac{x^3}{6} \right) + c_1 x + c_2 \\ \delta_2 &= \frac{R_g^2}{GI_p} \int \int_{-l}^x w(\xi) d\xi dx + c_0 \\ \delta_3 &= \frac{w(x)}{k} \quad (-l \leq x \leq l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

となる。ただし x は円筒の長さの中央からトルク端に向かってとった軸方向の座標、 l は円筒の長さの $1/2$ 、 L は軸受中心距離の $1/2$ 、 R_B はトルクが加わっていない側 (自由端) の軸受の反力、 E 、 G はそれぞれ円筒の材料の縦および横弾性係数、 I 、 I_p はそれぞれ円筒の断面二次および二次極モーメント、 R_g は円筒の半径、 k はばねのこわさである。また c_0 、 c_1 、 c_2 は積分定数である。大歯車が固定されているとき、第1図 (b) でばねの先端 E は固定され、はじめ軸受中心線 O に一致していた円筒の中心は C まで曲げにより δ_1 だけたわみ、最初水平だった動径 $\overline{CD}$ がトルクにより $\overline{CD'}$ までねじれ、その外周上のたわみは δ_2 である。ばねのたわみは δ_3 であるから次の関係が成り立つ。

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

(1) 式を (2) 式に代入し、次の記号

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{GI_p l^2}{EI R_g^2}, \quad \lambda_2 = \frac{k R_g^2 l^2}{GI_p} \\ R_A &= \frac{T_0}{2R_g} r_a, \quad R_B = \frac{T_0}{2R_g} r_b \\ w &= \frac{T_0}{2R_g l} f, \quad \frac{x}{l} = \eta, \quad \frac{\xi}{l} \rightarrow \xi \\ A_0 &= \frac{2GI_p}{T_0 l R_g} c_0, \quad A_1 = \frac{2GI_p}{T_0 R_g} c_1, \quad A_2 = \frac{2GI_p}{T_0 l R_g} c_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

を用いて無次元化すれば

$$\lambda_1 \int \int_{-1}^{\eta} (\eta - \xi) f(\xi) d\xi d\eta^2 - \int \int_{-1}^{\eta} f(\xi) d\xi d\eta + \frac{1}{\lambda_2} f(\eta) - \lambda_1 r_b \left(\frac{L}{2l} \eta^2 + \frac{\eta^3}{6} \right) - A_0 + A_1 \eta + A_2 = 0 \dots\dots (4)$$

$$(-1 \leq \eta \leq 1)$$

が得られる。これは荷重 $f(\eta)$ に関する積分方程式である。

3. 級 数 解

(4) 式の解として無限級数

$$f(\eta) = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots\dots\dots (5)$$

を仮定する。 a_0 、 a_1 、 a_2 、 $\dots\dots$ は未定係数である。(4) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n! \eta^{n+4}}{(n+4)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n! \eta^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{1}{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n + \frac{\lambda_1}{6} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+1} - r_b \right\} \eta^3 \\ + \frac{\lambda_1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+2} - \frac{L r_b}{l} \right\} \eta^2 - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+1} - A_1 \right\} \eta - A_0 + A_2 = 0 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

を得る。上式が $-1 \leq \eta \leq 1$ なるすべての η に対して成立するためには左辺の η の各べきの係数は零にならなければならないことから次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \eta^0 : \text{係数} &: \frac{a_0}{\lambda_2} - A_0 + A_2 = 0 \\ \eta &: \frac{a_1}{\lambda_2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+1} + A_1 = 0 \\ \eta^2 &: -\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+2} - \frac{L r_b}{l} \right\} = 0 \\ \eta^3 &: -\frac{a_1}{6} + \frac{a_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{6} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n+1} - r_b \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\eta^n (n \geq 4) : \frac{(n-4)! \lambda_1}{n!} a_{n-4} - \frac{(n-2)!}{n!} a_{n-2} + \frac{a_n}{\lambda_2} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

(8) 式は漸化式で、これから次の関係が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} a_{2m+4} &= \frac{2\beta_m}{(2m+4)!} a_2 - \frac{\beta_{m-1} \lambda_1 \lambda_2}{(2m+4)!} a_0 \\ a_{2m+5} &= \frac{6\beta_m}{(2m+5)!} a_3 - \frac{\beta_{m-1} \lambda_1 \lambda_2}{(2m+5)!} a_1 \end{aligned} \right\} (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (9)$$

ただし β_m は

m	β_m
-1	1
0	λ_2
1	$\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)$
2	$\lambda_2^2(\lambda_2 - 2\lambda_1)$
3	$\lambda_2^3(\lambda_2^2 - 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2)$
4	$\lambda_2^4(\lambda_2^3 - 4\lambda_1\lambda_2^2 + 3\lambda_1^2\lambda_2)$
5	$\lambda_2^5(\lambda_2^4 - 5\lambda_1\lambda_2^3 + 6\lambda_1^2\lambda_2^2 - \lambda_1^3\lambda_2)$
$\vdots$	$\vdots$

$$\dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。したがって $a_0 \sim a_3$ が決定されれば a_4 以上は (9) 式から求められる。(7) 式で未知数は $A_0, A_1, A_2, r_b, a_0 \sim a_3$ の 8 個でそれを決定するための方程式は 4 個であるから式が 4 個不足である。追加すべき方程式は、まず小歯車の歯に分布している荷重とトルク T_0 のつりあいから

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2 \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。軸受の反力 r_a, r_b は

$$\left. \begin{aligned} r_a &= 1 + \frac{l}{2L} \int_{-1}^1 \xi f(\xi) d\xi \\ r_b &= 1 - \frac{l}{2L} \int_{-1}^1 \xi f(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。次に第 2 図で継手側の軸くびの軸受中心から x_1 の距離におけるたわみを y_1 、自由端の軸くびについて x_2, y_2 とすれば境界条件は

$$\left. \begin{aligned} (y_1)_{x_1=0} &= 0, (y_2)_{x_2=0} = 0 \\ (y_1)_{x_1=L-l} &= (\delta_1)_{x=l}, (y_2)_{x_2=L-l} = (\delta_1)_{x=-l} \\ \left(\frac{dy_1}{dx_1} \right)_{x_1=L-l} &= - \left(\frac{d\delta_1}{dx} \right)_{x=l}, \left(\frac{dy_2}{dx_2} \right)_{x_2=L-l} = \left(\frac{d\delta_1}{dx} \right)_{x=-l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

である。軸くびのたわみ y_1, y_2 は容易に求められそれぞれ 2 個の積分定数を含む。(11) 式から (13) 式までで 9 個の方程式が追加されたが、あらたに未知数も 5 個増加し、結局 (7), (11), (12), (13) の 13 個の方程式に対して未知数も 13 個であるから解くことができ、 $a_0 \sim a_3$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{F_2 + \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{L}{l} D_2}{D_0 \left(F_2 + \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) - D_2 \left(F_0 - \frac{1}{\lambda_1} \right)} \\ a_2 &= \frac{\frac{L}{l} D_0 - F_0 + \frac{1}{\lambda_1}}{D_0 \left(F_2 + \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) - D_2 \left(F_0 - \frac{1}{\lambda_1} \right)} \\ a_1 &= \frac{D_3 - \frac{l}{L} F_3 - \frac{6}{\lambda_1 \lambda_2}}{N_1 \left(D_3 - \frac{l}{L} F_3 - \frac{6}{\lambda_1 \lambda_2} \right) - N_3 \left(D_1 - \frac{l}{L} F_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right)} \frac{2L}{\lambda_1 l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

第2図 軸くびのたわみ

$$a_3 = \frac{\frac{l}{L} F_1 - D_1 - \frac{1}{\lambda_1}}{N_1 \left(D_3 - \frac{l}{L} F_3 - \frac{6}{\lambda_1 \lambda_2} \right) - N_3 \left(D_1 - \frac{l}{L} F_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right)} \frac{2L}{\lambda_1 l}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= 1 - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{m-1}}{(2m+5)!}, & F_0 &= \frac{1}{2} - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{m-1}}{(2m+6)(2m+4)!} \\ D_1 &= \frac{1}{2} - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{m-1}}{(2m+6)!}, & F_1 &= \frac{1}{3} - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{m-1}}{(2m+7)(2m+5)!} \\ D_2 &= \frac{1}{3} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{(2m+5)!}, & F_2 &= \frac{1}{4} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{(2m+6)(2m+4)!} \\ D_3 &= \frac{1}{4} + 6 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{(2m+6)!}, & F_3 &= \frac{1}{5} + 6 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{(2m+7)(2m+5)!} \\ N_1 &= \frac{2L}{\lambda_1 l} D_1 + \frac{2II}{3LI_1} \left(\frac{L}{l} - 1 \right)^3 F_1 - 2 \left(\frac{L}{l} - 1 \right) J_1 - 2K_1 + \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{2L}{l\lambda_2} - \frac{L}{l} + \frac{2}{3} \right) \\ N_3 &= \frac{2L}{\lambda_1 l} D_3 + \frac{2II}{3LI_1} \left(\frac{L}{l} - 1 \right)^3 F_3 - 2 \left(\frac{L}{l} - 1 \right) J_3 - 2K_3 + \frac{6}{\lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{L}{l} - \frac{2}{3} \right) \\ J_0 &= \frac{1}{3!} - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{m-1}}{(2m+7)!}, & K_0 &= \frac{1}{4!} - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{m-1}}{(2m+8)!} \\ J_1 &= \frac{1}{4!} - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{m-1}}{(2m+8)!}, & K_1 &= \frac{1}{5!} - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{m-1}}{(2m+9)!} \\ J_2 &= \frac{2!}{5!} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{(2m+7)!}, & K_2 &= \frac{2!}{6!} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{(2m+8)!} \\ J_3 &= \frac{3!}{6!} + 6 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{(2m+8)!}, & K_3 &= \frac{3!}{7!} + 6 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{(2m+9)!} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

($m=0, 1, 2, \dots$)

である。 I_1 は小歯車の軸くびの断面二次モーメントである。反力 r_a , r_b は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} r_a &= 1 + \frac{l}{2L} (F_1 a_1 + F_3 a_3) \\ r_b &= 1 - \frac{l}{2L} (F_1 a_1 + F_3 a_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

各部のたわみは荷重が決定されたので (1) 式から求めることができ、結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{T_0 l^3}{2R_g EI} \left[U_{10} + \frac{U_1}{\lambda_1} \frac{x}{l} + \left(\frac{a_0}{2\lambda_1} - \frac{a_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{6\lambda_1} - \frac{a_3}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{(n+4)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{n+4} \right] \\ \delta_2 &= \frac{T_0 l^3}{2R_g EI} \left[\frac{U_{11}}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1} (1 - D_1 a_1 - D_3 a_3) \frac{x}{l} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_1 (n+1)(n+2)} \left(\frac{x}{l} \right)^{n+2} \right] \\ \delta_3 &= \delta_2 - \delta_1 = \frac{T_0 l^3}{2R_g EI \lambda_1 \lambda_2} \left[a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

($-1 \leq \frac{x}{l} \leq 1$)

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{T_0 l^3}{2R_g EI} \left[\left(\frac{L}{l} - 1 \right) U_9 - \frac{x_1}{L-l} - \frac{I}{6I_1} \left(\frac{L}{l} - 1 \right)^3 \left(1 + \frac{l}{L} F_1 a_1 + \frac{l}{L} F_3 a_3 \right) \left(\frac{x_1}{L-l} \right)^3 \right] \\ y_2 &= \frac{T_0 l^3}{2R_g EI} \left[\left(\frac{L}{l} - 1 \right) U_8 - \frac{x_2}{L-l} - \frac{I}{6I_1} \left(\frac{L}{l} - 1 \right)^3 \left(1 - \frac{l}{L} F_1 a_1 - \frac{l}{L} F_3 a_3 \right) \left(\frac{x_2}{L-l} \right)^3 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$0 \leq \left(\frac{x_1}{L-l}, \frac{x_2}{L-l} \right) \leq 1$

ただし

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 1 - \left(\frac{1}{\lambda_2} + D_1 \right) a_1 - D_3 a_3 \\ U_2 &= \left(J_0 + \frac{1}{\lambda_1} \right) a_0 + \left(J_2 - \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) a_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 U_3 &= \left(K_0 + \frac{1}{2\lambda_1}\right) a_0 + \left(K_2 - \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\right) a_2 \\
 U_4 &= a_1 \left[-\frac{D_1}{\lambda_1} - \frac{I_1}{I_1 L} \left(\frac{L}{l} - 1\right)^2 \frac{F_1}{2} + J_1 + \frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \right] \\
 U_5 &= a_3 \left[-\frac{D_3}{\lambda_1} - \frac{I_1}{I_1 L} \left(\frac{L}{l} - 1\right)^2 \frac{F_3}{2} + J_3 - \frac{3}{\lambda_1\lambda_2} \right] \\
 U_6 &= a_1 \left[\frac{D_1}{\lambda_1} - \frac{I_1}{I_1 L} \left(\frac{L}{l} - 1\right)^3 \frac{F_1}{6} - K_1 + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} - \frac{1}{6\lambda_1} \right] \\
 U_7 &= a_3 \left[\frac{D_3}{\lambda_1} - \frac{I_1}{I_1 L} \left(\frac{L}{l} - 1\right)^3 \frac{F_3}{6} - K_3 + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \right] \\
 U_8 &= -U_2 + U_4 + U_5 + \frac{I}{2I_1} \left(\frac{L}{l} - 1\right)^2 + \frac{1}{\lambda_1} \\
 U_9 &= -U_2 - U_4 - U_5 + \frac{I}{2I_1} \left(\frac{L}{l} - 1\right)^2 - \frac{1}{\lambda_1} \\
 U_{10} &= -U_3 - U_6 - U_7 + \left(\frac{L}{l} - 1\right) U_8 + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{I}{6I_1} \left(\frac{L}{l} - 1\right)^3 \\
 U_{11} &= \frac{a_0}{\lambda_2} + \lambda_1 U_{10}
 \end{aligned} \tag{19}$$

である。

4. 歯形の考慮

前節までの計算は小歯車を弾性的に等価な歯のない円筒におきかえて行なったので、等価の条件について検討すると、まず曲げたわみは円筒としても歯があるとしても EI が同じであれば等価である。ねじりたわみについては第3図で R_g を基礎円の半径、 θ をねじれ角とすると、 θ とねじりたわみ δ_2 との関係は図から

$$\overline{AB} = \overline{PQ} = R_g \theta$$

ゆえに

$$\delta_2 = R_g \theta$$

歯車の中心Oに関するトルクは wR_g である。したがってねじりたわみについては、円筒の半径 R_g として小歯車の基礎円の半径を用いれば前節までの計算をそのまま適用できる。歯のたわみについては、たわみをかみあい線の方で測り、歯の曲げこわさ k もかみあい線の方の値を用いれば前節までの計算がそのまま適用できる。

5. 大小歯車の歯すじの平行度の影響

小歯車と大歯車の歯すじが第4図のように相対的に傾いていれば当然荷重分布が変化する。この傾きを零にすることはおそらく不可能で、たとえ停止時に完全な当りを出しても、運転時には前後の軸受の荷重の不平等によって傾くし、ケースの変形も前後が同じようにはならないであろうから傾きは不可避と考えられる。傾きがある場合は図のように当りが強いところで

は Δ だけ余分にたわまねばならないから、(2) 式が修正されて

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \Delta = 0 \tag{20}$$

となる。 Δ として

$$\Delta = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x \tag{21}$$

を与えると、(5) 式で表わされる荷重分布の奇数べきの係数のみが増加して

$$a_{2m+1}' = a_{2m+1} \left(1 + \frac{2GI_p}{T_0 R_g l} \varepsilon_1 \right) \tag{22}$$

($m=0, 1, 2, \dots$)

が得られる。ただし a_{2m+1}' は傾き ε_1 があるときの

第3図 ねじりたわみにおける歯形の考慮

第4図 歯の当りの平行度誤差

係数, a_{2m+1} は $\epsilon_1=0$ のときの係数で (14) および (9) 式で与えられている。傾きのこう配 ϵ_1 は大小歯車の歯のすきまが継手端に向かって狭くなるときに正であるとする。

6. 数値計算例

小歯車の寸法が与えられると (3) 式から小歯車の形状を表わす定数 λ_1, λ_2 が求められる。以後 (10), (15), (14), (9), (5) 式の順に計算すれば荷重分布が得られる。(15) 式の無限級数は収束が非常に速く, 現在実用されている程度の細長さの小歯車では級数項を第 2 項まで, すなわち $m=1$ までとれば, 有効数字で 4 けたまで正しい値が得られるので計算は比較的容易である。また D, F, H, K はパラメータとして λ_1 と λ_2 を含んでいるのみであるから数表として与えることもできる。荷重分布を表わす級数は 6 次の項程度までとれば小数点以下 3 けたまで正しい値が得られる。次に $\lambda_1, \lambda_2, L/l, I/I_1, \epsilon_1$ が荷重分布に及ぼす影響を調べると, まず第 5 図は歯の曲げこわさ k を一定にして l/R_g を変化させたもので, この場合 λ_1/λ_2 = 一定という関係があることは (3) 式から明らかである。 $\lambda_1=3, 5, 7$ のとき l/R_g はそれぞれ約 1.9, 2.5, 2.9 である。継手端で荷重は最も大きく, 小歯車が細長くなるほど増加する。第 6 図は l/R_g を一定値 1.9

に保って歯の曲げこわさ k を変化させた場合で, 歯がこわくなるほど継手端の最大荷重が増加する。第 7 図は $\lambda_1, \lambda_2, I/I_1$ を一定にして L/l を変化させた場合で, L/l が大きいほどすなわち小歯車の寸法が一定でも前後の軸受の中心距離が大きいほど継手端における荷重が増加する。 λ_1, λ_2 ほど影響が大きくはないが, Poritsky らの場合のように $L/l=1$ とすると 20% 程度の誤差を生じ, しかも最大荷重を過小に見積ることになるので危険である。第 8 図は $\lambda_1, \lambda_2, L/l$ を一定にして I/I_1 を変化させたときの荷重分布の変化を示すが, $I/I_1=1$ すなわち小歯車の歯のある部分の直径が軸くびまでそのまま延長しているときでも, 軸くびの断面二次モーメントが歯のある部分の $1/10$ になっても荷重分布はごくわずかに変化するのみであるから常に $I/I_1=1$ として計算してもさしつかえない。第 9 図は大小歯車の歯の当りの平行度誤差 ϵ_1 の影響を示す。図の計算例は 9000 IP の一段小歯車にほぼ相当するもので, $\epsilon_1=2.2 \times 10^{-4}$ は軸受間隔 1 m につき 0.022 mm の当り誤差で, 荷重分布に大きい影響をおよぼすことがわかるが, ϵ_1 が負すなわち自由端で当りが強い場合には継手端の最大荷重が減少するので, さらに誤差が大きくなれば逆に自由端で最大荷重となるけれども, 適当な誤差があればかえって有利である。しかし ϵ_1 が正であれば継手端の最大荷重がさらに増加す

第 5 図 荷重分布に及ぼす l/R_g の影響

第 6 図 荷重分布の及ぼす歯の曲げこわさの影響

第 7 図 荷重分布に及ぼす L/l の影響

第 8 図 荷重分布に及ぼす I/I_1 の影響

るので危険である。以上諸因子の影響について数値的に検討したが、各因子の変動の程度と比較して荷重変動の大きいものは λ_1 , λ_2 および ε_1 であって L/l の影響は無視できないが前3者ほど大きくはない。 I/I_1 は無視してもさしつかえない程度である。

7. 実験値

計算結果の妥当性を確かめるために実験を行なった。小歯車は平歯車とし、相手の大歯車は十分な剛性をもつ台と一体の一すじの荷重測定用の受歯でおきかえた。受歯はすり割りによって小歯車の軸方向に20個の幅の狭い歯に分割され、各歯の上面に抵抗線ひずみゲージをはって荷重分布を測定した。小歯車はモジュール2、歯数47、工具圧力角 $14^\circ 30'$ 、 $l=99$ mm, $L=130$ mm, 中みぞの幅17 mm, 外径98 mm, 中心の穴の直径41.5 mm のもので、両端の軸受は内径60 mm の玉軸受を用いた。また受歯と接触する小歯車の歯は受歯と相対するようにすり割りによって20分割され、測定に際しては両腕のレバーで小歯車に純トルクを加えた。第10図に実験結果を示す。点線は歯の当りの平行度誤差を(22)式に従って考慮に入れた理論値で、折線は小歯車と受歯の相対アンジュレーションをも考慮した理論値である。計算は次の方法によった。相対アンジュレーションが小さく、それによる荷重分布の変化が30%程度以下の量なら、小歯車のたわみ曲線の形がほとんど変化しないから荷重分布 w_u は近似的に

$$w_u = w + ke \dots\dots\dots (23)$$

で与えられる。ただし w は相対アンジュレーションが零のときの荷重分布、 k は大小歯車の歯の合成曲げこわさ、 e は平均値から測った相対アンジュレーションで、歯のすきまが狭くなる方向を正とする。また理論

第9図 荷重分布に及ぼす平行度誤差の影響

値は中みぞおよび端部の逃げがないとして導かれたが、全長の1割程度の中みぞおよび端部の逃げがあっても、はりのたわみは荷重分布の変化に対して鈍感であることから、小歯車のたわみ曲線はほとんど変化がないと考えられるので、中みぞなどの存在によって荷重を分担する長さが減少した分だけ各部の荷重を比例的に増加させて近似値とすることができる。第10図の理論値はこの方法で求められたもので、実験値とよく一致している。小歯車ははりまたは棒としてはかなり短く、(1)式のように Saint Venant の法則を用いて簡単に取扱うことの妥当性については疑問があるが、(1)式から導かれた理論的荷重分布と実験値とが第10図のようによく一致するので、この理論は実用上十分な精度をもつ近似であるといえる。なお第10図の理論値を計算するに当たって、歯の曲げこわさ k は実測値を用いた。大小歯車の歯の合成曲げたわみは歯の接触部のたわみを含むので、荷重に対して直線的には変化しないわけであるが、実測の結果は1個の歯に加わる荷重が30~150 kg の範囲では十分な精度で直線的とみなした。

8. 結 言

平歯車の場合について船用減速歯車の歯に加わる荷重の軸方向の分布を小歯車の変形を考えて求めた。荷重分布を変化させる因子を影響の大きいものから記すと、小歯車の長さとの比、歯の曲げこわさ、大小歯車の当りの平行度誤差、相対アンジュレーション、小歯車の軸受中心距離と歯のある部分の長さの比であって、歯車部分と軸くびの断面二次モーメントの比は荷重分布にほとんど影響を与えないので無視してよい

第10図 荷重分布の実験結果

ことが判明した。また理論値と実験値とがよく一致することから、単純なはりの曲げおよびねじりたわみの理論を基礎にしてこの問題を解くことが妥当であることが証明された。本報の結果は単はすば歯車に対しても適用できるが、その場合にはねじれ角その他の寸法を考えて歯の曲げこわさを平歯車と等価なものに換算することが必要である。終りに種々助言をいただいた東京工大の中田 孝、石川二郎両先生に厚くお礼を申

上げる。また本研究は日本造船関連工業会の御援助によるものであることを記して感謝の意を表する。

文 献

- (1) H. Poritsky, A. D. Sutton, & A. Pernick, *J. Appl. Mech.*, **12** (1945), A-78.
- (2) 星野, 日本海事協会技報, **1** (昭28-8), 1 および造船協会論文集, 92 (昭32), 173.

621. 833. 33. 031. 2:539. 38

船用減速歯車の荷重分布*

(第 2 報, やまば歯車の場合)

林 国 一**, 佐 山 武 英***

Load Distribution in Marine Reduction Gears

(2nd Report, Double Helical Gears)

by Kunikazu HAYASHI and Takehide SAYAMA

In the first report the load distribution along the axis of the pinion in turbine reduction gears in the case of spur gears was treated both theoretically and experimentally. It was demonstrated that the solution by infinite series of an integral equation showed excellent agreement with the experimental data. The present paper deals with the case of double helical gears by means of infinite series as in spur gears, considering the effect of the axial components of the load distributed along the pinion teeth. However, the effect is not so serious and therefore may be disregarded in practice. It is shown that the misalignment of bearings and the error in helical angles affect the load distribution greatly. Especially the difference in temperature rise in the pinion and the gear is important. A difference in temperature by a few-degrees in centigrade changes the maximum load by some 30 % or so, increasing or decreasing its value depending on the direction of rotation.

1. 緒 言

第 1 報⁽¹⁾において平歯車の場合の軸方向の荷重分布を積分方程式の級数解として求め、実験⁽²⁾とよく一致することを確認した。そこで第 1 報の方法をやまば歯車に適用して荷重分布を求めた。この問題については星野⁽³⁾が積分方程式の近似解を求め、Poritsky, Sutton およびPernick⁽⁴⁾は微分方程式の解を与えているが、いずれも計算を簡単にするために問題を単純化している。本報は小歯車の形をできるだけ忠実に計算に導入することを主眼とした。

2. 荷重分布の積分方程式

計算を簡単にするために次の仮定を設けた。(1)相手大歯車の歯以外の部分は剛体である。(2)小歯車のせん断力によるたわみを見捨てる。(3)各歯すじに分布している荷重を軸方向に一線上に分布し、しかも小歯車のピッチ点に加わる荷重に置換える。(4)小歯車の中みぞおよび端部の逃げはない。(5)大小歯車の歯は単純線形ばねが軸方向に連続に分布している。(6)小歯車の軸受は単純支持で荷重が加わっても変位しない。(7)小歯車に純トルクを加える。(8)大小歯車の歯間の歯すじ方向の摩擦力を見捨てる。以上の他に無荷重のときに大歯車と小歯車の歯は完全に均一に当たっていることを仮定するが、ねじれ角の誤差、軸受の調

* 昭和 35 年 10 月 14 日 第 38 期東京秋期講演大会において論文講演(第 3 報)として講演、原稿受付 昭和 35 年 7 月 20 日。

** 正員、東京工業大学精密工学研究所 (東京都目黒区大岡山 1)。

*** 准員、新三菱重工業会社神戸造船所。