もな結果を要約すれば次のようである。

(1) ポリエチレンの摩耗-時間曲線の形は接触力にはあまり左右されないが、振幅に大きく依存する。振幅の増加とともに初期摩耗の領域が長くなり、摩耗量は摩擦距離に対して直線的に変化するようになる。ナイロンの摩耗-時間曲線は接触力によって複雑にその形状を変える。

(2) 6-ナイロンは接触力の大きいときはすぐれた耐摩耗性を現わすけれども、接触力が小さくなるに従ってきわめて悪くなり、ポリエチレンにも劣るようになる。ポリエチレンは、反対に、接触力の小さいときはよい耐摩耗特性を示すが、接触力の増加とともにしだいに摩耗特性が悪くなり、普通に予期されるような傾向を示す。

(3) ポリエチレンもナイロンも摩耗量は振幅の増加とともに放物線的に上昇する。

(4) 真空中で γ 線照射を受けたポリエチレンは耐摩耗性を著しく改善するけれども、空気中での照射はかえって悪影響を及ぼす。ナイロンへの γ 線照射はその耐摩耗性を低下させる。

(5) ポリ塩化ビニルの摩耗特性はきわめて悪く、可塑剤の充てんによってもその特性は改善されない。

文 献

- (1) K. V. Sooter, *Proc. Roy. Soc. Lond., Sec. A*, **212** (1952), 488.
- (2) 河本, 広恵外, 機械学会論文集, **18**, 71 (昭27), 42, 49.
- (3) 松原, 機械試験所所報, **5**, 8 (昭26), 345; **8**, 1 (昭29), 8; **10**, 3 (昭31), 115, 131.
- (4) 佐田, 水野, 科学研究所報告, **33**, 2 (昭32), 45.
- (5) 曾田, 青木, 機械学会論文集, **25**, 158 (昭34-10), 995.
- (6) W.P. Mason & R.F. Wick, *J. Acous. Soc. Amer.*, **23**, 2 (1951), 209.
- (7) 佐田, 機械学会論文集, **24**, 143 (昭33-7), 407.
- (8) J.S. Halliday & W. Hirst, *Proc. Roy. Soc. Lond., Sec. A*, **236** (1956), 411.

621-272. 2:539. 384. 1. 385

コイルばねの静的ならびに動的挙動*

(端 末 の 影 響)

清 水 浩**, 井上 順吉***, 日高 照晃***

On the Static and Dynamic Behavior of Coil Springs (The End Effect)

by Hirorhi SHIMIZU, Junkichi INOUE,
and Teruaki HIDAKA

The end effect of a coil spring is analysed from the standpoint of perturbation as that on a three dimensionally curved slender beam which forms a coil spring with a constant pitch angle. The variation of the twisting moment or shearing stresses along the axis of wire becomes large in any numbers of turn near the both ends. The maximum shearing stresses are illustrated in terms of the number of turns of coil springs so as to be convinced to designing.

1. ま え が き

弁ばね, 噴射ポンププランジャ用ばね, ならびに車両ばねなど機械の要素に使用されている圧縮ばねは非常に多く, その需要はますます増加しつつある。一方これに伴ってその性能の向上が近時盛んに要求されるようになった。ばねに関しては, 素線の組成, 処理など材料に関する研究のほか, 強度, 疲れ, 内部摩

擦, 振動, 衝撃などの問題に関してもかなり以前から有益な研究が発表されている。

コイルばねは繰返し応力をうけ端末より一巻ないし二巻付近で折れやすい。これに関して動的あるいは静的考察がなされている。静的応力の解析に関する代表的研究としては次のようなものがある。A. Röver⁽¹⁾はコイル内面と外面では長さが異なるためにモーメントをうけるためのせん断応力は内面に大きいこと, さらに直接荷重からうけるせん断力をこれに加算して, はじめにピッチ角を無視した式を導き, これに後からピッチ角を曲率だけに考慮して式を導いた。当然末端

* 昭和 33 年 11 月 6 日 学部臨時大会講演会において講演, 原稿受付 昭和 35 年 11 月 28 日。

** 正員, 九州大学工学部。

*** 正員, 九州工業大学(戸畑市中原)。

の影響にふれていない。

Wahr⁽²⁾ はせん断応力を2方向に分解して, 垂直方向の分応力が生ぜしめるせん断力を曲りはりに適用し内側の応力を求めている。しかしピッチ角の補正もなく末端の影響も考慮にいていない。この論文では伸び計を用いて応力を測定し, 応力の変動を認め荷重のかかり方や末端の影響に帰している。Göhner⁽³⁾ は弾性力学的にピッチ角を無視して, 素線の断面の応力分布を級数解で求め初等的方法でピッチ角の影響を考慮にいたした式を導入した。しかし Goodier⁽⁴⁾ が例をあげてその導入が誤りであることを指摘している。大久保⁽⁵⁾ も弾性力学的方法で逐次解を導入しているがピッチ角ならびに末端の影響は無視している。中西⁽⁶⁾ は巧みな力学的考察からばねの末端の影響による応力解析を行なった。これは曲りはりの平衡方程式から導いた結果と一致する。ピッチ角の影響を考慮にいていないため整数巻のばねでは簡単な材力理論と一致し応力の変動はないことになるが実験結果と一致しない。しかし末端の影響を取上げた最初の研究で意義深いものがある。筆者のひとり⁽⁷⁾ は Kirchhoff の方程式から出発し数値計算によって素線に沿っての応力分布を求めた。ここでは Kirchhoff の方程式から出発し摂動論の見地から断面力ならびに断面偶力の一般式を導く。本論文で用いるおもな記号を次のように定める(第1図参照)。

- x, y, z : つる巻線上の任意の点における主法線,
陪法線, および接線, 方向の座標
 u, v, w : x, y, z 軸に関する変位成分
 N_1, N_2, T : 断面力の x, y, z 成分
 M_x, M_y, M_z : 断面モーメントの x, y, z 成分
 β : 変形前の xz 面と変形後のそれに対応する面のなす角
 θ : コイル軸まわりの角座標
 s : 素線軸にそって測った長さ
 s_0 : 素線軸にそって測ったコイルばねの全長
 φ : 巻き角

幾何学的関係は

$$\left. \begin{aligned} M_x &= EI\kappa_1, & \kappa_1 &= \kappa_0\beta - \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{ds} + \tau_0 u \right) - \tau_0 \left(\frac{du}{ds} - \tau_0 v + \kappa_0 w \right) \\ M_y &= EI(\kappa_2 - \kappa_0), & \kappa_2 &= \kappa_0 + \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{ds} - \tau_0 v + \kappa_0 w \right) - \tau_0 \left(\frac{dv}{ds} + \tau_0 u \right) \\ M_z &= 2GI(\tau - \tau_0), & \tau &= \tau_0 + \frac{d\beta}{ds} + \kappa_0 \left(\frac{dv}{ds} + \tau_0 u \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

軸力 T と伸び e との関係は

$$T = Eae, \quad e = \frac{dw}{ds} - \kappa_0 u \dots\dots\dots (4)$$

第 1 図

- κ_0 : 変形前のつる巻線の曲率ベクトルの y 成分
 τ_0 : 変形前のつる巻線のねじれ率
 κ_1 : 変形後の素線の軸の曲率ベクトルの x 成分
 κ_2 : 変形後の素線の軸の曲率ベクトルの y 成分
 τ : 変形後のねじれ率
 I : 素線の断面のその一つの直径のまわりの断面二次モーメント
 a : 素線の断面積
 c : 素線の半径
 r : コイル半径, E : 縦弾性係数
 ϵ : ピッチ角, G : 横弾性係数。

2. 基礎方程式と境界条件

細い棒の曲げに関する静的の場合の Kirchhoff の基礎式をこの場合にあてはめると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{ds} - N_2\tau_0 + T\kappa_0 &= 0 \\ \frac{dN_2}{ds} + N_1\tau_0 &= 0 \\ \frac{dT}{ds} - N_1\kappa_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_x}{ds} - M_y\tau_0 + M_z\kappa_0 - N_2 &= 0 \\ \frac{dM_y}{ds} + M_x\tau_0 + N_1 &= 0 \\ \frac{dM_z}{ds} - M_x\kappa_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(1) 式の第 1 ならびに第 3 式より T を消去すれば

$$\frac{d^2 N_1}{ds^2} + \kappa_0^2 N_1 - \tau_0 \frac{dN_2}{ds} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

(5) 式に (2) 式の第 1 および第 2 式より算出した N_1 ならびに N_2 をいれて (3) 式の関係を用いると、

$$\frac{d^5 u}{ds^5} + \kappa_0 \frac{d^4 u}{ds^4} + \kappa_0^2 \frac{d^3 u}{ds^3} + \kappa_0^3 \frac{d^2 w}{ds^2} + \sum_{i=1}^4 K_i \tau_0^i = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -\left\{ 4 \frac{d^4 v}{ds^4} + \left(3 - \frac{1}{\mu} \right) \kappa_0^2 \frac{d^2 v}{ds^2} - \left(2 + \frac{1}{\mu} \right) \kappa_0 \frac{d^2 \beta}{ds^2} - \kappa_0^3 \beta \right\} \\ K_2 &= -\left\{ 6 \frac{d^3 u}{ds^3} + 3 \kappa_0^2 \frac{du}{ds} - \frac{\kappa_0^2}{\mu} \frac{du}{ds} + 3 \kappa_0 \frac{d^2 w}{ds^2} + \kappa_0^3 w \right\} \\ K_3 &= \left(4 \frac{d^2 v}{ds^2} + \kappa_0^2 v \right) \\ K_4 &= \frac{du}{ds} \quad \text{ただし} \quad \mu = \frac{E}{2G} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

同様に (1) 式の第 1 式より

$$\left(\frac{dw}{ds} - \kappa_0 u \right) \kappa_0 - \alpha' \left(\frac{d^4 u}{ds^4} + \kappa_0 \frac{d^3 w}{ds^3} \right) + \alpha' \sum_{i=1}^3 k_i \tau_0^i = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\left\{ -\frac{d^3 v}{ds^3} + \frac{1}{\mu} \cdot \kappa_0 \left(\frac{d\beta}{ds} + \kappa_0 \frac{dv}{ds} \right) \right\} \\ k_2 &= \frac{d^2 u}{ds^2} + \kappa_0 \frac{dw}{ds} - \frac{1}{\mu} \kappa_0^2 u \\ k_3 &= -\frac{dv}{ds}, \quad \alpha' = \frac{c^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

(8) 式の方程式を一度微分し、それと α' 倍した (6) 式の方程式を加え合わせると、

$$\kappa_0 (1 + \alpha' \kappa_0^2) \frac{d^2 w}{ds^2} - \kappa_0^2 \frac{du}{ds} + \alpha' \kappa_0^2 \frac{d^3 u}{ds^3} = -\alpha' \sum_{i=1}^4 \left(K_i + \frac{dk_i}{ds} \right) \tau_0^i \quad \dots\dots\dots (10)$$

次に (8) 式と (10) 式から u の微係数をその高いほうから順次消去すれば曲げと伸びの微分方程式ならびに u と w の関係は

$$\kappa_0 \frac{d^6 w}{ds^6} + 2 \kappa_0^3 \frac{d^4 w}{ds^4} + \kappa_0^5 \frac{d^2 w}{ds^2} + \kappa_0^2 \sum_{i=1}^4 K_i \tau_0^i + \alpha' \sum_{i=1}^4 \left(\kappa_0^2 \frac{d^3 k_i}{ds^3} + \frac{d^5 k_i}{ds^5} + \frac{d^4 K_i}{ds^4} \right) \tau_0^i = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$u = \frac{1}{\{\kappa_0^4 (1 + \alpha' \kappa_0^2)\}} \left[\kappa_0^3 \frac{dw}{ds} + \alpha' \left(\kappa_0^5 \frac{dw}{ds} - \kappa_0^3 \frac{d^3 w}{ds^3} - \kappa_0 \frac{d^5 w}{ds^5} \right) - \alpha' \sum_{i=1}^4 \left\{ -\kappa_0^2 k_i + \alpha' \left(\frac{d^3 K_i}{ds^3} + \frac{d^4 k_i}{ds^4} - \kappa_0^4 k_i - \kappa_0^2 \frac{dK_i}{ds} \right) \tau_0^i \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

$\alpha' \kappa_0^2 = (c^2/4r^2) \cdot \cos^4 \epsilon$ がきわめて小さい場合、すなわちばねの形状係数 $(c/2r)^2$ がきわめて小さい場合には $u = (1/\kappa_0)(dw/ds)$ となり、伸びがない場合の u と w の関係式に一致する。ピッチ角 ϵ がきわめて小さい場合には Waltking⁽⁸⁾ が円形弧で誘導した伸びを考慮にいたした u と w の式に一致する。

$$u = \frac{dw}{d\theta} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left(\frac{d^3 w}{d\theta^3} + \frac{d^5 w}{d\theta^5} \right), \quad \alpha = \left(\frac{c}{2r} \right)^2$$

(2) 式の第 3 式に (3) 式の関係を用いると

$$\frac{d^2 \beta}{ds^2} + (1 + \mu) \kappa_0 \frac{d^2 v}{ds^2} - \kappa_0^2 \mu \beta + \tau_0 \left\{ (1 + 2\mu) \kappa_0 \frac{du}{ds} + \mu \kappa_0^2 w \right\} - \tau_0^2 \mu \kappa_0 v = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

(1) 式の第 2 式および (2) 式の第 1 ならびに第 2 式より

$$\begin{aligned} (1 + \mu) \kappa_0 \frac{d^2 \beta}{ds^2} - \mu \frac{d^4 v}{ds^4} + \kappa_0^2 \frac{d^2 v}{ds^2} - \tau_0 \left(4 \mu \frac{d^3 u}{ds^3} - \kappa_0^2 \frac{du}{ds} + 3 \mu \kappa_0 \frac{d^2 w}{ds^2} \right) \\ + \tau_0^2 \left(6 \mu \frac{d^2 v}{ds^2} - \kappa_0 \mu \beta \right) + \tau_0^3 \left(4 \mu \frac{du}{ds} + \mu \kappa_0 w \right) - \tau_0^4 \mu v = 0 \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

(11), (12), (13) 式ならびに (14) 式はコイルばねの基礎方程式である。コイルばねのピッチ角を考えた場合にはコイル面内の変形とコイル面外の変形は独立でない。いま上端を δ だけ圧縮した場合について考える。端面は平行で平面になるように素線が削られてあるから、自由コイルの付根では断面の回転は止められていると考える⁽⁶⁾。さらに自由コイルの付根のところでは変位も許さぬとすれば境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} s=0, \quad u=0, \quad \frac{du}{ds}=0, \quad w=0, \quad v=0, \quad \frac{dv}{ds}=0, \\ \beta=0. \\ s=s_0, \quad u=0, \quad \frac{du}{ds}=0, \quad w=-\delta \sin \varepsilon, \\ v=-\delta \cos \varepsilon, \quad \frac{dv}{ds}=0, \quad \beta=0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

したがって (11), (12), (13) 式ならびに (14) 式の連立微分方程式を (15) 式の条件で解くことになる。正攻法では非常に複雑になる。しかしピッチ角は一般に小さいから摂動論の見地から近似解を求める。

とおき多少の計算結果、次式をうる。

$$L[w_0]=0, \quad L[v_0]=0, \quad \beta_0=M[v_0] \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} L[w_1] &= 4 \frac{d^4 v_0}{d\theta^4} + \left(3 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{d^2 w_0}{d\theta^2} - \left(2 + \frac{1}{\mu}\right) r \frac{d^2 \beta_0}{d\theta^2} - r \beta_0 \\ &\quad - \alpha \left\{ \frac{d^6 v_0}{d\theta^6} + \frac{d^6 v_0}{d\theta^6} - \frac{1}{\mu} \left(\frac{d^4 v_0}{d\theta^4} + \frac{d^6 v_0}{d\theta^6} \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{d^4 \beta_0}{d\theta^4} + \frac{d^6 \beta_0}{d\theta^6} \right) \right\} \\ &\quad - \alpha \frac{d^2}{d\theta^2} \left\{ 4 \frac{d^4 v_0}{d\theta^4} + \left(3 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{d^2 v_0}{d\theta^2} - \left(2 + \frac{1}{\mu}\right) r \frac{d^2 \beta_0}{d\theta^2} - r \beta_0 \right\} \\ L[v_1] &= \frac{1+\mu}{\mu} \frac{d^2 l_1}{d\theta^2} - \frac{1}{\mu} \frac{d^2 m_1}{d\theta^2} + m_1 \\ \beta_1 &= M[v_1] - \frac{l_1}{\mu} + \frac{m_1}{\mu(1+\mu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} L[v_2] &= \frac{1+\mu}{\mu} \frac{d^2 l_2}{d\theta^2} - \frac{1}{\mu} \frac{d^2 m_2}{d\theta^2} + m_2 \\ \beta_2 &= M[v_2] - \frac{l_2}{\mu} + \frac{m_2}{\mu(1+\mu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{ただし } l_1 = - \left\{ (1+2\mu) \frac{dv_0}{d\theta} + \mu w_0 \right\}$$

$$m_1 = 4\mu \frac{d^3 u_0}{d\theta^3} - \frac{du_0}{d\theta} + 3\mu \frac{d^2 w_0}{d\theta^2}$$

$$l_2 = - (1+2\mu) \frac{du_1}{d\theta} - \mu w_1 + \mu w_0 + (1+\mu) \frac{d^2 v_0}{d\theta^2} - \mu r \beta_0$$

$$m_2 = 4\mu \frac{d^3 u_1}{d\theta^3} - \frac{du_1}{d\theta} + 3\mu \frac{d^2 w_1}{d\theta^2} - 6\mu \frac{d^2 v_0}{d\theta^2} + \mu r \beta_0 - \frac{d^2 v_0}{d\theta^2}$$

(12) 式より α^2 以上は微小量として省略すれば

3. 基礎方程式の解

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 + q w_1 + q^2 w_2 + \dots\dots \\ u &= u_0 + q u_1 + q^2 u_2 + \dots\dots \\ v &= v_0 + q v_1 + q^2 v_2 + \dots\dots \\ \beta &= \beta_0 + q \beta_1 + q^2 \beta_2 + \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{x0} + q M_{x1} + q^2 M_{x2} + \dots\dots \\ M_y &= M_{y0} + q M_{y1} + q^2 M_{y2} + \dots\dots \\ M_z &= M_{z0} + q M_{z1} + q^2 M_{z2} + \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N_{10} + q N_{11} + q^2 N_{12} + \dots\dots \\ N_2 &= N_{20} + q N_{21} + q^2 N_{22} + \dots\dots \\ T &= T_0 + q T_1 + q^2 T_2 + \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

とおき (11) 式から (14) 式までの式に

$$\begin{aligned} \tau_0 &= (\sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon) / r, \quad \kappa_0 = \cos^2 \varepsilon / r, \\ d/ds &= (\cos \varepsilon / r) d/d\theta \end{aligned}$$

といれて $\sin \varepsilon = q$ の降べきの順に整えた式に (16) 式を代入し q の同次の係数を零と置く。いま

$$\begin{aligned} L &= \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1 \right)^2, \\ M &= \frac{1}{(1+\mu)r} \frac{d^2}{d\theta^2} \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} + (\mu+2) \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_0 &= \frac{dw_0}{d\theta} - \alpha \left(\frac{d^3 w_0}{d\theta^3} + \frac{d^5 w_0}{d\theta^5} \right) \\
 u_1 &= \frac{dw_1}{d\theta} - \alpha \left(\frac{d^3 w_1}{d\theta^3} + \frac{d^5 w_1}{d\theta^5} \right) - \alpha \left\{ -\frac{d^3 w_0}{d\theta^3} + \frac{1}{\mu} \left(r \frac{d\beta_0}{d\theta} + \frac{dv_0}{d\theta} \right) \right\} \\
 u_2 &= \frac{dw_2}{d\theta} - \alpha \left(\frac{d^3 w_2}{d\theta^3} + \frac{d^5 w_2}{d\theta^5} \right) - \alpha \left\{ -\frac{d^3 v_1}{d\theta^3} + \frac{1}{\mu} \left(r \frac{d\beta_1}{d\theta} + \frac{dv_1}{d\theta} \right) \right\} \\
 &\quad + \alpha \left(\frac{d^2 u_0}{d\theta^2} + \frac{dw_0}{d\theta} - \frac{1}{\mu} u_0 \right) - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{d^5 w_0}{d\theta^5} - \frac{d^3 w_0}{d\theta^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{dw_0}{d\theta}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

断面モーメントならびに断面力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 M_{x_0} &= EI \left(\frac{\beta_0}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 v_0}{d\theta^2} \right) \\
 M_{x_1} &= EI \left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 v_1}{d\theta^2} - 2 \frac{1}{r^2} \frac{du_0}{d\theta} - \frac{w_0}{r^2} \right) \\
 M_{x_2} &= EI \left\{ \frac{\beta_2}{r} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 v_2}{d\theta^2} + 2 \frac{du_1}{d\theta} + w_1 \right) - \frac{\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 v_0}{d\theta^2} + v_0 \right) \right\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_{y_0} &= \frac{EI}{r^2} \left(\frac{d^2 u_0}{d\theta^2} + \frac{dw_0}{d\theta} \right) \\
 M_{y_1} &= \frac{EI}{r^2} \left(\frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + \frac{dw_1}{d\theta} - 2 \frac{dv_0}{d\theta} \right) \\
 M_{y_2} &= \frac{EI}{r^2} \left(\frac{d^2 u_2}{d\theta^2} + \frac{dw_2}{d\theta} - 2 \frac{dv_1}{d\theta} - u_0 - \frac{d^2 u_0}{d\theta^2} - \frac{3}{2} \frac{dw_0}{d\theta} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_{z_0} &= 2GI \left(\frac{1}{r} \frac{d\beta_0}{d\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{dv_0}{d\theta} \right) \\
 M_{z_1} &= 2GI \left(\frac{1}{r} \frac{d\beta_1}{d\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{dv_1}{d\theta} + \frac{u_0}{r^2} \right) \\
 M_{z_2} &= 2GI \left(\frac{1}{r} \frac{d\beta_2}{d\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{dv_2}{d\theta} + \frac{u_1}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{d\beta_0}{d\theta} - \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} \frac{dv_0}{d\theta} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_{10} &= -\frac{1}{r} \frac{dM_{y_0}}{d\theta} \\
 N_{11} &= -\frac{1}{r} \left(\frac{dM_{y_1}}{d\theta} + M_{x_0} \right) \\
 N_{12} &= -\frac{1}{r} \left(\frac{dM_{y_2}}{d\theta} - \frac{1}{2} \frac{dM_{y_0}}{d\theta} + M_{x_1} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_{20} &= \frac{1}{r} \left(\frac{dM_{x_0}}{d\theta} + M_{z_0} \right) \\
 N_{21} &= \frac{1}{r} \left(\frac{dM_{x_1}}{d\theta} - M_{y_0} + M_{z_1} \right) \\
 N_{22} &= \frac{1}{r} \left(\frac{dM_{x_2}}{d\theta} - \frac{1}{2} \frac{dM_{x_0}}{d\theta} - M_{y_1} + M_{z_2} - M_{z_0} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned}
 T_0 &= \frac{1}{r} \frac{d^2 M_{y_0}}{d\theta^2} \\
 T_1 &= \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 M_{y_1}}{d\theta^2} + 2 \frac{dM_{x_0}}{d\theta} + M_{z_0} \right) \\
 T_2 &= \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 M_{y_2}}{d\theta^2} + 2 \frac{dM_{x_1}}{d\theta} + M_{z_1} - \frac{dM_{y_0}}{d\theta} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

境界条件 (15) 式は

$$\left. \begin{aligned}
 \theta=0, \quad u_0=0, \quad \frac{du_0}{d\theta}=0, \quad w_0=0, \quad v_0=0, \quad \frac{dv_0}{d\theta}=0, \quad \beta_0=0 \\
 \theta=\varphi, \quad u_0=0, \quad \frac{du_0}{d\theta}=0, \quad w_0=0, \quad v_0=-\delta, \quad \frac{dv_0}{d\theta}=0, \quad \beta_0=0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta=0, \quad u_1=0, \quad \frac{du_1}{d\theta}=0, \quad w_1=0, \quad v_1=0, \quad \frac{dv_1}{d\theta}=0, \quad \beta_1=0 \\ \theta=\varphi, \quad u_1=0, \quad \frac{du_1}{d\theta}=0, \quad w_1=-\delta, \quad v_1=0, \quad \frac{dv_1}{d\theta}=0, \quad \beta_1=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta=0, \quad u_2=0, \quad \frac{du_2}{d\theta}=0, \quad w_2=0, \quad v_2=0, \quad \frac{dv_2}{d\theta}=0, \quad \beta_2=0 \\ \theta=\varphi, \quad u_2=0, \quad \frac{du_2}{d\theta}=0, \quad w_2=0, \quad v_2=\frac{\delta}{2}, \quad \frac{dv_2}{d\theta}=0, \quad \beta_2=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

3・1 零次近似 (19) 式の第1式ならびに (29) 式の u_0 , w_0 についての境界条件より w_0 は恒等的に零である。(19) 式の第2ならびに第3式より

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= (A_1\theta + A_2) \sin \theta + (B_1\theta + B_2) \cos \theta + C_1\theta + C_2 \\ \beta_0 &= \frac{1}{r} \frac{2\mu}{1+\mu} (A_1 \cos \theta - B_1 \sin \theta) - \frac{1}{r} \{ (A_1\theta + A_2) \sin \theta + (B_1\theta + B_2) \cos \theta \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

(29) 式の v_0 , β_0 の境界条件より A_i , B_i , C_i ($i=1, 2$) を定める。伸びの影響をみるために巻数は整数巻とすれば (32) 式は

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \frac{\delta}{\varphi} (\sin \theta - \theta) \\ \beta_0 &= -\frac{1}{r} \frac{\delta}{\varphi} \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

したがって断面モーメントは

$$M_{x0}=0, \quad M_{y0}=0, \quad M_{z0} = -(2GI/r^2) (\delta/\varphi) \dots\dots\dots (34)$$

これは単純な材力理論による値と一致することはもちろんであるが、中西博士⁽⁶⁾の端末の影響を考慮にいたしたとも一致する。

3・2 第一次近似 $u_0=w_0=0$ であるから (20) 式の第2ならびに第3式は

$$L[v_1]=0, \quad \beta_1=M[v_1] \dots\dots\dots (35)$$

前節と同様にして v_1 ならびに β_1 は恒等的に零である。(20) 式の第1式の右辺に (33) 式を代入して

$$L[w_1]=0, \dots\dots\dots (36)$$

(36) 式の解を (22) 式の第2式ならびに (30) 式の条件より求めると

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{\delta}{\varphi} (\sin \theta - \theta) + \alpha \frac{\delta}{\varphi} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \sin \theta \\ u_1 &= \frac{\delta}{\varphi} \left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right) (\cos \theta - 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

したがってモーメントは

$$M_{x1}=0, \quad M_{z1}=0, \quad M_{y1} = \frac{EI}{r^2} \frac{\delta}{\varphi} \{ (1 - (2-\alpha) \cos \theta) \} \dots\dots\dots (38)$$

3・3 第二次近似 w_2 もまた恒等的に零である。(21) 式の第1ならびに第2式の右辺に (33) 式と (37) 式を代入して

$$\left. \begin{aligned} L[v_2] &= (1+\mu)(4-2\alpha) \frac{\delta}{\varphi} \log \theta \\ \beta_2 &= M[v_2] + \frac{1}{1+\mu} \left\{ 2(2-\mu) + \alpha \left(-1 + \mu + \frac{1}{\mu}\right) \right\} \frac{\delta}{\varphi} \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

(39) 式より

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= (A_1''\theta + A_2'') \sin \theta + (B_1''\theta + B_2'') \cos \theta + C_1''\theta + C_2'' + A_v^{(2)}\theta^2 \sin \theta \\ \beta_2 &= \frac{1}{r} \frac{2\mu}{1+\mu} (A_1'' \cos \theta - B_1'' \sin \theta) - \frac{1}{r} \left\{ (A_1''\theta + A_2'') \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + (B_1''\theta + B_2'') \cos \theta + A_v^{(2)}\theta^2 \sin \theta + A_\beta^{(0)} \frac{\delta}{\varphi} \sin \theta + B_\beta^{(1)} \cos \theta \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

ただし

$$A_{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{4} (1+\mu) (2-\alpha) \frac{\delta}{\varphi}$$

$$A_{\beta}^{(0)} = \frac{1}{1+\mu} \left\{ \mu^2 - 5\mu + \alpha \left(1 + \frac{5}{2} \mu - \frac{1}{2} \mu^2 + \frac{1}{\mu} \right) \right\} \frac{\delta}{\varphi}$$

$$B_{\beta}^{(1)} = \mu (2-\alpha) \frac{\delta}{\varphi}$$

(31) 式の条件より A_i'', B_i'', C_i'' ($i=1,2$) を定めモーメントを求めると

$$M_{y2}=0$$

$$\left. \begin{aligned} M_{x2} &= \frac{EI\delta}{r^2\varphi} \left[\frac{1}{2} (2-\alpha) (\varphi-2\theta) \cos\theta + \frac{1}{1+\mu} \left\{ (1-\mu) - \frac{\alpha}{2} (1-3\mu) \right\} \sin\theta \right] \\ M_{z2} &= \frac{2GI\delta}{r^2\varphi} \left[\frac{\mu}{2} (2-\alpha) (\varphi-2\theta) \sin\theta + \left\{ -\frac{\mu}{1+\mu} (3+\mu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \frac{1}{1+\mu} \left(1 + \frac{7}{2} \mu - \frac{3}{2} \mu^2 \right) \right\} \cos\theta + \left\{ (1-2\mu) + \frac{\alpha}{\mu} (1+\mu^2) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

3.4 伸びを考慮にいれたモーメントの分布式 (整数巻) (34), (38) 式ならびに (41) 式より M_x, M_y ならびに M_z を求める.

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{EI\delta}{r^2\varphi} \left[\frac{1}{2} (2-\alpha) (\varphi-2\theta) \cos\theta + \frac{1}{1+\mu} \left\{ (1-\mu) - \frac{\alpha}{2} (1-3\mu) \sin\theta \right\} \right] \sin^2\varepsilon \\ M_y &= \frac{EI\delta}{r^2\varphi} \{ 1 - (2-\alpha) \cos\theta \} \sin\varepsilon \\ M_z &= \frac{2GI\delta}{r^2\varphi} \left[1 + \left\{ -\frac{1}{2} \mu (2-\alpha) (\varphi-2\theta) \sin\theta + \left\{ \frac{\mu}{1+\mu} (3+\mu) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{1+\mu} \left(1 + \frac{7}{2} \mu - \frac{3}{2} \mu^2 \right) \right\} \cos\theta + \left\{ (2\mu-1) - \frac{\alpha}{\mu} (1+\mu^2) \right\} \right] \sin^2\varepsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

(42) 式がコイルばねのピッチ角, 端末の条件ならびに伸びを考慮にいれたばねの素線軸に沿ってのモーメントの分布式である. 形状係数 α は実用上のばねでは 1 に比べてきわめて小さく, 普通のばね鋼では $\mu \approx 1.3$ であるからモーメントの分布式では伸びを考えなくてもさしつかえない. いま $\alpha=0$ としばねの中央すなわち $\theta=\varphi/2$ では

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{EI\delta}{r^2\varphi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \sin^2\varepsilon \\ M_z &= -\frac{2GI\delta}{r^2\varphi} \left[1 + \left\{ \frac{\mu(3+\mu)}{1+\mu} (\pm 1) + (2\mu-1) \right\} \sin^2\varepsilon \right] \end{aligned}$$

(± 1) の (+) は偶数巻の場合で, (-) は奇数巻の場合である. すなわち, ばねの中央では端末の影響はほとんどなくなり近似的には $M_x \approx 0$, $M_z = -2GI\delta/r^2\varphi$ で単純な材力理論によるモーメントの値と一致する.

4. モーメントならびに断面力 (任意巻数)

前節では整数巻について述べたが本節では伸びを考えない場合の任意巻数のばねのモーメントならびに断面力の分布を計算する.

基礎方程式 (19), (20) 式ならびに (21) 式で $\alpha=0$, $u=dw/d\theta$ とすれば伸びを考慮にいれぬ基礎方程式である. 計算の便宜上座標の原点をばねの中央にとり, 次の境界条件を考える.

$$\left. \begin{aligned} s = \frac{s_0}{2}, \quad \frac{dw}{ds} &= 0, \quad \frac{d^2w}{ds^2} = 0, \quad w = -\frac{\delta}{2} \sin\varepsilon, \quad v = -\frac{\delta}{2} \cos\varepsilon, \quad \frac{dv}{ds} = 0, \quad \beta = 0 \\ s = -\frac{s_0}{2}, \quad \frac{dw}{ds} &= 0, \quad \frac{d^2w}{ds^2} = 0, \quad w = \frac{\delta}{2} \sin\varepsilon, \quad v = \frac{\delta}{2} \cos\varepsilon, \quad \frac{dv}{ds} = 0, \quad \beta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

(43) 式の条件は摂動法では次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \theta = \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dw_0}{d\theta} &= 0, \quad \frac{d^2w_0}{d\theta^2} = 0, \quad w_0 = 0, \quad v_0 = -\frac{\delta}{2}, \quad \frac{dv_0}{d\theta} = 0, \quad \beta_0 = 0 \\ \theta = -\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dw_0}{d\theta} &= 0, \quad \frac{d^2w_0}{d\theta^2} = 0, \quad w_0 = 0, \quad v_0 = \frac{\delta}{2}, \quad \frac{dv_0}{d\theta} = 0, \quad \beta_0 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta = \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dw_1}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2w_1}{d\theta^2} = 0, \quad w_1 = -\frac{\delta}{2}, \quad v_1 = 0, \quad \frac{dv_1}{d\theta} = 0, \quad \beta_1 = 0 \\ \theta = -\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dw_1}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2w_1}{d\theta^2} = 0, \quad w_1 = \frac{\delta}{2}, \quad v_1 = 0, \quad \frac{dv_1}{d\theta} = 0, \quad \beta_1 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta = \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dw_2}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2w_2}{d\theta^2} = 0, \quad w_2 = 0, \quad v_2 = \frac{\delta}{4}, \quad \frac{dv_2}{d\theta} = 0, \quad \beta_2 = 0 \\ \theta = -\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{dw_2}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2w_2}{d\theta^2} = 0, \quad w_2 = 0, \quad v_2 = -\frac{\delta}{4}, \quad \frac{dv_2}{d\theta} = 0, \quad \beta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

前節と同様にして w_0 , v_1 , β_1 ならびに w_2 は恒等的に零である。(32) 式は偶関数と奇関数の和であるが, (43) 式の条件では偶関数の係数はすべて零である。すなわち

$$A_1 = B_2 = C_2 = 0$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} v_0 = A_2 \sin \theta + B_1 \theta \cos \theta + C_1 \theta \\ \beta_0 = \frac{1}{r} \frac{2\mu}{1+\mu} (-B_1 \sin \theta) - \frac{1}{r} (A_2 \sin \theta + B_1 \theta \cos \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

(44) 式の条件より A_2 , B_1 ならびに C_1 を決定すると

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{\delta}{A_v} \left(\varphi \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{4\mu}{1+\mu} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ B_1 &= -\frac{\delta}{A_v} \left(-2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ C_1 &= \frac{\delta}{A_v} \left(-\varphi + \frac{1-\mu}{1+\mu} \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

ただし

$$A_v = \varphi^2 - \frac{1-\mu}{1+\mu} \varphi \sin \varphi - \frac{4\mu}{1+\mu} (1 - \cos \varphi)$$

(20) 式の第1式の右辺に (47) 式をいれて

$$L[w_1] = 4B_1 \sin \theta$$

したがって

$$w_1 = A_2' \sin \theta + B_1' \theta \cos \theta + C_1' \theta + \frac{B_1}{2} \theta^2 \sin \theta \dots\dots\dots (48)$$

(45) 式の条件より係数を定めると

$$\begin{aligned} A_2' &= \frac{\delta}{A_w} \left(\varphi \cos \frac{\varphi}{2} + 4 \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2B_1}{A_w} \left\{ -\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 \sin \varphi \right\} \\ B_1' &= \frac{\delta}{A_w} \left(-2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{B_1}{A_w} \left\{ \frac{1}{2} \varphi^2 (3 + \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi + 2(\cos \varphi - 1) \right\} \\ C_1' &= \frac{\delta}{A_w} (-\varphi - 3 \sin \varphi) + \frac{B_1}{A_w} \left\{ \varphi^2 \left(\sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2\varphi \left(\sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right\} \end{aligned}$$

ただし

$$A_w = \varphi^2 + \varphi \sin \varphi + 4(\cos \varphi - 1)$$

(47) 式および (48) 式を (21) 式の右辺にいて v_2 ならびに β_2 を求めると

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= A_2'' \sin \theta + B_1'' \theta \cos \theta + C_1'' \theta + A_v^{(2)} \theta^2 \sin \theta \\ \beta_2 &= \frac{1}{r} \frac{2\mu}{1+\mu} (-B_1'' \sin \theta) - \frac{1}{r} (A_2'' \sin \theta + B_1'' \theta \cos \theta + A_v^{(2)} \theta^2 \sin \theta) \\ &\quad + \frac{1}{r} (A_\beta^{(2)} \theta^2 \sin \theta + A_\beta^{(0)} \sin \theta + B_\beta^{(1)} \theta \cos \theta + C_\beta^{(1)} \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

$$\text{ただし } A_v^{(2)} = \frac{1}{4} (1+\mu) (2A_2 + 2B_1' - B_1)$$

$$A_\beta^{(2)} = -\frac{1}{2} B_1$$

$$A_\beta^{(0)} = \frac{1}{1+\mu} \left\{ \left(\frac{7}{2} \mu - \frac{1}{2} \mu^2 - \frac{2\mu}{1+\mu} \right) B_1 + (-7\mu + \mu^2) B_1' + (1-4\mu + \mu^2) A_2 - (1+\mu) A_2' \right\}$$

$$B_\beta^{(1)} = \left\{ 1 + \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} \right\} B_1 + (2\mu-1) B_1' + 2\mu A_2$$

$$C_\beta^{(1)} = C_1' - C_1$$

(49) 式の係数を (46) 式の条件で定めると

$$A_2'' = \frac{\delta}{\Delta_v} \left(-\frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{2\mu}{1+\mu} \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{\Delta_v} \left[-A_v^{(2)} \varphi^2 \left\{ \left(\frac{\varphi}{2} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1+3\mu}{2(1+\mu)} \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \frac{\mu}{1+\mu} (1 - \cos \varphi) \right\} + S \varphi^2 \sin \frac{\varphi}{2} \right]$$

$$B_1'' = \frac{\delta}{\Delta_v} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\Delta_v} \left\{ A_v^{(2)} \varphi^2 (1 - \cos \varphi) + 4S \left(\frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\}$$

$$C_1'' = \frac{\delta}{\Delta_v} \left\{ \frac{\varphi}{2} - \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} \sin \varphi \right\} + \frac{1}{\Delta_v} \left\{ \frac{8\mu}{1+\mu} A_v^{(2)} \varphi \sin \frac{\varphi}{2} + 2S (\sin \varphi - \varphi) \right\}$$

$$S = A_\beta^{(2)} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^2 \sin \frac{\varphi}{2} + A_\beta^{(0)} \sin \frac{\varphi}{2} + B_\beta^{(1)} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + C_\beta^{(1)} \frac{\varphi}{2}$$

(47), (48) 式ならびに (49) 式よりモーメントおよび断面力を (23)~(28) 式より求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{EI}{r^2} \left\{ \frac{2}{1+\mu} B_1 \sin \theta + (A_x^{(0)} \sin \theta + B_x^{(1)} \theta \cos \theta) \sin^2 \varepsilon \right\} \\ M_y &= \frac{EI}{r^2} \{ B_y^{(0)} \cos \theta + C_1' - 2C_1 \} \sin \varepsilon \\ M_z &= \frac{2GI}{r^2} \left[-\frac{2\mu}{1+\mu} B_1 \cos \theta + C_1 + \{ A_z^{(1)} \theta \sin \theta + B_z^{(0)} \cos \theta + C_z^{(0)} \} \sin^2 \varepsilon \right] \\ N_1 &= \frac{EI}{r^3} \left[\left(B_y^{(0)} - \frac{2}{1+\mu} B_1 \right) \sin \theta \right] \sin \varepsilon \\ N_2 &= \frac{EI}{r^3} \left[\frac{C_1}{\mu} + \left\{ \left(B_y^{(0)} - \frac{2}{1+\mu} B_1 \right) \cos \theta + \frac{1}{\mu} (C_z^{(0)} - C_1) - C_y^{(0)} \right\} \sin^2 \varepsilon \right] \\ T &= \frac{EI}{r^3} \left\{ \left(\frac{2}{1+\mu} B_1 - B_y^{(0)} \right) \cos \theta + \frac{C_1}{\mu} \right\} \sin \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

ここに

$$A_x^{(0)} = \frac{1}{1+\mu} \left\{ \left(-\frac{7}{2} + \frac{5}{2} \mu - \frac{2\mu}{1+\mu} \right) B_1 + (3-5\mu) B_1' + 2B_1'' + (1-5\mu) A_2 \right\}$$

$$B_x^{(1)} = -\frac{1-\mu}{1+\mu} B_1 - 2B_1' - 2A_2$$

$$A_z^{(1)} = -\frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} B_1 - 2\mu (B_1' + A_2)$$

$$B_z^{(0)} = \frac{1}{1+\mu} \left[\left\{ \frac{1}{2} \mu (11-3\mu) - \frac{2\mu}{1+\mu} \right\} B_1 \right. \\ \left. + \mu (3\mu-5) B_1' - 2\mu B_1'' - 3\mu (1-\mu) A_2 \right]$$

$$C_z^{(0)} = C_1'' + 2C_1' - \frac{5}{2} C_1$$

$$B_y^{(0)} = -2B_1' + B_1 - 2A_2$$

$$C_y^{(0)} = C_1' - 2C_1$$

5. 応力の計算

応力は円形断面の外周において大である。第2図はその断面である。断

B : ばね内側方向

第 2 図

$\epsilon=5^\circ$
第 3 図

$\epsilon=5^\circ$
第 4 図

$\epsilon=5^\circ$
第 5 図

第 6 図

第 7 図

第 1 表

		近 似 解	厳 密 解
5 巻	M_z	2 028 δ	2 075 δ
	N_2	195.7 δ	192 δ
5.5 巻	M_z	1 837 δ	1 840 δ
	N_2	172.6 δ	172.3 δ

面モーメントおよび断面力による応力を重畳して考え図の A, B, C, D の各位置での応力を求める. なお M_y によって生ずる曲げ応力には曲りはりの影響を考慮し, せん断力 N_1 , N_2 によるせん断応力はせん断力を断面積で除した値の 4/3 倍をとる. A, B, C ならびに D に生ずる引張応力を σ_{+y} , σ_{+x} , σ_{-y} , σ_{-x} とせん断応力を τ_{+y} , τ_{+x} , τ_{-y} , τ_{-x} , とすると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{+y} &= \frac{M_x}{I} \frac{d}{2} + \frac{T}{a} \\ \tau_{+y} &= -\frac{16}{\pi} \frac{M_x}{d^3} + \frac{4}{3} \frac{N_1}{a} \\ \sigma_{+x} &= \frac{M_y}{ar} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\frac{d}{2}}{r - \frac{d}{2}} \right) + \frac{T}{a} \\ \tau_{+x} &= \frac{16}{\pi d^3} M_x + \frac{4}{3} \frac{N_2}{a} \\ \sigma_{-y} &= -\frac{M_x}{I} \frac{d}{2} + \frac{T}{a} \\ \tau_{-y} &= \frac{16}{\pi} \frac{M_x}{d^3} + \frac{4}{3} \frac{N_1}{a} \\ \sigma_{-x} &= \frac{M_y}{ar} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \frac{\frac{d}{2}}{r + \frac{d}{2}} \right) \\ \tau_{-x} &= -\frac{16}{\pi} \frac{M_x}{d^3} + \frac{4}{3} \frac{N_2}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

d は素線の直径, κ は曲りはりの断面係数

$$\kappa = -\frac{1}{a} \int \frac{\eta}{r-\eta} da$$

6. 数 値 計 算

M_x ならびに M_z の二次の振動項には $\theta \cos \theta$, あるいは $\theta \sin \theta$ なる secular term が現われるが, 断面力 N_1 , N_2 , T ならびに M_y には現われぬ. したがって M_z , M_x を図示するとそれらの最大値は自由コイルの付根から離れたところに生じ, ばね折損位置と一置する. これらのモーメントの最大値に及ぼすピッチ角の影響は A_2 の係数で左右される. 整数巻のときは A_2 は大で半整数巻では小さい. しかし零次の近似すなわちピッチ角のきわめて小さいばねでは半整数巻は

第 2 表

応 力	近 似 解	厳 密 解
σ_{+y}	48.4 δ	48.0 δ
τ_{+y}	-347.6 δ	-347.5 δ
σ_{+x}	-90.5 δ	-103.6 δ
τ_{+x}	380.4 δ	379.8 δ
σ_{-y}	-43.8 δ	-44.4 δ
τ_{-y}	348.4 δ	348.0 δ
σ_{-x}	95.6 δ	85.2 δ
τ_{-x}	-315.5 δ	-316.5 δ

端末の影響を大きくうけ, 整数巻は端末の影響をうけぬ. このことは中西の見解と一致する. 第 3~5 図に端数の巻数による断面力と断面偶力の分布の相違が示されてある. M_z の最大値と単純な材力理論値との比は端数の巻数の影響はほとんどなくほぼ一定の値を示す. 破損に最も重要と思われる N_2 ならびに M_z について言えば N_2 は巻数と無関係に著者のひとり⁽⁷⁾の厳密解と一致し, M_z は半整数巻のときのみ一致し整数巻は高くなっている.

第 6 図ならびに第 7 図は $\epsilon=5^\circ$ および $\epsilon=20^\circ$ の半整数巻の断面力ならびに偶力の最大値を巻数に従って図示したものである. M_z , N_2 を第 7 図および第 6 図より求めた値と厳密解を比較すれば第 1 表のようになる. $\epsilon=5^\circ$ の場合には 3 巻までの整数巻は第 7 図より求めた値と理論値は一致する. 5.5 巻のばねの応力の近似解ならびに厳密解を求めると第 2 表のようになる. コイルばねの寸法は $d=3.0$ cm, $r=10$ cm, $\epsilon=5^\circ$, $E=2.1 \times 10^6$ kg/cm², $G=7.5 \times 10^5$ kg/cm².

7. 結 論

(1) コイルばねのピッチ角ならびに末端の影響を考慮にいたした素線軸に沿っての断面力ならびに断面モーメントの分布を明らかにし, 最大ねじりモーメントは自由コイルの付け根から $(3/4)\pi$ のところに生じ折損位置と一致することを示した.

(2) 整数巻のばねもピッチ角を考慮にいれるとねじりモーメントも変動する.

(3) 折損位置での最大せん断力ならびにねじりモーメントの計算図表を示し合理的なばね設計の指針を示した.

本研究に種々御教示を賜った東京大学 高田 勝助教授に深じんの謝意を表します.

文 献

- (1) A. Röver, VDI-Z, 57, (1913), 1906.
- (2) Wahr, Trans. ASME, 51, (1929), 185.
- (3) Göhner, Ing.-Arch., 1 (1929), 619.
- (4) Goodier, J. Appl. Mech., 25 (1958) 466
- (5) H. Okubo, J. Appl. Mech., 20 (1953) 273.
- (6) 中西, 航空学会誌, 50 (昭14) 582.
- (7) H. Shimizu, M. Takata, & T. Munakata, Proc. 7th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1957(1958), 365.
- (8) Waltring, Ing.-Arch., (1934), 41.
- (9) 宗像, 九州大学修士論文 (昭32).