動を取扱い, サージング応力の端末の影響を明らかにした。

(2) 弁揚程曲線から加振振幅がわかれば, (19)式ならびに (21) 式からばねの中央の振幅ならびに最大サージング応力の推定ができる。

文 献

(1) 徳江, 機械学会論文集, 19, 87(昭28), 42; 21, 112(昭30-12),

958.

(2) Hussmann, 内燃機関邦訳文献集, 6, 11.

(3) 井上, 吉永, 本論文集 1130 ページ.

(4) 小野, 石橋, 金属材料, 1 (昭13), 57.

(5) 徳江, 窪田, 東京秋期講演大会前刷集 No. 13 (昭34-10), 49.

(6) 小野, *Proc. Japan Acad.*, 13, 5 (1957), 272.

(7) 河本, 他2名, 機械学会論文集, 17, 61 (昭26), 143.

(8) 八田, 他3名, 航研彙報, 210(昭17), 41.

621. 822. 7. 034:534. 13

玉 軸 受 の 振 動*

(第4報, 軸方向の非線形振動について)

田 村 章 義**, 谷 口 修**

Ball Bearing Vibrations

(4th Report, On the Nonlinear Vibrations in Axial Direction)

by Akiyoshi TAMURA and Osamu TANIGUCHI

In the previous papers the authors dealt with the axial harmonic vibrations and the subharmonic vibrations of the order one-half caused by the passing balls. In these papers the stability of the axial motion and the amplitudes of the steady state were discussed in the linear region of the axial spring characteristic. But for the large amplitudes of the axial vibrations the nonlinear phenomena appear.

In the present paper, firstly, the nonlinear characteristic in the axial direction of a ball bearing is analyzed and the analytical results have been found in good agreement with the experimental ones. Secondly, the amplitudes of the steady motion at the rotational angular speeds nearly equal to the natural circular frequency of the system are analyzed. The various typical response curves calculated from the analysis are compared with those obtained from the experiments. As a result, the nonlinear vibratory phenomena caused by a ball bearing were clarified.

1. 緒 言

玉軸受でささえられた水平回転体の軸方向振動について, さきに筆者は玉の公転によって生ずる 1/2 分数次玉通過振動⁽¹⁾および 2/2 次玉通過振動⁽²⁾についてこれらの原因を明らかにした。これらの振動は複雑であるから, これらの論文では, いずれもスラストが零の状態, しかも玉軸受の軸方向ばね特性が線形の範囲内で振動を論じた。しかし軸方向振動の振幅が大きくなると軸方向振動に非線形性が表われ⁽³⁾, その非線形性の本質ならびにその動力学的現象を定量的に取扱った論文はないようである。

本論文はまず玉軸受の軸方向の非線形ばね特性を解析し, 実験と比較した。次に二, 三のスラストをうけている場合について, 系の固有角振動数の近傍の軸回転角速度における振幅特性を解析し実験と比較して, その非線形性を明らかにした。実験および解析は, この問題をできるだけ簡明にするため, 水平回転体を供試玉軸受とジャーナル軸受でささえ, 軸端をばねでおしてスラストを加えている場合を取扱う。またこの振動問題に対しては, 一般には軸の弾性も考慮しなければならぬのであるが⁽⁴⁾, 本論文は特に玉軸受の構造から発生する振動を問題にしているので, ここでは軸を剛体と仮定する。

2. 解 析

記号 (第1~4図参照)

* 昭和 35 年 11 月 3 日 第 38 期全国大会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和 35 年 7 月 25 日.

** 正員, 東京工業大学 (東京都目黒区大岡山 1).

- $O-xyz$: 静止座標系
 $O'-\xi\eta\zeta$: 回転体に固定した運動座標系
 $O'-O'$: 重心 O' (xyz) を通る対称軸 (ζ 軸)
 O'' : AA 断面における内輪軌道面の中心
 θ, φ, ψ : オイラー角
 m : 回転体質量
 I_p : 対称軸 (ζ 軸) まわりの慣性モーメント
 I : ξ, η 軸まわりの慣性モーメント
 α : 圧力角
 α_0 : 静力学的つりあい位置における α の値
 α_1 : $\alpha - \alpha_0$
 β : OO'' が x 軸となす角
 ρ_0 : $1/2 \times (\text{遊び}) + \text{弾性変形量}$
 ρ : $\rho_0 - c(1 - \cos \alpha)$
 c : $r_i + r_o - 2r$
 r_i : 内輪みぞ半径
 r_o : 外輪みぞ半径
 r : 玉半径
 R' : 内輪半径
 R : $R' + r_i(1 - \cos \alpha)$
 e : 内輪偏心 ($O'O''$)
 ε_j : 内輪みぞ横ぶれにもとづく軸方向変位の振幅 ($j=1, 2, \dots$)
 e_{Bz}, e_{By} : x, y 方向の玉通過変位の振幅
 $2\omega_B$: 玉通過角振動数 = (玉保持器角速度) $\times$ (玉数)
 ω : 内輪角速度

- P_i : 内輪が γ_i 位置の玉からうける法線力
 γ_i : O'' を通る鉛直軸から各玉までの角度
 $nc\alpha$: 減衰力
 n_c : $2m\omega_n$
 F_{th} : スラスト荷重
 F : ジャーナル軸受にはたらく鉛直方向の反力
 T_0 : $\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \frac{\varepsilon_1}{c}$
 S : $\sum P_i / \sum P_i \cos \gamma_i = S_0(1 - 2\lambda \cos 2\omega_B t) + \nu \alpha^{\mu-1} \cdot cl / gl_1$
 S_0 : 定数 ($\alpha=0$ のときの S の平均値)
 ω_0^2 : $S_0 gl_1 / cl$
 ω_{n0}^2 : $\omega_0^2 + (k/m)$
 ω_n^2 : $\omega_{n0}^2 + 5\alpha_0^4 \nu$
 k : スラストばねのステフネス
 kz_0 : $\alpha=0$ のときのスラスト荷重
 ϕ_1 : 位相角
 σ_2 : $10\alpha_0^3 \nu$
 σ_3 : $10\alpha_0^2 \nu$
 σ_4 : $5\alpha_0 \nu$
 σ_5 : ν
 W : 軸受荷重
 δ_i : γ_i 位置における玉と内外輪間の弾性変形量
 δ_0 : $\gamma_i=0$ における δ_i の値
 c_0 : ヘルツ式の比例定数
 2Δ : 遊び
 Δ' : $\Delta - c(1 - \cos \alpha) \doteq \Delta - \frac{1}{2} c \alpha^2$

第 1 図

第 2 図

第 3 図

第 4 図 A-A 断面

2.1 軸方向の非線形ばね特性 玉軸受の軸方向ばねの非線形性を静力学的に接触論から導いてみる。いま各玉の反力 P_i を計算するため第 5 図のように半径方向荷重を $W (= mgl_1/l)$ とし、玉と内外輪が圧力角 α をなして接触している状態を考える。厳密には α は

一様でないが, ここでは一様であると仮定する⁽⁵⁾. 玉の配置によって S の値が変わることはすでに報告したとおりであり, 玉数が多い場合にはその変化量は非常に小さい. そこでまず x 軸上に玉が存在している左右対称の状態について解析する.

x 軸上の玉と内, 外輪間の弾性変形量の和を δ_0 とし, x 軸より γ_i 位置の弾性変形量を δ_i とすれば, 三角形 $OO'P$ から次式が導かれる.

$$\begin{aligned} (A' + \delta_0 \cos \alpha)^2 + (R_0 + \overline{PQ})^2 \\ - 2(A' + \delta_0 \cos \alpha)(R_0 + \overline{PQ}) \cos \gamma_i = R_i^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで

$$A' = A - c(1 - \cos \alpha) \doteq A - \frac{1}{2} c \alpha^2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

A'/R_0 , δ_0/R_0 , $\overline{PQ}/R_0 \ll 1$ なのでこれらの二乗以上を省略すると次式をうる.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \delta_0 \cos \gamma_i \cos \alpha - A'(1 - \cos \gamma_i) \\ \therefore \delta_i &= \overline{PQ} / \cos \alpha = \delta_0 \cos \gamma_i \\ &\quad - \{A'(1 - \cos \gamma_i) / \cos \alpha\} \end{aligned}$$

$\cos \alpha \doteq 1$ なので

$$\begin{aligned} \delta_i &\doteq (\delta_0 + A') \cos \gamma_i - A' \\ \therefore \frac{\delta_i}{A} &\doteq \left(\frac{\delta_0}{A} + \frac{A'}{A} \right) \cos \gamma_i - \frac{A'}{A} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

y および z 方向の力のつりあいから次の (4) 式をうる.

$$\begin{aligned} W &= \sum P_i \cos \alpha \cdot \cos \gamma_i \\ F_{th} &= \sum P_i \sin \alpha \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ヘルツの式から

$$P_i = c_0 \delta_i^{1.5} \quad \dots\dots\dots(5)$$

(4) 式に (5) 式を代入して次式をうる.

$$\begin{aligned} \frac{W}{c_0 A^{1.5}} &= \sum \left[\cos \gamma_i \left\{ \frac{\delta_0}{A} \cos \gamma_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 - \cos \gamma_i) \frac{A'}{A} \right\}^{1.5} \right] \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$$\frac{F_{th}}{c_0 A^{1.5}} = \alpha \cdot \sum \left[\frac{\delta_0}{A} \cos \gamma_i - (1 - \cos \gamma_i) \frac{A'}{A} \right]^{1.5} \quad \dots\dots\dots(7)$$

第 5 図

(6) および (7) 式は玉と内, 外輪がともに圧力角 α をなして接触しているときのラジアル荷重 W とスラスト F_{th} の関係式である. W が一定の場合でも内輪が軸方向に変位すると見掛け上の遊び A' が小さくなり, したがって負荷をうける玉数が多くなる. 負荷をうける玉数が変わる境界を求めるには, (3) 式で $\delta_i = 0$ とおけばよい. したがってその境界は次式で示される.

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{c} \left(A - \frac{\cos \gamma_i}{1 - \cos \gamma_i} \delta_0 \right)} \quad \dots\dots\dots(8)$$

計算例として $W = 7.78 \text{ kg}$, $c = 0.289 \text{ mm}$, $2A = 12 \times 10^{-3} \text{ mm}$, $W/c_0 A^{1.5} = 0.3702$ の場合の (6) および (7) 式の計算結果から α と F_{th} の関係を示すと第 6 図のようになる. (8) 式から境界をもとめると, 原点から $\alpha = 0.142 \text{ rad}$ までは玉 1 個支持, $\alpha = 0.142 \sim 0.216 \text{ rad}$ の間は 3 個支持, $\alpha = 0.216 \sim 0.223 \text{ rad}$ の間は 5 個支持, そして $\alpha > 0.223 \text{ rad}$ では全部の玉すなわち 6 個で支持していることになる. この図からわかるように, 軸方向ばねの非直線性は負荷をうけている玉数におおに関係があることがわかる. この理論的非線形ばね特性を

$$\begin{aligned} F_{th} &= mc \left\{ S_0 \left(1 - 2\lambda \cos 2\pi \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \frac{gl_1}{cl} \alpha + \nu \alpha^\mu \right\} \\ &= mc \left\{ \omega_0^2 \left(1 - 2\lambda \cos 2\pi \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \alpha + \nu \alpha^\mu \right\} \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

であらわすように, 第 6 図のばね特性 $[S_0(1 - 2\lambda \cos 2\pi \gamma_1/\gamma) = 1]$ を $\mu = 5$ とおいて最小二乗法によって ν の値を求めた. その結果 $\nu = 358.5 \times 10^4 (\text{rad/s})^2$ をえ

第 6 図 玉軸受の軸方向ばね特性

た. α の大きいところでは, $\mu=5$ では不十分で, もっと大きな値をとる必要があるが, いちおう 5 とした. この数値によるばね特性を第 6 図に点線で示した. 玉が 3 個支持までは非常によくあてはまる.

玉の配置によってばねこわさが異なるので, 平均として $S_0=1.103^{(1)}$ を代入して, 平均のばねこわさをあらわす次の計算式をうる.

$$F_{th}=8.546\alpha+1.480\times 10^3\alpha^5 \text{ kg} \quad \cdots(10)$$

2.2 運動方程式 第 1 図のように水平回転体を玉軸受とジャーナル軸受でささえ, ばね k によってスラストを加えている場合を取扱う. 簡単のため回転体は剛体と仮定し, 回転体の対称軸 $O'-\zeta$ が軸の中心線と一致している場合について解析する. 回転軸 (したがって内輪) は回転しながら軸方向にも運動し, これにともなう玉もころがり運動するが, 玉および内, 外輪は接触を保っている範囲に運動を限定する. 負荷をうけて弾性変形している各玉はすべて一様な圧力角 α をなして接触していると仮定する.

第 1 報⁽⁶⁾で述べたように半径方向の静力学的玉通過変位の x , y 方向の振幅をそれぞれ e_{Bx} , e_{By} として, 重心 O' の座標 x, y, z ならびに θ (ζ 軸と z 軸のなす角), ρ を α および β で表わすと (第 1~4 図) (11), (12), (13) 式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} x &= (\rho \cos \beta + e \cos \omega t - e_{Bx} \cos 2\omega t) l_1 / l \\ y &= (\rho \sin \beta + e \sin \omega t + e_{By} \sin 2\omega t) l_1 / l \\ z &= \{c \sin \alpha + \sum \varepsilon_j \cos j(\omega t - \beta)\} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \cdots(11)$$

$$\theta = \sqrt{x^2 + y^2} / (l_1 + z) \approx \sqrt{x^2 + y^2} / l_1 \quad \cdots(12)$$

$$\rho = \rho_0 - c(1 - \cos \alpha) \quad \cdots(13)$$

ラグランジュの方程式の各項を計算するため, 運動エネルギー T および位置エネルギー U を求めると (14) 式および (15) 式で表わされる.

$$T = (1/2)m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + (1/2)I(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + (1/2)I_p(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \quad \cdots(14)$$

$$U = -mgx + (1/2)k(z_0 - z)^2 \quad \cdots(15)$$

従来はスラストのばね定数 $k=0$ の場合を取扱ってきた. I_p が非常に大きく, また外力のモーメントが非常に小さい場合には

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \approx 0 \quad \therefore \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \text{一定}$$

また θ が微小なので $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ とする. したがって

$$\omega = \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \quad \cdots(16)$$

また玉軸受における拘束条件から, 一般力として (17) 式をうる⁽¹⁾.

$$Q_\alpha = c\alpha \{ \sum P_i \cos(\gamma_i - \beta) - \sum P_i \} \quad \cdots(17)$$

α を一般座標としたラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \alpha} = Q_\alpha \quad \cdots(18)$$

に (14), (15) および (17) 式を代入し, x 軸と OO'' のなす角 β が α と同程度の微小量であるとして, これらの二乗以上を省略すると次式をうる.

$$\ddot{z} + \alpha \left\{ \left(\frac{l_1}{l} g + \frac{\sum P_i}{m} - \frac{\sum P_i \cos \gamma_i}{m} \right) - \left(\frac{l_1}{l} \ddot{x} + \frac{Ix}{ml\sqrt{x^2 + y^2}} \ddot{\theta} \right) \right\} = \frac{k}{m}(z_0 - z) \quad \cdots(19)$$

(19) 式には β を含んでいる項はない. そして y を含んでいる左辺の最終項は一般に左辺のいずれの項よりも小さい. そこで (19) 式の第一次近似をうるため, $(y/x)^2 \ll 1$ を仮定して, これを省略し $\ddot{\theta} \approx \ddot{x}/l_1$ を代入すると次式のようになる.

$$\ddot{z} + \alpha \left\{ \left(\frac{l_1}{l} g + \frac{\sum P_i}{m} - \frac{\sum P_i \cos \gamma_i}{m} \right) - \frac{l}{l_1} \frac{I + ml_1^2}{ml^2} \ddot{x} \right\} = \frac{k}{m}(z_0 - z) \quad \cdots(20)$$

(20) 式は β および y を含んでいないので $z-x$ 面内の平面運動を表わす式と同じである.

$z-x$ 面内の平面運動から次の方程式が導かれる.

$$m\ddot{x} = -F - \sum P_i \cos \alpha \cdot \cos \gamma_i + mg \quad \cdots(21)$$

$$-I\ddot{\theta} = -Fl_1 + l_2 \sum P_i \cos \alpha \cdot \cos \gamma_i - R \sum P_i \sin \alpha \cdot \cos \gamma_i \quad \cdots(22)$$

(21), (22) 式から F を消去し, R/l が α の程度の微小量として α の二乗以上を省略すると次式をうる.

$$\frac{1}{m} \sum P_i \cos \gamma_i = \frac{l_1}{l} g - \frac{l}{l_1} \frac{I + ml_1^2}{ml^2} \ddot{x} \quad \cdots(23)$$

次に

$$\sum P_i / \sum P_i \cos \gamma_i = S \quad \cdots(24)$$

とおき (20) 式に (23), (24) および (11) 式を代入すると (25) 式をうる.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + S \left\{ \frac{gl_1}{cl} - \frac{I + ml_1^2}{ml^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{e}{c} \cos \omega t - \frac{e_{Bx}}{c} \cos 2\omega t \right) \right\} \alpha + \frac{k}{m} \alpha \\ = - \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum \frac{\varepsilon_j}{c} \cos j\omega t \right) + \frac{k}{m} \left(\frac{z_0}{c} - \sum \frac{\varepsilon_j}{c} \cos j\omega t \right) \end{aligned} \quad \cdots(25)$$

一般にスラストをうけている第 1 図のような水平回転体の場合, 玉軸受の構造から発生する軸方向の運動方程式を圧力角 α に関して表わすと (25) 式のようになる. (24) 式で示した S の値は玉の配置によってわずかに異なることはすでに報告したが⁽¹⁾⁽²⁾, スラストが零の状態でも軸方向変位がある程度以上に大きくなると S の値は非常に大きくなる. そこで S の第一次近似

として, 静力学的力のつりあいから求めた(4)および(9)式を(24)式に代入し, $2\pi\gamma_1/\gamma = 2\omega_B t$ を考慮すると次の(26)式をうる.

$$S = S_0(1 - 2\lambda \cos 2\omega_B t) + \nu \alpha^{\mu-1} (cl/gl_1) \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} \therefore S \alpha gl_1/cl &= \{S_0 \alpha gl_1(1 - 2\lambda \cos 2\omega_B t)/cl\} + \nu \alpha^\mu \\ &= \omega_0^2(1 - 2\lambda \cos 2\omega_B t) \alpha + \nu \alpha^\mu \end{aligned} \dots\dots\dots (27)$$

ここで右辺の第1項は, 従来取扱った $\alpha=0$ の近傍における時間とともに変化する弾性をあらわし, 第2項が非線形項である. 問題を簡単にするため,

$$(le\omega^2/gl_1)(I + ml_1^2)/ml^2 \ll 1$$

のように e の小さい場合を取扱い, また一般に

$$\{leB_2(2\omega_B)^2/gl_1\}(I + ml_1^2)/ml^2 \ll 1$$

であるからこれらを省略しうることを考慮し, (25)式に(27)式を代入して次の(28)式をうる.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \left\{ \omega_0^2(1 - 2\lambda \cos 2\omega_B t) + \frac{k}{m} \right\} \alpha + \nu \alpha^\mu \\ = -\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum \frac{\varepsilon_j}{c} \cos j\omega t \right) \\ + \frac{k}{m} \left(\frac{z_0}{c} - \sum \frac{\varepsilon_j}{c} \cos j\omega t \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (28)$$

さて本論文では非線形性を明らかにするため, 内輪回転角速度 ω が系の固有角振動数 ω_n にほぼ近いところにおける振動 ($j=1$) を論ずることとする. 一般に角速度 $2\omega_B$ と ω の比は整数ではなく, さらに $2\lambda \ll 1$ なので, $\omega \approx \omega_n$ 付近における振幅を問題にするときは $2\lambda \cos 2\omega_B t$ の項は無視できるので, これを省略する. また $\mu=5$ において計算を進める. したがって(28)式は(29)式のように簡単になる.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m} \right) \alpha + \nu \alpha^5 \\ = \frac{\varepsilon_1}{c} \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) \cos \omega t + \frac{k}{m} \frac{z_0}{c} \end{aligned} \dots\dots\dots (29)$$

実際には減衰力が働くから減衰力として $\dot{\alpha}$ に比例した $nc\dot{\alpha}$ および位相角 ϕ_1 を考慮し, 記号を整理して(29)式を書直すと(30)式のようになる.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{n}{m} \dot{\alpha} + \omega_n^2 \alpha + \nu \alpha^5 \\ = T_0 \cos(\omega t + \phi_1) + \frac{k}{m} \frac{z_0}{c} \end{aligned} \dots\dots\dots (30)$$

2.3 運動方程式の解 2.3.1 $z_0=0$ の場合

α が0のとき, スラストが零であり, 静的つりあいの位置は $\alpha=0$ である. この場合(30)式は(31)式のように簡単になる.

$$\ddot{\alpha} + (n/m) \dot{\alpha} + \omega_n^2 \alpha + \nu \alpha^5 = T_0 \cos(\omega t + \phi_1) \dots\dots\dots (31)$$

ばね特性が対称なので $\omega \approx \omega_n$ 付近の定常解を(32)

式のようにおく.

$$\alpha = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t + A_5 \cos 5\omega t \dots\dots\dots (32)$$

(32)式を(31)式に代入し, $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, $\cos 3\omega t$ および $\cos 5\omega t$ の各係数を零に等置してそれぞれ(33), (34) および (35) 式をうる.

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{\nu}{\omega_n^2} \left(\frac{5}{8} + \frac{25}{16} \frac{A_3}{A_1} + \frac{5}{16} \frac{A_5}{A_1} \right) A_1^4 \\ = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{T_0}{A_1} \cos \phi_1 \\ 2 \frac{n}{n_c} \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{T_0}{A_1} \sin \phi_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_3}{A_1} \left(1 - 9 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \\ + \frac{\nu}{\omega_n^2} A_1^4 \left(\frac{5}{16} + \frac{15}{8} \frac{A_3}{A_1} + \frac{5}{4} \frac{A_5}{A_1} \right) = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_5}{A_1} \left(1 - 25 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \\ + \frac{\nu}{\omega_n^2} A_1^4 \left(\frac{1}{16} + \frac{5}{4} \frac{A_3}{A_1} + \frac{15}{8} \frac{A_5}{A_1} \right) = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (35)$$

(34)式および(35)式から本研究の場合 $A_5 \ll A_3 \ll A_1$ となるので, (33)式中の A_3 および A_5 の項を省略して次式がえられる.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{5}{8} \frac{\nu}{\omega_n^2} A_1^4 \right)^2 \\ + \left(2 \frac{n}{n_c} \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = \frac{1}{\omega_n^4} \left(\frac{T_0}{A_1} \right)^2 \end{aligned} \dots\dots\dots (36)$$

この式は各 A_1 値に対して二つの ω/ω_n を与える.

2.3.2 $z_0 \neq 0$ の場合 α が0のときスラストが零でなく, 静的つりあいの位置を α_0 として(30)式から静力学的に α_0 を求めると, (37)式のようになる.

$$\omega_0^2 \alpha_0 + \nu \alpha_0^5 = (z_0 - c\alpha_0)k/cm \dots\dots\dots (37)$$

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ において(30)式に代入し, (37)式を用いると次式をうる.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + (n/m) \dot{\alpha}_1 + (\omega_n^2 + 5\nu\alpha_0^4) \alpha_1 \\ + 10\nu\alpha_0^3 \alpha_1^2 + 10\nu\alpha_0^2 \alpha_1^3 + 5\nu\alpha_0 \alpha_1^4 \\ + \nu \alpha_1^5 = T_0 \cos(\omega t + \phi_1) \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

記号を整理して書直すと(39)式のようになる.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + (n/m) \dot{\alpha}_1 + \omega_n^2 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_1^2 + \sigma_3 \alpha_1^3 \\ + \sigma_4 \alpha_1^4 + \sigma_5 \alpha_1^5 = T_0 \cos(\omega t + \phi_1) \end{aligned} \dots\dots\dots (39)$$

(39)式の定常解を(40)式のようにおく.

$$\alpha_1 = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t \dots\dots\dots (40)$$

(40)式を(39)式に代入し, 定数項の総和を零に等置し, A_2/A_1 および $A_3/A_1 \ll 1$ に注意してこれらを省

略して次式をうる.

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{A_1} + \frac{\sigma_2}{\omega_n^2} A_1 \left(\frac{A_0^2}{A_1^2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\sigma_3}{\omega_n^2} A_1^2 \left(\frac{A_0^3}{A_1^3} + \frac{3}{2} \frac{A_0}{A_1} \right) + \frac{\sigma_4}{\omega_n^2} A_1^3 \left(\frac{A_0^4}{A_1^4} + 3 \frac{A_0^2}{A_1^2} + \frac{3}{8} \right) \\ + \frac{\sigma_5}{\omega_n^2} A_1^4 \left(\frac{A_0^5}{A_1^5} + 5 \frac{A_0^3}{A_1^3} + \frac{15}{8} \frac{A_0}{A_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

同様に, $\cos \omega t$ の係数を零に等置して次式をうる.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2 \frac{\sigma_2}{\omega_n^2} A_1 \frac{A_0}{A_1} + 3 \frac{\sigma_3}{\omega_n^2} A_1^2 \left(\frac{A_0^2}{A_1^2} + \frac{1}{4} \right) + 4 \frac{\sigma_4}{\omega_n^2} A_1^3 \left(\frac{A_0^3}{A_1^3} + \frac{3}{4} \frac{A_0}{A_1} \right) \\ + 5 \frac{\sigma_5}{\omega_n^2} A_1^4 \left(\frac{A_0^4}{A_1^4} + \frac{3}{2} \frac{A_0^2}{A_1^2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{T_0}{A_1} \cos \psi_1 \end{aligned} \quad (42)$$

$\sin \omega t$ の係数を零に等置して次式をうる.

$$\frac{n}{m} \omega = \frac{T_0}{A_1} \sin \psi_1 \quad \therefore \quad 2 \frac{n}{n_c} \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{T_0}{A_1} \sin \psi_1 \quad (43)$$

$\cos 2\omega t$ の係数を零に等置して次式をうる.

$$\begin{aligned} \left(1 - 4 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \frac{A_2}{A_1} + \frac{\sigma_2}{\omega_n^2} A_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{2A_0A_2}{A_1^2} \right) + \frac{\sigma_3}{\omega_n^2} A_1^2 \left(\frac{3}{2} \frac{A_0}{A_1} + \frac{3}{2} \frac{A_2}{A_1} + \frac{3A_0^2A_2}{A_1^3} \right) \\ + \frac{\sigma_4}{\omega_n^2} A_1^3 \left(\frac{1}{2} + 3 \frac{A_0^2}{A_1^2} + 4 \frac{A_0^3A_2}{A_1^4} + 6 \frac{A_0A_2}{A_1^2} \right) \\ + \frac{\sigma_5}{\omega_n^2} A_1^4 \left(\frac{5}{2} \frac{A_0}{A_1} + 5 \frac{A_0^3}{A_1^3} + 5 \frac{A_0^4A_2}{A_1^5} + 15 \frac{A_0^2A_2}{A_1^3} + \frac{35}{16} \frac{A_2}{A_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

(42) 式および (43) 式より次式をうる.

$$\left(B - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2 \frac{n}{n_c} \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = \left(\frac{1}{\omega_n^2} \frac{T_0}{A_1} \right)^2 \quad (45)$$

ここで

$$B = 1 + 2 \frac{\sigma_2}{\omega_n^2} A_1 \left(\frac{A_0}{A_1} \right) + 3 \frac{\sigma_3}{\omega_n^2} A_1^2 \left(\frac{A_0^2}{A_1^2} + \frac{1}{4} \right) + 4 \frac{\sigma_4}{\omega_n^2} A_1^3 \left(\frac{A_0^3}{A_1^3} + \frac{3}{4} \frac{A_0}{A_1} \right) + 5 \frac{\sigma_5}{\omega_n^2} A_1^4 \left(\frac{A_0^4}{A_1^4} + \frac{3}{2} \frac{A_0^2}{A_1^2} + \frac{1}{8} \right) \quad (46)$$

(45) 式から各 A_1 に対して二つの ω/ω_n が求まる.

2.3.3 数値計算例 回転体重量 14 kg, 軸受荷重 $W=7.78$ kg, $W/c_0 d^{1.5}=0.3702$ のときの計算結果

第 7 図 振 幅 特 性

$\nu=358.5 \times 10^4 (\text{rad/s})^2$ を用いて $\alpha_0=0$ すなわち $z_0=0$ のときの振幅特性を (36) 式から計算した結果を第 7 図に実線で示した. また $\alpha_0=0.05$ rad および $\alpha_0=0.22$ rad の各場合の振幅特性を (45) 式から計算した結果を第 8 図および第 9 図に実線で示した. これらの曲線は α_0 が小さいときは hard spring, α_0 が大きくなると soft spring になることを示している. これは α_0 が大きくなると A_0 (負値) の影響が大きくなり, 振動の中心が α_0 より小さな値になるためである. これら $\alpha_0=0, 0.05$ および 0.22 rad の各場合において計算に必要な定数 (ω_n^2 , F_{th} , σ_2/ω_n^2 , σ_3/ω_n^2 , σ_4/ω_n^2 および σ_5/ω_n^2) の計算結果を一括して第 1 表に示す.

3. 実 験

3.1 実験装置 実験装置の略図を第 10 図に示す. 水平軸の一端に供試玉軸受 (6207) がはまってい, 軸のほぼ中央に重量 14 kg の回転体が取付けられている. 軸の他端はジャーナル軸受または 2 個の玉軸

第1表 $\omega_0^2 = S_0 g l_1 / c l = 2.07 \times 10^4 (\text{rad/s})^2$, $k/m = 0.29 \times 10^4 (\text{rad/s})^2$, $\nu = 358.5 \times 10^4 (\text{rad/s})^2$

α_0 rad	ωn^2 (rad/s) ²	F_{th} kg	$\sigma_2/\omega n^2$	$\sigma_3/\omega n^2$	$\sigma_4/\omega n^2$	$\sigma_5/\omega n^2$
0	$2.36 \times 10^4 = \omega n_0^2$	0	0	0	0	151.91
0.05	2.37×10^4	0.44	0.19	3.78	37.79	151.19
0.22	6.56×10^4	2.73	5.82	26.46	60.13	54.66

第2表

W kg	$2r_o$ mm	$2r_i$ mm	$2r$ mm	c mm	2Δ mm	$W/c_0 \Delta^{1.5}$
7.78	11.435	11.350	11.103	5	12×10^{-3}	0.3702

第8図 振幅特性

受によってささえられ、その軸受台はねじによってそれぞれ上下、左右に微動できるようになっている。この微動装置は軸の心出しに用いる。軸の一端を2個の玉軸受によってささえる目的は玉軸受の軸方向のばね特性など静力学的実験を行なうとき摩擦を少なくするためであって、この場合は軸継手ははずし、おもりによってスラストを加えて実験を行なう。回転中の振動測定るときは、軸の一端をジャーナル軸受にとりかえ、図に示すような軸継手を用いて駆動軸とつなぐ。両者の場合とも微動装置によって完全に心出しが行なえるようになっているから静力学的実験のときと振動測定るときにおける供試玉軸受のはめあい状態は全く同一になしう。第10図は振動を計測しているところの図である。軸継手は直径3 mm、長さ80 mmの細長い鉄棒と直径80 mmのダイアフラムからできており、軸継手と同時にスラストを加えるばねの役目を果たしている。

回転軸の軸方向および水平方向の振動の同時測定が

$\alpha_0 = 0.22$ rad, $F_{th} = 2.73$ kg

第9図 振幅特性

①, ②: 微動用ねじ, ③: 軸受台, ④: ダイアフラム,
⑤: 供試玉軸受
A, B: 振動測定用電極, C, D: 回転速度測定用電極

第10図 実験装置図

でき、また玉保持器速度および軸回転速度も同時に測定できるようになっている。これらの振動および回転速度はすべて電気容量変換形の測定器を用いて測定し、周波数分析器で分析できるようになっている。

3.2 供試玉軸受 6207形玉軸受の内、外輪を用いて、玉数を6個に組変えて使用した。内、外輪および玉の直径を水平オプチメータで、また内、外輪のみぞ径をゲージによって測定した結果ならびにそれらの値から計算された $W/c_0 \Delta^{1.5}$ の値を第2表に示す。

3.3 静力学的実験 回転体重量14 kg、軸受荷重7.78 kgのときx軸上に玉が存在している状態におけるスラスト F_{th} と軸方向変位の実験結果を第6図にプロットした。この図から理論値と実験値はよく一致していることがわかる。

3.4 振動測定 軸回転角速度 ω が系の固有角振動数 ω_n にはほぼ近いところで軸方向振動を計測し、周波数分析器で分析した。スラストが0, 0.44 および 2.73 kg の各場合について実験を行なった。それらの実験結果を第7～9図にそれぞれプロットした。スラストが0および0.44 kg の各場合は hard spring の跳躍現象がみうけられ、スラストが 2.73 kg の場合には soft spring の跳躍現象がみうけられる。これらの現象は定性的に解析結果と一致している。

スラストが零の場合、角振動数が 3ω の高次振動はほとんど含まれていなかった。(34)式に A_1 の実験値を代入してみると $[A_3/A_1]_{\alpha_0=0} \doteq 0.01$ になるのである。
 $A_1=0.22$

第9図の場合、解析結果は実験と一致していないがこれは非線形ばね特性を表わす(9)式で $\mu=5$ とおいたためであって、 μ をもっと大きな奇数にとれば実験値に近い計算結果がえられると考える。

4. 結 論

本論文で解析した玉軸受軸方向の非線形ばね特性は

負荷を受けている玉数の変化によるもので、実験とよく一致している。スラストが零付近を中心とする振動の振幅特性は hard spring の特性を示し、内輪のみぞ横ぶれにもとづく変位 ε_1 が大きいと、顕著な跳躍現象が現われる。スラストが大きくなると振動現象は非常に複雑になり、一般にあるスラスト以上では soft spring の特性を示すようになる。これらの現象は定性的に解析結果と一致している。

終りに本研究の遂行にあたって、石川島播磨重工業会社の小林敏宏君の御協力をえたことを記し、深く感謝します。

文 献

- (1) 田村, 谷口, 機械学会論文集, 26, 167 (昭35-7), 877.
- (2) 田村, 谷口, 機械学会論文集, 26, 170 (昭35-10), 1428.
- (3) たとえば伊藤, ベアリングエンジニア, 8, 1 (昭34), 1014.
- (4) B. Jäger, *Konstruktion*, 10, 3 (1958), 87.
- (5) E. Meldau, *Werkstatt u. Betrieb*, 87, 2 (1954), 71.
- (6) 田村, 谷口, 機械学会論文集, 26, 161 (昭35-1), 19.

討

〔質問〕 第6図にスラスト荷重に対する圧力角 α の測定値が示されているが、 α の測定値は軸受誤差により種々の内輪回転位置で異なることが考えられるし、また特にスラスト荷重の小さい場合、軸受内部の摩擦などによって内、外輪と玉とのなす圧力角はそれぞれ異なったものとなる傾向があると思うが、測定値はどのような圧力角を採用されたか。また、この測定は軸受静止状態で行なわれたものであるが、運転状態では異なるものとなることも懸念されるがどうか。

(井沢 実)

〔回答〕 本論文の圧力角 α の値は回転軸の軸方向変位から計算したもので、圧力角そのものの測定は行なっていない。

軸受内部の摩擦によって内、外輪と玉とのなす圧力角はそれぞれ異なったものとなる傾向があるのではないかと質問ですが、本論文ではそのような摩擦は無視している。

次に軸受の静止状態で測定された玉軸受のばね特性は、運転状態では異なったものになるのではないかと質問ですが、本論文の振動測定の実験結果と計算結果を比較すると、大きな差はなく、むしろ一致していると思ふ。本論文の軸方向のばね特性の実験は各スラストに対して内、外輪および玉の位置の關係が常に同じ状態で測定したものである。第6図に示した軸方向のばね特性は荷重方向(鉛直方向)に玉が

論

存在している状態におけるばね特性である。回転中における軸方向のばね特性に近いものをうるため、実験方法としてはまず一定スラストを加え、次に軸を一週回転し、さらに+1回転して軸の回転をとめ、そのときの軸の軸方向変位を容量変換器によって測定したのである。

なお本論文では省略したことであるが、玉軸受の軸方向のばねこわさは内輪の回転位置によって変ることが考えられる。玉軸受の軸方向のばねこわさは、負荷を受けている玉数に非常に影響をうけることは本論文の解析から明らかである。内輪のみぞ横ぶれのために内輪の回転位置によって負荷をうける玉数がかかることが考えられる。このように考えると内輪の回転位置によるばねこわさの変動の角振動数は内輪の角速度の2倍でなければならない。したがって運動方程式は(28)式の α の係数に角振動数 2ω をもつ項をそう入せねばならないと考えられる。

すなわち

$$\ddot{\alpha} + \left\{ \omega_0^2 (1 - 2\lambda \cos 2\omega_0 t - 2\lambda' \cos 2\omega t) + \frac{k}{m} \right\} \alpha + \nu \alpha'' = - \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum \frac{\varepsilon_j}{c} \cos j\omega t \right) + \frac{k}{m} \left(\frac{Z_0}{c} - \sum \frac{\varepsilon_j}{c} \cos j\omega t \right)$$

となる。 ω が ω_n に近い回転速度における定常振動の

解には λ' が変数としてはいってくる⁽²⁾(答1)。しかしこの振動系の減衰量にくらべて λ' が非常に小さい場合には、 λ' を無視しても定常振幅の値はほとんど変らない。

本論文の実験においては $2\lambda'$ の値を測定しており、 $2\lambda'$ の値は非常に小さく、十分無視しうるので省略したのである。

(答1) 榎木, 高橋, 機械学会論文集, 17, 64 (昭26-12), 18.

539.382.013:621.884.085

縦 列 リ ベ ッ ト 継 手 の 研 究*

福 井

清**

Studies on the Single Lined Riveted Joint

by Kiyoshi HUKUI

We studied the load distribution on rivets of the joint, when the rivets line up in the direction of the load. We obtained the load distribution experimentally at first, and then represented it approximately by a difference equation.

We compared the numerical calculation of this solution with the experimental result, and found out that this approximate solution gave us sufficiently accurate result. It was also found that, within the elastic limit, most of the loaded rivets in a five-rivet joints were under the load twice the mean value, contrary to the supposition that all the rivets carry equal load.

1. 緒 言

型鋼材を組立てて構成したトラスにおいて、その部材の結合点である格点でリベット継手を使用されるとき、これに用いられている型鋼材の形状が細長いために、一つのリベット継手において数本のリベットが荷重の加えられる方向に並んで用いられる場合が往々にして発生する。このような継手(縦列リベット継手)の各リベットに加わる荷重については、すでに F. Bleich によって、その解法⁽¹⁾が示され、その他にも二、三の類似の研究が発表されているが、一般には全部のリベットに均一に力加わるものとして計算されている。その理由は Bleich も述べているごとく「各リベットに加わる力は弾性限界を越えると、急速に一樣になるゆえに」となっているが、このことの程度のことは別に検討するとしても、通常使用するのはいちろん弾性限界内においてであり、この範囲では各リベットに加わる荷重の間には相当な相違がある。したがって特に重負荷の荷重が繰返し加わる場合などには、これは考えに入れぬわけにはいかない。それゆえに筆者は 1/2 in リベットの3本から5本までが縦方

向に一列に配置された一面せん断リベット継手の場合の各リベットに実際に加わる荷重を、抵抗線ひずみ計を用いて測定し、リベットと部材断面の種々の割合の場合の各リベットの荷重分布を調査し、また従来は相当広い範囲で与えられていた滑動係数に関して、普通使用される程度のリベット断面積と部材断面積の割合の場合の数値を、実験的に求め、従来得られていなかった変化断面の場合の理論式を差分方程式を用いて誘導し、この数値計算式の結果と各種の実験結果を比較した。

2. 実 験

ここに次の記号を使用することとする(第1図参照)。

第 1 図 リベット継手記号図

* 昭和 34 年 3 月 20 日 関西支部第 34 期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 35 年 2 月 17 日。

** 正員, 立命館大学理工学部(京都市北区等寺院北町)。