539. 4. 013:624. 072. 3:621-477

穴べりに集中荷重をうける平面鎖環の応力*

小 泉 堯**, 中 原 一 郎**

Stresses in a Two-Dimensional Chain Link Loaded by Two Concentrated Forces on the Inner Boundary

by Takashi KOIZUMI and Ichiro NAKAHARA

The exact solution of the stress distributions in chain links loaded by two concentrated forces has not been presented.

Stresses in chain links are always analysed approximately by means of "Theory of beams".

In the present paper, the stresses in a two-dimensional chain link are analysed by using the mapping function

$$Z = s(\zeta + t/\zeta + m/\zeta^3)$$

In addition, the stresses in a simple chain link with a uniform and rectangular cross-section are obtained by the formulas based on "Theory of beams". The former results are compared with the latter ones.

In each case, the tangential stresses on the free boundary are measured by the photo-elastic method.

When the theoretical results in the former analysis are compared with experimental ones, there is a good agreement between them, but the theoretical results in the latter analysis are slightly different from the experimental ones.

1. ま え が き

鎖環は動力伝達の目的に古くから用いられ、機械要素として重要な地位をしめているが、第1図に示されたような形状の鎖環に生じる三次元応力の厳密解をうけることはきわめて困難である。そのために、従来から鎖環の応力は曲りはり理論によって近似的に解析されている⁽¹⁾。しかし、曲りはり理論による応力解析においては、曲率が不連続になる断面 A-A' において応力の連続条件の代りに合応力および合モーメントの連続条件を採用し、また作用外力は外力の作用面上に働く合せ断応力におきかえられる。ゆえに曲りはり理論によって導かれた応力分布は断面 A-A' および外力の作用点の付近で最も大きな誤差を生じる。Wellinger, Karl u. Stanger⁽²⁾は第1図のような鎖環の応力を抵抗線ひずみ計によって、また岡本・三木⁽³⁾は正方形断面の鎖環の応力を光弾性実験法によって測定した。本研究においては、Greenspan⁽⁴⁾によって導かれた写像関数を用いて二つの半円部と直線部からなる平面鎖環を対象として応力解析を行ない、曲りはり理論

によって導かれる結果と比較した。また両解析の対象とした平面鎖環の内外両縁に生じる接線応力を光弾性実験法によって測定し、それぞれの計算結果と比較検討した。

2. 写像関数と応力成分

写像関数⁽³⁾

$$Z = \omega(\zeta) = s\left(\zeta + \frac{t}{\zeta} + \frac{m}{\zeta^3}\right) \dots \dots \dots (1)$$

を考える。この関数によって ζ 面の単位円の外部領域は Z 面のオーバル境界の外部領域に写像され(第2図), (1)式において $\zeta = \rho e^{i\theta}$ とおけば、オーバル境界の座標 (x, y) は次式で与えられる。

第 1 図

* 昭和 35 年 4 月 2 日 第 37 期通常総会講演会において講演，原稿受付 昭和 35 年 9 月 21 日。

** 正員，東京工業大学(東京都目黒区大岡山 1)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s}x &= \left(\rho + \frac{t}{\rho}\right) \cos \theta + \frac{m}{\rho^3} \cos 3\theta \\ \frac{1}{s}y &= \left(\rho - \frac{t}{\rho}\right) \sin \theta - \frac{m}{\rho^3} \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで t , m の値はオーバル境界の形状を, また s の値はその大きさを規定する実数パラメータである。

直交曲線座標系 (ρ, θ) によって応力成分は二つの複素応力関数 $\Phi(\zeta)$ および $\Psi(\zeta)$ を用いて次式で表わされる。

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2\{\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \{\overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta)\} \\ &\dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \dots\dots\dots (5), (6)$$

そして $'$ は ζ に関する微分を表わす。

3. オーバル穴を有する無限板

x 軸に沿って穴べりに一对の集中荷重 P [kg/(単位厚さ)] が作用するとき, 穴べりにおける境界条件⁽⁴⁾⁽⁵⁾は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)} \\ = f \begin{cases} = -iP & (0 \leq \theta < \pi) \\ = 0 & (\pi \leq \theta < 2\pi) \end{cases} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

剛体変位を生じないで, 無限遠において応力が消失するためには $\varphi(\zeta)$ および $\psi(\zeta)$ は次の条件を満足しなければならない。

$$[\varphi(\zeta)]_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad [\psi(\zeta)]_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \dots\dots\dots (8), (9)$$

そこで $|\zeta| > 1$ なる領域において $\varphi(\zeta)$ および $\psi(\zeta)$ は次のように表わすことができる。

$$\varphi(\zeta) = \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \frac{c_3}{\zeta^3} + \dots\dots\dots (10)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \dots\dots\dots (11)$$

ここで, $c_1, c_2, c_3, \dots\dots$ および $a_1, a_2, a_3, \dots\dots$ は穴べりにおける境界条件, (7) 式から決定される未知複素係数である。(10), (11) 式を考慮して (7) 式を ζ 面における単位円に沿って線積分すると, 単位円外の ζ

第 2 図

に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\varphi(\zeta) \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \bar{c}_1 \frac{m}{\zeta} \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{P}{2\pi} \ln \frac{\zeta+1}{\zeta-1} \dots\dots\dots (15)$$

γ : ζ 面における単位円

したがって

$$\varphi(\zeta) = \bar{c}_1 \frac{m}{\zeta} + \frac{P}{2\pi} \ln \frac{\zeta+1}{\zeta-1} \quad (|\zeta| > 1) \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。(16) 式の右辺を $1/\zeta$ のべき級数に展開し, 左辺に (10) 式を代入して, 両辺の $1/\zeta$ の同べき項の係数を等置すると

$$c_1 = \frac{1}{1-m} \frac{P}{\pi} \dots\dots\dots (17)$$

をうる。(17) 式を (16) 式に代入すると

$$\frac{\pi}{P} \varphi(\zeta) = \frac{m}{1-m} \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta+1}{\zeta-1} \quad (|\zeta| > 1) \dots\dots\dots (18)$$

同様に, (7) 式と共役な式を ζ 面での単位円に沿って線積分すると

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{P} \psi(\zeta) &= -\frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{\pi}{P} \varphi'(\zeta) - \frac{m}{1-m} \zeta \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta+1}{\zeta-1} \quad (|\zeta| > 1) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

が導かれる。(18), (19) 式を (5), (6) 式に代入し, それらを (3), (4) 式に代入して整理すると, オーバル穴を有する無限板の穴べりに x 軸に沿って一对の集中荷重が作用するときの応力成分 (添字 I を用いて表わす) として

$$\begin{aligned} -\frac{s\pi}{P} (\sigma_{\rho, I} - i\tau_{\rho\theta, I}) &= \frac{\zeta^2}{\zeta^4 - t\zeta^2 - 3m} \left(c + \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} \right) + \frac{\bar{\zeta}^2}{\bar{\zeta}^4 - t\bar{\zeta}^2 - 3m} \left(c + \frac{\bar{\zeta}^2}{\bar{\zeta}^2 - 1} \right) \\ &\quad + \frac{\zeta \cdot \bar{\zeta}^3}{\zeta^4 - t\zeta^2 - 3m} \left[2 \frac{\zeta^4}{\bar{\zeta}^3} \frac{\bar{\zeta}^4 + t\bar{\zeta}^2 + m}{(\zeta^4 - t\zeta^2 - 3m)^2} \left[\frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \zeta^5 - (t-3m)\zeta - \frac{6m}{\zeta} \right\} + c \left(\zeta + \frac{3m}{\zeta^3} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2\zeta^2 \frac{(1+m)t\zeta^4 + 2(1+3m^2)\zeta^2 + (3m-1)t}{(\zeta^4 - t\zeta^2 - 3m)^2} \left(c + \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+t\zeta^2+m\zeta^4}{\zeta^4 - t\zeta^2 - 3m} \left\{ c + \frac{\zeta^2-3}{(\zeta^2-1)^2} \zeta^2 \right\} + \frac{1}{\zeta^2-1} - c \right] \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\frac{s\pi}{P}(\sigma_{\rho, I} + \sigma_{\theta, I}) = -\frac{2\zeta^2}{\zeta^4 - t\zeta^2 - 3m} \left(c + \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} \right) - \frac{2\bar{\zeta}^2}{\bar{\zeta}^4 - t\bar{\zeta}^2 - 3m} \left(c + \frac{\bar{\zeta}^2}{\bar{\zeta}^2 - 1} \right) \quad (21)$$

が得られる。ここで

$$c = \frac{m}{1-m} \quad (22)$$

である。

4. 穴べりに集中荷重をうける近似平面鎖環

第3図に示されたように $\rho = \rho_0 = e^0 = 1$ および $\rho = \rho_1 = e^{0.25}$ の二つの閉曲線によって包囲された環状領域で示される近似平面鎖環に一对の集中荷重 P [kg/(単位厚さ)] が作用するとき、近似平面鎖環に生じる応力は前節で求めた応力成分に次式で示される境界条件を満足する応力成分 (添字IIを用いて表わす) を重ね合わせて得られる。

$$(\sigma_{\rho, II} - i\tau_{\rho\theta, II})_{\rho=1} = 0 \quad (23)$$

$$(\sigma_{\rho, II} - i\tau_{\rho\theta, II})_{\rho=\rho_1} = -(\sigma_{\rho, I} - i\tau_{\rho\theta, I})_{\rho=\rho_1} \quad (24)$$

添字IIを用いて表わされた応力は (3), (4) 式で与えられ、ここで $\Phi(\zeta)$ および $\Psi(\zeta)$ は環状領域で正則

第3図 近似平面鎖環

な関数でなければならないことを考慮すれば、 $\Phi(\zeta)$ および $\Psi(\zeta)$ は次のような形で表わされねばならない。

$$\Phi(\zeta) = \frac{P}{s\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n} \zeta^{2n} \quad (25)$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{P}{s\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{2n} \zeta^{2n} \quad (26)$$

(25), (26)式より導かれる変位成分は並進形食違いを生じない。そして A_{2n} , B_{2n} は境界条件から決まる未知実係数である。(25), (26) 式を (3), (4) 式に代入すると、複素応力関数 $\Phi(\zeta)$ および $\Psi(\zeta)$ から導かれる応力成分は次式で与えられる。

$$\frac{s\pi}{P}(\sigma_{\rho, II} - i\tau_{\rho\theta, II}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n}(\zeta^{2n} + \bar{\zeta}^{2n}) - \frac{\rho^2 \bar{\zeta}^2}{s(\bar{\zeta}^4 - t\bar{\zeta}^2 - 3m)} \left[\overline{\omega(\zeta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2n A_{2n} \zeta^{2n-1} + \omega'(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{2n} \zeta^{2n} \right] \quad (27)$$

$$\frac{s\pi}{P}(\sigma_{\rho, II} + \sigma_{\theta, II}) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n}(\zeta^{2n} + \bar{\zeta}^{2n}) \quad (28)$$

未知係数 A_{2n} , B_{2n} を決定するために、(20)式に $\rho = \rho_1$ を代入して次のように変形する。

$$-\frac{s\pi}{P}(\sigma_{\rho, I} - i\tau_{\rho\theta, I})_{\rho=\rho_1} = \frac{1}{\rho_1^4 - t\rho_1^2\sigma^2 - 3m\sigma^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{2n} \tau^{-2n} \quad (29)$$

ここで D_{2n} は

$$D_{2n} = \begin{cases} = \rho_1^2 \gamma_{2(n+1)} & (n \geq 0 \text{ のとき}) \\ = \rho_1^2 (1 + \gamma_0) & (n = -1 \text{ のとき}) \\ = \rho_1^2 \gamma_{2(n+2)} & (n \leq -2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=s}^6 \alpha_{2n} \gamma_{2(n-s)} &= \beta_{2s} \quad (0 \leq s \leq 6) \\ \sum_{n=0}^6 \alpha_{2n} \gamma_{2(n+p)} &= 0 \quad (1 \leq p \leq \infty) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{9m^2}{\rho_1^{12}}, \quad \alpha_2 = -\frac{6m}{\rho_1^{10}}(3m-t), \quad \alpha_4 = \frac{1}{\rho_1^8} \{ (3m-t)^2 - 6m(1+t) \}, \\ \alpha_6 &= \frac{2}{\rho_1^6} \{ (3m-t)t + 6m-t \}, \quad \alpha_8 = \frac{1}{\rho_1^4} (t^2 - 6m + 4t + 1), \quad \alpha_{10} = -\frac{2}{\rho_1^2} (1+t), \quad \alpha_{12} = 1 \\ \beta_0 &= 3cm \left(\frac{1}{\rho_1^8} - \frac{4}{\rho_1^{10}} + \frac{3m}{\rho_1^{12}} \right) \\ \beta_2 &= -\frac{1}{\rho_1^6} \{ (6+t)c + 3m \} + \frac{1}{\rho_1^8} \{ (9m^2 + 15m - 9mt - 5t)c + 9m \} + \frac{3cm}{\rho_1^{10}} (5t - 6m) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= \frac{1}{\rho_1^4} \{2(3+t)c-t\} + \frac{1}{\rho_1^6} \{(9mt-24m^2-2t^2+19t)c+t(1-t)\} \\
&\quad + \frac{1}{\rho_1^8} (9m^2-15mt+2t^2-15t-6m)c + 15c \frac{m^2}{\rho_1^{12}} \\
\beta_6 &= -\frac{1}{\rho_1^2} \{1+t+(t+6)c\} + \frac{1}{\rho_1^4} \{(4t^2-9mt+9m^2-7t+9m+6)c \\
&\quad + (4t^2-6m+3t+1)\} + \frac{1}{\rho_1^6} \{(6mt-4t^2+12m+8t)c-3t^2\} \\
&\quad + \frac{3m}{\rho_1^{10}} \{(t-10m)c-7m\} \\
\beta_8 &= 3(1+c) + \frac{1}{\rho_1^2} \{(3t-2t^2+mt-8m-4)c-(t^2+3t+4)\} \\
&\quad + \frac{1}{\rho_1^4} \{(1-6m+2t+2t^2)c+t(1+t)\} + \frac{m}{\rho_1^8} \{2(7-3t)c-5t\} \\
\beta_{10} &= (1-t-m-2ct) + \frac{1}{\rho_1^2} \{t-(2+t)c\} + \frac{1}{\rho_1^6} \{(3t+2m)c+3m\}, \quad \beta_{12} = \left(1 - \frac{1}{\rho_1^4}\right) c
\end{aligned} \tag{33}$$

なる関係式より決定される値である。また (27) 式を変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{s\pi}{P} (\sigma_{\rho, \Pi} - i\tau_{\rho\theta, \Pi}) &= \frac{1}{\rho^4 - t\rho^2\sigma^2 - 3m\sigma^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{2n} \sigma^{2n} \left[-(2n-1) \left\{ A_{2n}\rho^4 + tA_{2n-2} + \frac{m}{\rho^4} A_{2n-4} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho^{4n-4}} \{A_{-2n} - tA_{-2n+2} - 3mA_{-2n+4}\} - \rho^2 \{B_{2n-2} - tB_{2n} - 3mB_{2n+2}\} \right] \tag{34}
\end{aligned}$$

(29), (34) 式を境界条件式 (23), (24) 式に代入し, 両辺の σ の同べき項の係数を等置すると, $-\infty \leq n \leq \infty$ に対して

$$\begin{aligned}
&-(2n-1) \{A_{2n} + tA_{2n-2} + mA_{2n-4}\} + \{A_{-2n} - tA_{-2n+2} - 3mA_{-2n+4}\} \\
&- \{B_{2n-2} - tB_{2n} - 3mB_{2n+2}\} = 0 \tag{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-(2n-1) \left\{ A_{2n}\rho_1^4 + tA_{2n-2} + \frac{m}{\rho_1^4} A_{2n-4} \right\} + \frac{1}{\rho_1^{4n-4}} \{A_{-2n} - tA_{-2n+2} - 3mA_{-2n+4}\} \\
&- \rho_1^2 \{B_{2n-2} - tB_{2n} - 3mB_{2n+2}\} = \frac{1}{\rho_1^{2n}} D_{-2n} \tag{36}
\end{aligned}$$

(35), (36) 式より B_{2n} を消去すると

$$\begin{aligned}
&-(2n-1) \left\{ \rho_1^2 (\rho_1^2 - 1) A_{2n} - (\rho_1^2 - 1) t A_{2n-2} - \frac{m}{\rho_1^4} (\rho_1^6 - 1) A_{2n-4} \right\} \\
&+ \left(\frac{1}{\rho_1^{4n-4}} - \rho_1^2 \right) \{A_{-2n} - tA_{-2n+2} - 3mA_{-2n+4}\} = \frac{1}{\rho_1^{2n}} D_{-2n} \tag{37}
\end{aligned}$$

$n \geq 0$ のとき

$$\rho_1^{2n} A_{2n} = E_{2k} \quad (k \geq 0), \quad \rho_1^{-2n} A_{-2n} = M_{2k} \quad (k \geq 0), \quad E_0 = M_0 = A_0 \tag{38}$$

とおけば, (37) 式は次のように書きかえられる。

$k=0$ のときは

$$2\rho_1^2 (\rho_1^2 - 1) A_0 - t\rho_1^2 (\rho_1^2 - 1) M_2 - m(\rho_1^6 - 1) M_4 - t(\rho_1^2 - 1) E_2 - 3m(\rho_1^2 - 1) \rho_1^{-2} M_4 = D_0 \tag{39}$$

$k=1$ のときは

$$2t\rho_1^2 (\rho_1^2 - 1) A_0 - (\rho_1^2 - 3m) (\rho_1^2 - 1) E_2 - \{(1-m)\rho_1^4 - m\rho_1^2 - m\} (\rho_1^2 - 1) M_2 = D_{-2} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&3\rho_1^8 (\rho_1^2 - 1) M_2 - 3t\rho_1^8 (\rho_1^2 - 1) M_4 - 3m\rho_1^6 (\rho_1^6 - 1) M_6 + \rho_1^4 (\rho_1^6 - 1) E_2 - \rho_1^2 (\rho_1^6 - 1) E_4 \\
&- 3m(\rho_1^6 - 1) E_6 = \rho_1^6 D_2 \tag{41}
\end{aligned}$$

$k \geq 2$ のときは

$$\begin{aligned}
&-(2k-1) (\rho_1^2 - 1) \{\rho_1^2 E_{2k} - t\rho_1^2 E_{2k-2} - m(\rho_1^4 + \rho_1^2 + 1) E_{2k-4}\} \\
&- (\rho_1^{4k-2} - 1) \{\rho_1^4 M_{2k} - t\rho_1^2 M_{2k-2} - 3mM_{2k-4}\} = D_{-2k} \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2k+1) (\rho_1^2 - 1) \{\rho_1^2 M_{2k} - t\rho_1^2 M_{2k+2} - m(\rho_1^4 + \rho_1^2 + 1) M_{2k+4}\} \\
&+ (1 - \rho_1^{-4k-2}) \{\rho_1^4 E_{2k} - t\rho_1^2 E_{2k+2} - 3mE_{2k+4}\} = D_{2k} \tag{43}
\end{aligned}$$

(39), (40), (41) 式および (42), (43) 式を E_{2k} , M_{2k} に関する無限連立方程式として解くと, 未知係数 A_{2k} が決まり, この値を用いれば, (35) 式あるいは (36) 式から B_{2k} が決まる.

5. 応 力 計 算

第 3 図に示されたように, x 軸に沿って一対の集中荷重 P が内べりに作用する近似平面鎖環に生じる応力は添字 I, II で示された応力を一次的に結合したもので表わされる.

$$(\sigma_\theta + \sigma_\rho) = (\sigma_{\theta \cdot I} + \sigma_{\rho \cdot I}) + (\sigma_{\theta \cdot II} + \sigma_{\rho \cdot II}) \quad (44)$$

$$(\sigma_\rho - i\tau_{\rho\theta}) = (\sigma_{\rho \cdot I} - i\tau_{\rho\theta \cdot I}) + (\sigma_{\rho \cdot II} - i\tau_{\rho\theta \cdot II}) \quad (45)$$

(44), (45) 式に (20), (21) 式および (27), (28) 式を代入して整理すると求める応力成分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{s\pi}{2P} (\sigma_\theta + \sigma_\rho) = & -\frac{2c\rho^2}{Q(\rho, \theta)} \{(\rho^4 - 3m) \cos 2\theta - t\rho^2\} \\ & - \frac{2\rho^4}{Q(\rho, \theta)} \frac{1}{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1} \{3m \cos 4\theta + \rho^2(\rho^4 + t - 3m) \cos 2\theta - \rho^4(1+t)\} \\ & + 2A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left\{ E_{2k} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{2k} + M_{2k} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{2k} \right\} \cos 2n\theta \quad (46) \end{aligned}$$

ここで

$$Q(\rho, \theta) = -6m\rho^4 \cos 4\theta - 2t\rho^2(\rho^4 - 3m) \cos 2\theta + \rho^8 + t^2\rho^4 + 9m^2 \quad (47)$$

である.

$$\begin{aligned} \frac{s\pi}{P} Q(\rho, \theta) \sigma_\rho = & cR_1(\rho, \theta) + \frac{\rho^4}{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1} R_2(\rho, \theta) + \frac{2\rho^6}{(\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1)^2} R_3(\rho, \theta) \\ & - \frac{2c\rho^2}{Q(\rho, \theta)} R_4(\rho, \theta) + \frac{2}{Q(\rho, \theta)} \frac{\rho^8}{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1} R_5(\rho, \theta) - \frac{2}{Q(\rho, \theta)} \frac{\rho^2}{(\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1)^2} R_6(\rho, \theta) \\ & + T_{11}(\rho) \{(\rho^4 - 3m) \cos 2\theta - t\rho^2\} \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} T_{1k}(\rho) \{\rho^4 \cos 2k\theta - t\rho^2 \cos 2(k-1)\theta - 3m \cos 2(k-2)\theta\} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} T_{2k}(\rho) \{\rho^4 \cos 2k\theta - t\rho^2 \cos 2(k+1)\theta - 3m \cos 2(k+2)\theta\} \quad (48) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} R_1(\rho, \theta) = & \{(1-m)\rho^8 - 2\rho^6 - (1+3m)\rho^4 + 6m\rho^2\} \cos 2\theta - 2t\rho^4(\rho^2 - 1) \\ R_2(\rho, \theta) = & (\rho^6 + 3\rho^2 - 6)m \cos 4\theta - \{m\rho^8 + 2\rho^6 - 2t\rho^4 + 2(t-3m)\rho^2 + 3m\} \cos 2\theta \\ & - \{(1+t)\rho^4 - 2(1+t)\rho^2 - (1-t)\} \rho^2 \\ R_3(\rho, \theta) = & (1+m)\rho^4 \cos 4\theta + \{(t-2m)\rho^4 - (2-t)\} \rho^2 \cos 2\theta + \{m\rho^8 - 2t\rho^4 + 1\} \\ R_4(\rho, \theta) = & 3m\rho^4(\rho^4 - m) \cos 6\theta + t\{(1+3m^2)\rho^2 - 4m\} \rho^6 \cos 4\theta \\ & + \{\rho^{12} - (2+6m^2 - t^2 - mt^2)\rho^{10} - (2m+t^2)\rho^8 + (6m - t^2 + 3mt^2 + 18m^3)\rho^6 \\ & - 3m(2m+t^2)\rho^4 - 9m^3\} \cos 2\theta - \{(1+m)\rho^{10} - 2(1+3m^2)\rho^6 + 3m(1-3m)\rho^2 + 12m^2\} t\rho^2 \\ R_5(\rho, \theta) = & 3mt(1+m)\rho^4 \cos 6\theta + \{(t+mt-1-3m^2)t\rho^4 + 6m(1+3m^2)\} \rho^2 \cos 4\theta \\ & + \{(2-t-mt+6m^2 - t^2 - mt^2)\rho^8 + (3t-6m+t^2-3mt+6m^2t-3mt^2-18m^3)\rho^4 \\ & - 3mt(1-3m)\} \cos 2\theta + \{(1+m)t\rho^8 - 2(1+3m^2)(1+t)\rho^4 - (1-3m)t(t-3m)\} \rho^2 \\ R_6(\rho, \theta) = & -3m^2\rho^8 \cos 10\theta - 2m\{3\rho^4 + (2t-3m)\} \rho^{10} \cos 8\theta \\ & + \{(3m-t)\rho^{12} + (8mt-t^2+10m-3m^2)\rho^8 - 3m^2(3m-t)\} \rho^4 \cos 6\theta \\ & + \{2(t+t^2-m-2mt)\rho^{12} - 6m(1-2m-t^2)\rho^8 + 2m(9m^2-9mt+2t^2)\rho^4 + 18m^3\} \rho^2 \cos 4\theta \\ & + \{\rho^{16} + (1-2m-t^2)\rho^{12} + (3m-t)(1-2m-t^2)\rho^8 + (t^3-23mt^2+51m^2t+2mt-30m^2 \\ & - 9m^3)\rho^4 + 12m^2(2t-3m)\} \rho^4 \cos 2\theta \\ & + 2\{-\rho^{12} + (3m-t)(2m+t^2-2mt)\rho^4 + 3m(t^2-8mt+2m+3m^2)\} \rho^6 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned}
T_{11}(\rho) &= 2t\rho^2(\rho^2-1)A_0 - \left\{ \rho_1^2\rho^2(\rho^2-1) - m\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2(\rho^6-1) \right\} M_2 - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2(\rho^2-1)(\rho^2-3m)E_2 \\
T_{1k}(\rho) &= -(2k-1)\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{2k}\rho^2(\rho^2-1)\left\{ E_{2k} - t\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 E_{2k-2} - m\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4\left(\rho^2+1+\frac{1}{\rho^2}\right)E_{2k-4} \right\} \\
&\quad - \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{2k-4}(\rho^{4k-2}-1)\{\rho_1^4 M_{2k} - t\rho_1^2 M_{2k-2} - 3m M_{2k-4}\} \\
T_{2k}(\rho) &= (2k+1)\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{2k}\rho^2(\rho^2-1)\left\{ M_{2k} - t\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 M_{2k+2} - m\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4\left(\rho^2+1+\frac{1}{\rho^2}\right)M_{2k+4} \right\} \\
&\quad + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{2k+4}\left(1-\frac{1}{\rho^{4k+2}}\right)\{\rho_1^4 E_{2k} - t\rho_1^2 E_{2k+2} - 3m E_{2k+4}\}
\end{aligned} \right\} \dots (50)$$

である。

$$\begin{aligned}
\frac{s\pi}{P} Q(\rho, \theta) \tau_{\theta\theta} &= -c\theta_1(\rho, \theta) + \frac{\rho^4}{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1} \theta_2(\rho, \theta) + \frac{2\rho^8}{(\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1)^2} \theta_3(\rho, \theta) \\
&+ \frac{2c\rho^2}{Q(\rho, \theta)} \theta_4(\rho, \theta) - \frac{2}{Q(\rho, \theta)} \frac{\rho^8}{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1} \theta_5(\rho, \theta) + \frac{2}{Q(\rho, \theta)} \frac{\rho^2}{(\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1)^2} \theta_6(\rho, \theta) \\
&- T_{11}(\rho)(\rho^4 + 3m) \sin 2\theta \\
&- \sum_{k=2}^{\infty} T_{1k}(\rho) \{\rho^4 \sin 2n\theta - t\rho^2 \sin 2(n-1)\theta - 3m \sin 2(n-2)\theta\} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} T_{2k}(\rho) \{\rho^4 \sin 2n\theta - t\rho^2 \sin 2(n+1)\theta - 3m \sin 2(n+2)\theta\} \dots (51)
\end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
\theta_1(\rho, \theta) &= \{(1-m)\rho^4 + 1 + 3m\} \rho^4 \sin 2\theta \\
\theta_2(\rho, \theta) &= -(\rho^4 - 3)m\rho^2 \sin 4\theta + (m\rho^8 - 2\rho^4 - 3m) \sin 2\theta \\
\theta_3(\rho, \theta) &= (1-m)\rho^2 \sin 4\theta + \{(t+2m)\rho^4 - 2 - t\} \sin 2\theta \\
\theta_4(\rho, \theta) &= -3m\rho^4(\rho^4 + m) \sin 6\theta - \{(1-6m-3m^2)\rho^2 + 4m\} t\rho^6 \sin 4\theta \\
&\quad + \{-\rho^{12} + (t^2 + 2 + 6m^2 + mt^2)\rho^{10} - (2m + t^2)\rho^8 + (6m + 18m^3 - 3mt^2 + t^2)\rho^6 \\
&\quad + 3m(2m + t^2)\rho^4 - 9m^3\} \sin 2\theta \\
\theta_5(\rho, \theta) &= 3mt(1+m)\rho^4 \sin 6\theta + \{(1+t-6m+mt-3m^2)t\rho^4 + 6m(1+3m^2)\} \rho^2 \sin 4\theta \\
&\quad - \{(1+t)(1+m)t\rho^8 + 2(1+3m^2)\rho^8 + (t^2 - t + 6m - 6m^2t + 18m^3 - 3mt - 3mt^2)\rho^4 \\
&\quad + 3mt(1-3m)\} \sin 2\theta \\
\theta_6(\rho, \theta) &= -3m^2\rho^8 \sin 10\theta + 2(3\rho^4 + 3m - 2t)m\rho^{10} \sin 8\theta \\
&\quad - \{(3m-t)\rho^{12} + (t^2 + 3m^2 + 14m - 8mt)\rho^8 + 3m^2(3m-t)\} \rho^4 \sin 6\theta \\
&\quad + 2\{(5m+t^2-2mt-t)\rho^{12} + 3m(1-2m-t^2)\rho^8 + (9m^2-9mt+2t^2)m\rho^4 + 9m^3\} \rho^2 \sin 4\theta \\
&\quad - \{\rho^{16} - (1-2m-t^2)\rho^{12} + (3m-t)(1-2m-t^2)\rho^8 - (t^3 + mt^2 + 3m^2t + 2mt + 18m^2 \\
&\quad - 9m^3)\rho^4 - 12m^2(2t-3m)\} \rho^4 \sin 2\theta
\end{aligned} \right\} \dots (52)$$

である。

6. 数 値 計 算

一例として, $t=0.301387$, $m=-0.049811$, $\rho_1=e^{0.25}$, $\rho_0=e^0=1$ によって表わされる近似平面鎖環について数値計算を行なった。数値計算においては, 展開式 (29) の収束性を考慮して, (25), (26) 式以後の無限級数を $-20 \leq n \leq 20$ の有限級数で近似した。 D_{2n} の値は第 1 表に示され, この値を用いれば (39) 式から (43) 式までに示された係数方程式から E_{2k} , M_{2k} が決まり, それらの値は第 2 表に示されている。このさい $k \geq 21$ に対する係数 E_{2k} , M_{2k} を零と仮定した。上の結果を用いて, $\rho=e^0=1$ (内べり), $\rho=e^{0.05}$, $\rho=e^{0.1}$, $\rho=e^{0.15}$, $\rho=e^{0.2}$, $\rho=e^{0.25}$ (外べり) のそれぞれの閉曲線に沿っての無次元応力成分 $(s\pi/P)\sigma_\theta$, $(s\pi/P)\sigma_\rho$, $(s\pi/P)\tau_{\theta\theta}$ の分布を求めれば第 3, 4, 5 表のとおりである。

7. 光 弾 性 実 験

厚さ 6 mm のエポキシ樹脂板を用いて第 3 図のようなモデルを製作し, 光弾性実験を行なった。光弾性実験

用モデルの形状は (2) 式に $s=31.72 \text{ mm}$ を代入して得られる x, y 座標に基いて決定された. s の値をかえると, モデルの形状は相似形のままその大きさだけが変化する. 荷重は直径 8 mm の鋼製丸棒を介して加えられ, $P=20 \text{ kg/6 mm}$ の荷重による等色写真が得られた (第 4 図). この等色写真から求められた自由縁応力の実験値と理論値を比較した結果が第 5 図に示され

第 1 表 D_{2n} の値

n	D_{2n}	D_{-2n}
0	1.544 578	
1	2.540 527	1.599 272
2	2.829 140	1.000 000
3	2.203 238	0.606 531
4	1.565 394	0.367 879
5	1.134 311	0.223 130
6	0.803 826	0.135 335
7	0.557 545	0.082 085
8	0.379 801	0.049 787
9	0.255 466	0.030 197
10	0.170 205	0.018 316
11	0.112 505	0.011 109
12	0.073 861	0.006 738
13	0.048 209	0.004 087
14	0.031 309	0.002 479
15	0.020 244	0.001 503
16	0.013 040	0.000 912
17	0.008 370	0.000 553
18	0.005 357	0.000 335
19	0.003 155	0.000 203
20	0.001 792	0.000 123

第 2 表 E_{2k} および M_{2k} の値

k	E_{2k}	M_{2k}
0	0.687 42	
1	24.744 04	-15.499 54
2	8.274 82	-3.291 65
3	2.059 99	-3.991 33 $\times 10^{-1}$
4	0.720 12	-0.198 06 $\times 10^{-1}$
5	0.495 39	-0.696 23 $\times 10^{-2}$
6	0.360 17	-0.620 72 $\times 10^{-2}$
7	0.241 97	-0.244 37 $\times 10^{-2}$
8	0.158 80	-0.586 83 $\times 10^{-3}$
9	0.104 93	-0.106 29 $\times 10^{-3}$
10	0.069 53	-0.023 30 $\times 10^{-3}$
11	0.045 88	-0.080 70 $\times 10^{-4}$
12	0.030 08	-0.027 44 $\times 10^{-4}$
13	0.019 62	-0.072 30 $\times 10^{-5}$
14	0.012 73	-0.015 30 $\times 10^{-5}$
15	0.008 23	-0.003 21 $\times 10^{-5}$
16	0.005 30	-0.008 57 $\times 10^{-6}$
17	0.003 41	-0.002 60 $\times 10^{-6}$
18	0.002 17	-0.007 00 $\times 10^{-7}$
19	0.001 28	-0.001 44 $\times 10^{-7}$
20	0.000 66	-0.000 39 $\times 10^{-7}$

第 3 表 $(s\pi/P)\sigma_\theta$ の値

θ°	$\rho=e^{0.1}$	$\rho=e^{0.05}$	$\rho=e^{0.1}$	$\rho=e^{0.15}$	$\rho=e^{0.2}$	$\rho=e^{0.25}$
0	-67.04	-37.58	-10.98	14.09	39.66	68.34
5	-63.55	—	-14.91	—	—	61.95
10	-54.31	-32.57	-11.42	9.42	30.09	49.56
20	-27.54	-15.03	-3.49	6.72	17.98	26.57
30	1.64	2.20	3.30	4.72	5.56	6.24
40	23.49	14.92	8.02	2.33	-3.29	-9.08
50	31.96	20.46	10.34	0.95	-8.02	-16.98
60	32.13	20.95	10.34	0.25	-9.56	-19.21
70	30.02	19.80	9.72	-0.05	-9.65	-19.00
80	28.27	18.74	9.20	-0.19	-9.40	-18.39
90	27.64	18.35	8.99	-0.21	-9.28	-18.12

第 4 表 $(s\pi/P)\tau_{\theta\theta}$ の値

θ°	$\rho=e^{0.05}$	$\rho=e^{0.1}$	$\rho=e^{0.15}$	$\rho=e^{0.2}$
0	0.00	0.00	0.00	0.00
5	—	-10.09	—	—
10	-5.94	-9.13	-8.95	-5.83
20	-6.38	-8.88	-8.33	-5.23
30	-5.63	-7.69	-7.11	-4.47
40	-3.71	-5.12	-4.75	-3.01
50	-1.89	-2.59	-2.36	-1.47
60	-0.69	-0.97	-0.90	-0.52
70	-0.23	-0.30	-0.28	-0.10
80	-0.06	-0.08	-0.06	-0.00
90	0.00	0.00	0.00	0.00

第 5 表 $(s\pi/P)\sigma_\rho$ の値

θ°	$\rho=e^{0.05}$	$\rho=e^{0.1}$	$\rho=e^{0.15}$	$\rho=e^{0.2}$
0	-47.65	-22.91	-12.43	-5.29
5	—	-8.57	—	—
10	-2.36	-3.57	-3.44	-2.46
20	-1.54	-2.20	-1.58	-1.38
30	-0.03	-0.19	-0.50	-0.22
40	1.20	1.61	1.14	0.63
50	1.27	1.76	1.44	0.85
60	0.84	1.22	1.11	0.69
70	0.48	0.78	0.75	0.51
80	0.29	0.52	0.54	0.38
90	0.23	0.45	0.47	0.34

第 4 図 近似平面鎖環の等色写真

第 5 図 近似平面鎖環における縁応力の分布

ている。これより外へりにおける縁応力の実験値と理論値とは良く一致していることがわかる。しかし、内へりにおける縁応力の実験値と理論値とは荷重点の付近を除いては良く一致しているが荷重点付近では最大6%程度の相違を生じている。これはモデルの製作精度、大きさ、読取りの巧拙、荷重方式などに起因するものと考えられる。

8. 曲りはり理論による解析と実験

内側境界が第3図における2点 x_1, y_1 を通り、外側境界が x_2 点を通る直線部と半円部とからなる平面鎖環(第6図)の各部寸法は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{s} &= 2t \\ \frac{b}{s} &= (\rho_1 - 1) - (\rho_1 - 1) \frac{t}{\rho_1} - (\rho_1^3 - 1) \frac{m}{\rho_1^3} \\ \frac{2r}{s} &= (\rho_1 + 1) - (3\rho_1 - 1) \frac{t}{\rho_1} + (\rho_1^3 + 1) \frac{m}{\rho_1^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

また繊維応力 σ_f は西原の結果⁽¹⁾を引用すると次式で与えられる。

半円部では

$$\frac{s\pi}{P} \sigma_f = \frac{s\pi}{2b} \left[\frac{24\kappa r l + 2b^2}{24\kappa r l + \pi b^2(1+\kappa)} \left\{ 1 + \frac{1}{\kappa} \frac{\eta}{r+\eta} \right\} - \frac{1}{\kappa} \frac{\eta}{r+\eta} \sin \varphi \right] \dots\dots\dots (54)$$

直線部では

$$\frac{s\pi}{P} \sigma_f = \frac{s\pi}{2b} \left[1 + 12r\eta \frac{2 - \pi(1+\kappa)}{24\kappa r l + \pi b^2(1+\kappa)} \right] \dots\dots\dots (55)$$

ここで κ は曲りはりの断面係数である。

(54), (55) 式を用いて得られる自由縁における応力の分布は第7図に示され、第6図の平面鎖環モデル ($s=31.72$ mm) に $P=20$ kg/6 mm の荷重を加えたときに得られる等色写真は第8図に示される。この写真から求めた自由縁応力を第7図中に○印で記入した。

9. 結 言

以上の計算ならびに実験から次のようなことが結論できる。

(1) 近似平面鎖環の縁応力に関する理論値と光弾性実験値とは良く一致する。

(2) 平面鎖環の自由縁における応力を曲りはり理論によって導いた結果と光弾性実験によって求めた結果とは荷重の作用点付近を除けば約10%の誤差範囲内で一致する。

第6図 平面鎖環(一様な長方形断面)

第7図 平面鎖環における縁応力の分布

$P=20$ kg/6 mm, $s=31.72$ mm

第8図 平面鎖環の等色写真

(3) 平面鎖環の縁応力に関する実験値と近似平面鎖環の縁応力に関する理論値とは x 軸付近において良く一致する。

(4) 第6図の平面鎖環について曲りはり理論によって求めた縁応力は安全側に評価される。

(5) 第3図の近似平面鎖環に生じるせん断応力 $\tau_{\theta\theta}$ は $\theta=5^\circ$ 付近で最大になる。一方、曲りはり理論によれば第6図の平面鎖環に生じるせん断応力は荷重の作用面上で最大になる。

(6) 第5表から、近似平面鎖環に生じる応力 σ_θ はほとんど零と見なしても良いことがわかる。

(7) 結局、第6図の平面鎖環の応力を曲りはり理論によって求める場合には最大20%の誤差が含まれ、曲率半径が小さくなるほど、肉厚が大きくなるほど、その誤差は大きくなるであろう。

終りに本研究に御協力下さった卒業研究学生 関戸
浩君に謝意を表わす。

文 献

- (1) 西原, 機械学会誌, **25**, 72 (大 11), 29.
(2) 岡本, 三木, 材料試験, **3**, 17 (昭 29-9), 449.

- (3) M. Greenspan, *Quart. Appl. Math.* **2** (1944) 60.
(4) N.I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* translated from the Russian by Radok P. Noordhoff Ltd. Groningen- Holland (1953).
(5) Kappus, *Z. AMM*, **35**, 6/7 (1955), 210.
(6) Wellinger, Karl, u. A. Stanger, *VDI-Z*, **101**, 131 (1959), 1425.

539. 4. 013. 3:624. 043. 7

穴の付近に 2 集中力をもつ無限板の応力 (続)*

宮 尾 嘉 寿**

Stresses in an Infinite Plate under Two Concentrated Forces in the Vicinity of the Holes (Continuation)

by Kazyu MIYAO

In this paper a solution has been given for the problem of generalized plane stress in an infinite plate under the two concentrated forces in the vicinity of the separated, the intersected or the contacted two circular holes. The bipolar or the crowded circular coordinates were used in the solution, and the basic stress functions were expanded in the Fourier series or integrals by means of parallel movements of the complex coordinates. A complete stress function in the plates with the holes was established in a form, in which a basic stress function was added to the auxiliary ones. The calculations have been carried out for the stress distributions and the rates of stress concentration.

1. 緒 言

円孔, だ円孔を初めとして, 各種の形の穴を有する無限板や帯板が単純引張りを受ける問題は機械設計の基礎である弾性学の重要問題で, 古くから多数の研究があり***, 現在もまたこれが続けられている. しかしながら実際の平板は必ずしも単純引張りを受けると見なし得ない場合があり, リベット, ボルトあるいは溶接などによって穴の付近に荷重を受ける場合がはなはだ多い. このような実際の諸問題を解くことは設計上また弾性学の使命の上にも有益であると思う.

前報⁽¹⁾においては 1 円孔, 1 だ円孔あるいは 2 円孔の中心線上に 2 集中力あるいは 2 集中偶力が作用する場合を取扱い, 穴周辺の応力分布を報告した. 本報においては同じ手法により 2 集中荷重作用線の両側対称の位置に同大 2 円孔が存在する場合の円孔周辺主応力分布および応力集中率を求めた. 前報において紙数の

都合で述べなかった応力集中率に関し, 前報のものも加えた.

また平板が同大交差 2 円孔の共通弦を含む直線上に対称な 2 集中力を受ける場合を取扱い, 平面弾性論における応力問題として解析した. この穴を有する無限板が一様引張りを受ける問題は C.B. Ling の研究⁽²⁾がある. 得られた結果を比較するために Ling の論文を参考にしたが, 補助応力関数その他の展開誘導には別の方法を用いた.

付録として接触する同大 2 円孔をもつ無限板が 2 円の共通接線上に対称な 2 集中力を受ける問題を同じ方法で取扱い, 簡単に述べた. この穴をもつ無限板が一様引張りを受ける問題は著者の報告⁽³⁾がある.

2. 基 礎 式⁽⁴⁾

複素変数 $z \equiv x + iy$ の任意の複素ポテンシャルを $\Omega(z)$ および $\omega(z)$ とし, これらの共役関数をそれぞれ $\bar{\Omega}(\bar{z})$ および $\bar{\omega}(\bar{z})$ とすれば, 体積力のない場合の Airy 応力関数 χ は次式の形に表わすことができる.

$$\chi = \bar{z}\Omega(z) + z\bar{\Omega}(\bar{z}) + \omega(z) + \bar{\omega}(\bar{z}) \cdots \cdots (1)$$

写像関数 $z = z(\zeta)$, $\zeta \equiv \alpha + i\beta$ を用いると応力成分は

* 昭和 35 年 4 月 2 日 第 37 期通常総会講演会および昭和 35 年 9 月 1 日 第 10 回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 35 年 9 月 16 日.

** 正員, 富山大学工学部(高岡市古定塚).

*** 前報文献参照.