ば他の 2 方法よりもはるかに実用性のある結果を与えるに表する。

(4) 級数の 6 項まで採れば, 筆者の方法は Blasius 法と同等の結果を与え, Görtler 法よりもはるかに正確である。筆者の級数から残余項の推定ができるが, それによると, 6 項で打切って境界層はがれ点を計算する場合, 筆者の方法か Blasius 法によれば誤差は 2 % 程度, Görtler 法によれば, 10 % 程度である。

したがって筆者の新しい級数解法は, 級数のはじめの数項を用いただけで, 実用上十分な解を与え, 多くの項を用いれば精度の高い解を与え, しかも計算は容易である。

本研究を行なうにあたり, 名古屋大学工学部 内田 茂男教授ならびに古屋善正教授からなみなみならぬ御激励と有益なる御指導を受けた。深厚なる謝意をこ

文 献

- (1) L. Howarth, *Rep. Mem. Aeron. Res. Comm.*, No. 1632 (1934).
- (2) L. Howarth, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Ser. A, **164**, (1938), 547.
- (3) C.C. Chao, *Master's thesis*, Ohio State Univ.
- (4) H. Görtler, *J. Math. Mech.*, **6** (1957), 1.
- (5) H. Görtler, *DVL Ber.*, Nr. 34 (1957), 91.
- (6) 堀, 機械学会論文集, **27**, 174 (昭 36-2), 167 ; **27**, 177 (昭 36-5), 564, 573.
- (7) W. Mangler, *Z. angew. Math. Mech.*, **23** (1943), 241.
- (8) A.N. Tifford & Others, *WADC Tech. Rep.*, No. 53-288 (1954), Pt. V.
- (9) R.N. Thurston, *WADC Tech. Rep.*, No. 53-288 (1954), Pt. V.
- (10) H. Schlichting, *Boundary Layer Theory* (1955), McGraw-Hill.
- (11) A. Ulrich, *Arch. d. Math.*, **2** (1949), 33.

533. 691. 01

ホイト・シュナイダ・プロペラに関する一考察*

(続報 1, 二次元無限翼数を仮定した場合のプロペラ円周上における誘起速度分布の近似計算)

安 藤 常 世**

A Study on Voith-Schneider-Propeller

(Approximate Calculation of the Induced Velocities on the Propeller Circle)

by Tsuneyo ANDŌ

With the object to know the influence of the free vortices in the slip stream on propelling performance, and the state of interference of propeller blades, the distributions of induced velocities on the propeller circle are approximately calculated here.

The value of bound vortex of a blade obtained in the preceeding report is used here, and the two-dimensional state is assumed. For simplicity, infinitely large number of blades is assumed. Free vortices are regarded as forming a continuous surface distribution in the slip stream, and bound vortices as forming a continuous distribution along the propeller circle. Moreover the free vortices are assumed to move away at the same velocity as the uniform flow.

With these simplifications, the desired velocity distributions are given in brief and unified expressions.

1. はし が き

前報⁽¹⁾において, 筆者は通常の翼枝揺動機構をもつ ホイト・シュナイダ・プロペラの作用につき, プロペ

ラ後流中に残留分布する自由うずによる誘起速度ならびに翼枝間の相互干渉の影響を除外し, さらに若干の仮定を設けてその作用に関する考察を行ない, 二, 三の数値計算例を示した。本報においては, これに対する修正を行なうために, 翼枝のまわりの循環, すなわち束縛うずの時間的(あるいは空間的)変化によって,

* 昭和 33 年 10 月 27 日 東京秋期講演大会において講演, 原稿受付 昭和 35 年 11 月 30 日。

** 正員, 慶応義塾大学工学部 (小金井市前原町 4)。

プロペラ円周上に発生し、後流中に残留分布する自由うずの影響と、翼枝相互間の干渉の状態とを、プロペラ円周上に誘起される速度分布の形で求めようとするものである。このような、単独翼に対する流れ場の変化という概念は、もちろん厳密を欠くものであって、正しくは翼枝断面もまた、うず分布として置換されねばならないが、単独翼の概念にしたがい準静的状態を起点として考察を進めるならば、後流中のうずおよび翼枝相互干渉の問題は、単独翼に対する流れ場の変化、換言すればプロペラ円周上の誘起速度と考えてよいであろう。このような取扱いは、ことに相互干渉を論ずる場合、有限な大きさのプロペラ円周に対して翼弦長が無限に小さいことを必要とする。したがって本報においては以下最大の仮定として翼枝数が無限に多いものとする。この条件はのちにみられるように考察の過程を非常に簡単化し、きわめて簡潔な形で結果を与えることを可能ならしめるものである。また、本報においても計算上の手法として、前進速度を与える変数 c_2 と、操縦点の位置角 φ とに関して微分した形で結果を求め、さまざまな作動状態を局限された形式で書きあらわす方法をとる。

2. 記 号

本報および次の続報2を通じてつぎのような記号を使用する。

- a : 翼枝断面形の揚力こう配
- α : 流体に対する翼枝の迎え角
- c : 翼枝の弦長
- c_1 : 操縦点位置をあらわす係数(操縦率)
- c_2 : 翼枝の回転周速度と一様流速との比(進行率)
- Δc_2 : c_2 と c_1 との差 $c_2 - c_1$
- δ : 翼枝束縛うずの大きさの低減の比率
- D : 1翼枝単位翼幅当りの抗力
- ΔD : 誘起速度による抗力 D の変分
- δ_0 : 翼枝の最小抗力係数
- ϵ : 翼枝の抗力特性に関する定数
- ϑ, ϕ : プロペラ円周上の位置角
- θ : プロペラ円周上における翼枝の位置角
- φ : 操縦点の位置角
- $\bar{f}$: 翼枝断面形のそり
- Γ : 翼枝束縛うずの大きさ
- γ' : 翼枝束縛うずの翼枝位置角に関する変化率 $(d\Gamma/d\theta)$
- γ : 自由うずの面分布密度
- γ_1 : プロペラ後流中の自由うずの面分布密度

- $\bar{\gamma}_1$: γ_1 の c_2, φ に関する導関数
- γ_2 : プロペラ円内と後流中との自由うず分布密度の差
- γ_3 : プロペラ円周に沿う束縛うずの線分布密度
- $k_1 = 2c_1/\sqrt{1+c_1^2}$
- $k_2 = 2c_2/\sqrt{1+c_2^2}$
- $\kappa = \sqrt{2k_1/(1+k_1)}$
- $\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}$
- $sn(\nu, \kappa) = \sin(\pi/4 - \vartheta/2)$
- k_3 : 翼枝の揚力特性に関する定数
- L : 1翼枝単位翼幅当りの揚力
- ΔL : 誘起速度による揚力 L の変分
- L_y : 1翼枝単位翼幅当りの横力(側スラスト)
- ΔL_y : 誘起速度による横力 L_y の変分
- n : 翼枝数
- O : 原点(プロペラ回転機構の中心)
- R : プロペラ円半径
- r : 翼枝運動径路の曲率半径
- ρ : 流体の密度
- T_x : 1翼枝単位翼幅当りのスラスト
- ΔT_x : 誘起速度によるスラスト T_x の変分
- $\bar{\tau}$: 平均接線力係数
- $\bar{\tau}_0$: 空転時における平均接線力係数
- $\bar{\tau}_1$: 修正された平均接線力係数
- Δu : 誘起速度の x 方向成分
- u_1 : うず分布 γ_1 による誘起速度の x 方向成分
- u_2 : うず分布 γ_2 による誘起速度の x 方向成分
- u_3 : うず分布 γ_3 による誘起速度の x 方向成分
- u' : 後流中の誘起速度
- Δv : 誘起速度の y 方向成分
- v_1 : うず分布 γ_1 による誘起速度の y 方向成分
- v_2 : うず分布 γ_2 による誘起速度の y 方向成分
- v_3 : うず分布 γ_3 による誘起速度の y 方向成分
- W : 翼枝の流体に対する速度
- ΔW : うずの存在にもとづく相対速度 W の変分
- ω : 翼枝の輪転角速度
- x : プロペラ進行方向の長さ
- ξ : x 方向無次元長さ (x/R)
- $\bar{\xi}$: 平均スラスト係数
- $\Delta \bar{\xi}$: 誘起速度による平均スラスト係数 $\bar{\xi}$ の変分
- $\bar{\xi}_1$: 修正された平均スラスト係数
- y : プロペラ進行方向に垂直な長さ
- $\bar{\eta}$: 平均横力係数
- $\Delta \bar{\eta}$: 誘起速度による平均横力係数 $\bar{\eta}$ の変分
- η_p : 推進効率

第1図 プロペラ翼の軌跡

3. 主要な二、三の仮定

いま速度 $c_2 \omega R$ (ω は翼枝の輪転速度) なる一様流れの中に定置運転されるホイト・シュナイダ・プロペラを考えれば、翼枝の揺動および相対速度の変化のためにプロペラ円周に沿って発生し、後流中に残留移動する自由うずは第1図のごとくトロコイド状に分布し、翼枝数が増大するに伴って網目にこまかくなり、極限である翼数無限の場合には近似的に面分布をなすものと考えることができる。Isay の研究^{(3)~(4)}においてすでに同様の仮定を採用しているが、筆者とは採用の論拠をことにしている。また自由うずの位置は一様流れに関して固定されたものでなく、当然その相対位置を変えるが、問題の煩雑化を避けるためにこの差異をも無視し、うずは単に一様流れと同じ速度をもって下流に移動するものと仮定する。

翼枝のまわりの循環、すなわち束縛うずの影響は、それぞれの翼枝を代表する不連続な線分布うず、あるいはこれを簡略化したうず点列を考慮するかわりに、

$$\Gamma = \frac{1}{2} W c \left(a \sin \alpha - k_3 \frac{c}{r} + \pi \frac{\bar{f}}{c} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

のように書かれ、ここに c は翼弦長、 a は揚力こう配、 r は翼枝運動径路の曲率半径、 $\bar{f}/c$ は翼枝断面形のそりである。第2項は無限翼枝数の場合省略され、また第3項は弦長半径比の小さいとき、これに伴って小となるべき値であるから、結局両者とも無視することができ、 α の表現に前報で得られた形を代入して

$$\Gamma = \frac{1}{2} R \omega c a \frac{c_1 \cos(\theta + \varphi) - c_2 \cos \theta - c_1 c_2 \sin \varphi}{\sqrt{1 + c_1^2} \sqrt{1 + k_1 \sin(\theta + \varphi)}} \quad \dots\dots\dots (1)'$$

と書くことができる。 Γ の θ に関する微分 γ' は

$$\gamma' \equiv \frac{d\Gamma}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \omega c a \frac{\Theta(\theta)}{\sqrt{1 + c_1^2} \left\{ 1 + k_1 \sin(\theta + \varphi) \right\}^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{ただし } \Theta(\theta) \equiv (k_1/2) (c_1 - c_2 \cos \varphi) \sin^2(\theta + \varphi) + (c_1 k_1/2) \sin \varphi \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi) \\ - (c_1 - c_2 \cos \varphi) \sin(\theta + \varphi) + c_2 (1 - c_1 k_1/2) \sin \varphi \cos(\theta + \varphi) + (k_1/2) (c_1 - c_2 \cos \varphi)$$

と得られる。一様流れの中には上記の γ' を負量としたものが翼の径路に沿って残されるが、実際には $d\theta/dt = -\omega < 0$ であるから(2)式の表現をそのままに用いる。前に述べたところによりこれを面分布 γ におきかえれば、第2図を考慮して

$$\gamma = \frac{n}{2\pi c_2 R} \frac{1}{|\sin p|} \gamma' \frac{d\theta}{ds} ds = \frac{n}{2\pi c_2 R^2} \frac{\gamma'}{\sqrt{1 + c_2^2} \sqrt{1 + k_2 \sin \theta} |\cos(\theta + \beta)|} = \frac{n \gamma'}{2\pi c_2 R^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし n は翼枝数である。 $\angle \beta$ は

$$\sin \beta = c_2 \cos \theta / \sqrt{1 + c_2^2} \sqrt{1 + k_2 \sin \theta} \\ \cos \beta = (1 + c_2 \sin \theta) / \sqrt{1 + c_2^2} \sqrt{1 + k_2 \sin \theta}$$

第2図 うずの面分布

プロペラ円周に沿う連続なうずの線分布を仮定する。

束縛うずの大きさは、後流中の自由うずの影響と翼枝の相互干渉とのために変るので、揺動に関する幾何学的条件をさきに与えるならば、正しくは積分方程式により問題を処理しなければならないが、ここでは近似として前報における値をそのままに使用する。

無限翼枝数無限小翼弦長の仮定は、上記のようにうずの面分布および円周に沿う線分布の仮定を可能とするほか、多くの便宜を与える。まず分布密度の計算が、有限な翼弦長の場合とことなり、きわめて容易に書きあらわされ、また束縛うずの大きさについては翼枝運動径路の曲率の影響がなくなるので、揚力係数はたんに相対的迎え角に関するのみとなる。このことは束縛うずの大きさに関するさきの仮定とともに本報における数学的取扱いを簡潔かつ統一あるものとしている。

4. 誘起速度の計算

4.1 プロペラ後流中のうず分布とこれに基づく誘起速度

前節で与えた仮定により、翼枝のまわりの循環は、前報で仮定した単位翼幅当りの揚力 L を流体密度 ρ および翼枝の相対速度 W で除し

で与えられる.

プロペラ円外の後流部分では翼枝の軌跡がたがいに切りあって重複することを考えれば, 真の面分布として $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ なる θ で与えられる y 方向位置 $R \sin \theta$ においては

$$\gamma_1 = \gamma(\theta) + \gamma(\pi - \theta) \dots \dots \dots (4)$$

のような面分布をもつ. このよううず分布によってプロペラ円周上に誘起される速度は, もちろん γ_1 にその位置に関する因数を乗じ, 面積分を行なうことによって得られるが, 前報と同様の方法を取り, c_2 および φ に関して微分した形で結果を求めることが好都合であり, かつ本報の場合においても微分と積分との順序の交換が許されるので, はじめに γ_1 を微分しておくこととする. すなわち基準となる $c_2 = c_1$, $\varphi = 0$ の状態において一次の微分係数を求めれば

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial c_2} = \frac{n\omega c a}{4\pi R} \frac{1}{c_1 \sqrt{1+c_1^2}} \frac{k_1 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + k_1}{(1+k_1 \sin \theta)^{3/2}} \sec \theta \dots \dots \dots (5)$$

となり $\partial \gamma_1 / \partial \varphi$ は 0 である. γ_1 はプロペラ円外の後流部分においてのみ成立する分布であるが, 計算の便宜上これを円内にまで延長して考えれば, 上記のうず分布 γ_1 によってプロペラ円周上の角位置 ϑ なる点に誘起される x, y 方向速度 u_1, v_1 は第3図を参照して

$$u_1 = -\frac{R}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\gamma_1(\phi) (\sin \vartheta - \sin \phi)}{(\sin \vartheta - \sin \phi)^2 + (\xi + \cos \vartheta - \cos \phi)^2} d\xi d(\sin \phi) \dots \dots \dots (6.a)$$

$$v_1 = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\gamma_1(\phi) (\xi + \cos \vartheta - \cos \phi)}{(\sin \vartheta - \sin \phi)^2 + (\xi + \cos \vartheta - \cos \phi)^2} d\xi d(\sin \phi) \dots \dots \dots (6.b)$$

と書きあらわされる. いま $\partial \gamma_1 / \partial c_2$ を $\bar{\gamma}_1$ により, $\partial u_1 / \partial c_2$ を $\bar{u}_1$ により, $\partial v_1 / \partial c_2$ を $\bar{v}_1$ により代表させるならば, $\bar{\gamma}_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1$ について上と同じ形の式が成立するが, これに部分積分法を適用し, なお

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bar{\gamma}_1(\phi) \cos \phi d\phi = 0$$

をあわせ考えれば, 積分は容易に遂行されて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial c_2} &= -\frac{n\omega c a}{4\pi^2} \frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1+k_1 \sin \vartheta}} \right) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{n\omega c a}{4\pi^2} \frac{1}{c_1} \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1+k_1 \sin \vartheta}} \right) \quad \left(\begin{aligned} -\pi \leq \vartheta \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \end{aligned} \right) \\ \frac{\partial v_1}{\partial c_2} &= \frac{n\omega c a}{4\pi^2} \frac{1}{c_1(1+c_1)} \left[\frac{2}{\kappa^2} \{ E(\kappa) - K(\kappa) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{sn \nu cn \nu}{dn \nu} \left\{ \log \frac{1+dn \nu}{1-dn \nu} \frac{dn \nu - \kappa'}{dn \nu + \kappa'} + \frac{\vartheta_1'(\nu/2K)}{\vartheta_1(\nu/2K)} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

が得られる. ただしここに

$$\kappa = \sqrt{2k_1/(1+k_1)}, \quad sn(\nu, \kappa) = \sin(\pi/4 - \vartheta/2), \quad \kappa' = \sqrt{1-\kappa^2} \dots \dots \dots (8)$$

である.

4.2 プロペラ円内の補正うず分布とこれに基く誘起速度 前節において仮定したうず分布 γ_1 は, 正しくはプロペラ円外の後流部分においてのみ成立する値をプロペラ円内まで延長して考えたものである. したがってこれに対し前節(4)式右辺第2項に対応するうず分布

$$\gamma_2 = \frac{n\omega c a}{4\pi c_2 \sqrt{1+c_1^2} R} \frac{\Theta(\pi - \theta)}{\{1+k_1 \sin(\theta - \varphi)\}^{3/2}} \sec \theta \dots \dots \dots (9)$$

$$(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$$

をプロペラ円内部分に重ね合わせ修正を行なう必要がある. 円内におかれたうず分布 γ_2 によってプロペラ円周上に誘起される速度はもちろん前節と同じく, これに位置に関する因数を乗じ積分を行なうことによって得られるが, 本研究で常用する手法にとり, c_2 および φ に関し微分した形で結果を求めるために, ここであらかじめ微分を行なっておく. 結果を一次のものについて

第3図 後流微小部分のうずによる誘起速度

示せば基準となる $c_2=c_1$, $\varphi=0$ の状態においては

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_2}{\partial c_2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial c_2} \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi} &= -\frac{n\omega c a}{8\pi R} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{k_1 \sin \theta + 2 - c_1 k_1}{(1+k_1 \sin \theta)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

となる。 γ_2 によってプロペラ円周上角位置 ϑ なる点に誘起される速度 u_2 , v_2 は第 4 図を考慮して

$$u_2 = -\frac{R}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\cos \phi}^{\cos \phi} \frac{\gamma_2(\phi) (\sin \vartheta - \sin \phi)}{(\sin \vartheta - \sin \phi)^2 + (\cos \vartheta - \xi)^2} d\xi d(\sin \phi) \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

$$v_2 = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\cos \phi}^{\cos \phi} \frac{\gamma_2(\phi) (\cos \vartheta - \xi)}{(\sin \vartheta - \sin \phi)^2 + (\cos \vartheta - \xi)^2} d\xi d(\sin \phi) \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

と書かれる。前と同じくこれに部分積分法を適用し運算を行なえば、 u_2 の系統のものについてはそのまま ϑ の関数として、また v_2 の系統のものについては前節と同様な円関数への置換を行なって、プロペラ円内の補償的うず分布 γ_2 に対する誘起速度 u_2 , v_2 の c_2 , φ に関する微分係数が得られる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial c_2} &= \frac{n\omega c a}{4\pi^2} \frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1+k_1 \sin \vartheta}} \right) \left(-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{n\omega c a}{4\pi^2} \frac{1}{c_1} \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1+k_1 \sin \vartheta}} \right) \left(-\pi \leq \vartheta \leq -\frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} &= \frac{n\omega c a}{16\pi^2} \left(1 + \frac{1}{c_1} \right) \left\{ \left(\pi - 2E(\kappa) \right) - \frac{1-c_1}{1+c_1} \left(\pi - 2K(\kappa) \right) \right\} \\ &\quad + \frac{n\omega c a}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{1}{k_1} \left\{ 2\sqrt{1+k_1 \sin \vartheta} - 2\frac{1-c_1 k_1}{\sqrt{1+k_1 \sin \vartheta}} \right. \\ &\quad \left. - (\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1-k_1}) \left(1 - \frac{1-c_1 k_1}{\sqrt{1-k_1^2}} \right) \right\} \\ \frac{\partial v_2}{\partial c_2} &= -\frac{n\omega c a}{4\pi^2} \frac{1}{c_1(1+c_1^2)} \frac{\operatorname{sn} \nu \operatorname{cn} \nu}{d\nu} \log \frac{1+d\nu}{1-d\nu} \frac{d\nu - \kappa'}{d\nu + \kappa'} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} &= \frac{n\omega c a}{4\pi^2} \frac{\operatorname{cn} \nu}{\operatorname{sn} \nu} K(\kappa) + \frac{n\omega c a}{8\pi^2} \frac{1}{1+c_1} \frac{1}{d\nu} \left\{ 2\operatorname{sn}^2 \nu - (1+c_1) \right\} \frac{\partial_1'(\nu/2K)}{\partial_1(\nu/2K)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

4.3 プロペラ円周上のうず分布と、これに基づく誘起速度 ここで取扱うものは、実質的にはプロペラ翼枝の相互干渉であるが、前述したように無限に多い翼枝数とあまり大きくない充実比を仮定することにより、線分布うずに置換して考えることが可能であり、その影響を代表する誘起速度は、線分布うずの微小要素に、位置に関する因数を乗じての積分により得られることとなる。

前述したとおり本報においては翼枝のまわりの循環すなわち束縛うずは、

$$\Gamma = \frac{1}{2} R \omega c a \frac{c_1 \cos(\theta + \varphi) - c_2 \cos \theta - c_1 c_2 \sin \varphi}{\sqrt{1+c_1^2} \sqrt{1+k_1 \sin(\theta + \varphi)}} \dots\dots\dots (13)$$

をもって与えられるものとする。これにより束縛うずの点列を線分布うずに置換した値 γ_3 は

$$\gamma_3 = \frac{n\Gamma}{2\pi} d\theta / R d\theta = \frac{n\Gamma}{2\pi R}$$

となる。ここに n は前とおなじく翼枝数である。これよりただちに

$$\gamma_3 = \frac{n\omega c a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{c_1 \cos(\theta + \varphi) - c_2 \cos \theta - c_1 c_2 \sin \varphi}{\sqrt{1+k_1 \sin(\theta + \varphi)}} \dots\dots\dots (14)$$

となる。前 2 節の方法とおなじく、ここで γ_3 の c_2 , φ に関する微分を求めれば、 $c_2=c_1$, $\varphi=0$ の状態に対し一次の係数として下のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_3}{\partial c_2} &= -\frac{n\omega c a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+k_1 \sin \theta}} \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varphi} &= -\frac{n\omega c a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \frac{\sin \theta + c_1}{\sqrt{1+k_1 \sin \theta}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

第 4 図 プロペラ円内のうずによる誘起速度

この γ_3 によりプロペラ円周上 ϑ なる位置にある翼に対する他翼の誘導速度 u_3, v_3 は無限翼枝数の仮定の
もとでは第5図を考慮して

$$\begin{aligned}
 u_3 &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (nc = \text{const.})}} \left[-\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\vartheta - \frac{\pi}{n}} \frac{(\sin \vartheta - \sin \phi) \gamma_3(\phi)}{(\sin \vartheta - \sin \phi)^2 + (\cos \vartheta - \cos \phi)^2} d\phi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\vartheta + \frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{(\sin \vartheta - \sin \phi) \gamma_3(\phi)}{(\sin \vartheta - \sin \phi)^2 + (\cos \vartheta - \cos \phi)^2} d\phi \right\} \right] \\
 &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (nc = \text{const.})}} \left[-\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\vartheta - \frac{\pi}{n}} \frac{1 + \cos \vartheta \cos \phi - \sin \vartheta \sin \phi}{\sin \vartheta - \sin \phi} \gamma_3(\phi) d\phi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\vartheta + \frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{1 + \cos \vartheta \cos \phi - \sin \vartheta \sin \phi}{\sin \vartheta - \sin \phi} \gamma_3(\phi) d\phi \right\} \right] \\
 v_3 &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (nc = \text{const.})}} \left[\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\vartheta - \frac{\pi}{n}} \frac{(\cos \vartheta - \cos \phi) \gamma_3(\phi)}{(\sin \vartheta - \sin \phi)^2 + (\cos \vartheta - \cos \phi)^2} d\phi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\vartheta + \frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{(\cos \vartheta - \cos \phi) \gamma_3(\phi)}{(\sin \vartheta - \sin \phi)^2 + (\cos \vartheta - \cos \phi)^2} d\phi \right\} \right] \\
 &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (nc = \text{const.})}} \left[-\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\vartheta - \frac{\pi}{n}} \frac{\cos \vartheta \sin \phi + \sin \vartheta \cos \phi}{\sin \vartheta - \sin \phi} \gamma_3(\phi) d\phi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\vartheta + \frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\cos \vartheta \sin \phi + \sin \vartheta \cos \phi}{\sin \vartheta - \sin \phi} \gamma_3(\phi) d\phi \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

のように得られる。これらにより前と同様にして微分、積分の順序を交換して演算を行ない、誘起速度 u_3, v_3 の c_2, φ に関する微分が求められる。すなわち

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_3}{\partial c_2} &= \frac{n\omega c a}{16\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left\{ \frac{\cos \vartheta}{k_1} I - \frac{1-k_1 \sin \vartheta}{k_1} \cos \vartheta \cdot I_0 + \cos^3 \vartheta \cdot I_1 \right\} \\
 \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} &= \frac{n\omega c a}{16\pi^2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left\{ \frac{\sin \vartheta}{k_1} I - \left(\frac{1-c_1 k_1}{k_1} \sin \vartheta - \cos^2 \vartheta \right) I_0 + (\sin \vartheta + c_1) \cos^2 \vartheta \cdot I_1 \right\} \\
 \frac{\partial v_3}{\partial c_2} &= \frac{n\omega c a}{16\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left\{ \frac{\sin \vartheta}{k_1} I - \frac{1-k_1 \sin \vartheta}{k_1} \sin \vartheta \cdot I_0 + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \cdot I_1 \right\} \\
 \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} &= \frac{n\omega c a}{16\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left\{ -\frac{\cos \vartheta}{k_1} \cdot I + \left(\frac{1-c_1 k_1}{k_1} - \sin \vartheta \right) \cos \vartheta \cdot I_0 \right. \\
 &\quad \left. + (\sin \vartheta + c_1) \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot I_1 \right\}
 \end{aligned} \tag{17}$$

ただし、ここに

$$I \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+k_1 \sin \phi} d\phi, \quad I_0 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1+k_1 \sin \phi}}, \quad I_1 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin \vartheta - \sin \phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1+k_1 \sin \phi}} \tag{18}$$

5. 数値計算結果

上記の理論による数値計算結果は、すべて $n\omega c a$ なる元をもち、プロペラ円周上の角位置 ϑ を変数とし、また操縦点の位置に関する量 c_1 をパラメータとして書きあらわされ、他の因子を含まない。このような単一化された形式で結果が得られることは

1) 無限翼枝数の仮定を設け、後流中の随伴自由うずおよび翼枝束縛うずをそれぞれ面分布うずおよび線分布うずに置換したこと。

2) 同じく上記の仮定により翼枝断面形の特性として、揚力こう配のみがとりあげられ、他の特性が省略されたこと。

3) 現在常用されるホイット・シュナイダ・プロペラの構造を前提とし、その機構的条件が c_1 のみにより完全に与えられ、かつ束縛うずの値は準静的状態の場合と変わらないと仮定したこと。

4) 結果を前進速度に関連する量 c_2 と操縦点位置角 φ に関して微分した

第5図 翼枝束縛うずによる誘起速度

形で求めたため、この種の問題の重要因子である両者があらわに書かれていないこと。
などに基くもので結果の表示が簡潔化され、現象のは

あくを容易ならしめている。計算結果の代表的な例として、プロペラの推進性能に直接関連する $\partial u_1/\partial c_2$ 、

$\partial u_2/\partial c_2$ および $\partial u_3/\partial c_2$ をそれぞれ第 6、7 図および第 8 図に示す。これらにおいて、横軸はプロペラ円周上の角位置 ϑ であり、縦軸は結果である微分係数を $nwca$ を単位としてあらわしたものである。

ここで随伴自由うずによる誘起速度を代表する量として $\partial u_1/\partial c_2 + \partial u_2/\partial c_2$ を考えてみると、これは第 6 図および第 7 図に示す値の合成として、第 9 図のようになり、 $\vartheta = \pm\pi/2$ で 0、その両側で円周に沿って直線的に増加し、推進軸に直角な y 方向に関する速度こう配 $\partial(u_1+u_2)/\partial y$ がここで無限大となることを示している。換言すればプロペラ円をよぎる流れはほとんどすべり流れの状態であり、いわゆるスラスト面において比較的均一な加速が行なわれることを暗示するもののようである。

また翼枝干渉の影響に対応する誘起速度 u_3 の微分 $\partial u_3/\partial c_2$ は $\vartheta = \pm\pi/2$ に関して逆対称の形となっており、本報における考え方の立場よりすれば、推進作用を論ずるに当たって線形的には取りあげる必要のないものであることが知られる。

6. 結 語

以上通常の翼枝揺動機構をもつホイト・シュナイダ・プロペラについて、その作用を二次元的なものとして取扱い、かつ無限翼枝数を仮定して、後流中の自由うずおよび翼枝相互干渉の推進作用に及ぼす影響を知る目的のもとに、若干の仮定を加え問題の単純化を行なって、プロペラ円周上に生ずる誘起速度の計算をこころみた。計算の手法は前報におけると同様に前進速度に関する量 c_2 および操縦点の位置角 φ に関して微分した形で結果を求めるようにしたので、近似的ではあるが簡単に現象をはあくしやうい形式で結果を表示することができた。誘起速度が推進性能に与える影響(あるいは誘起速度を考慮した場合の推進性能)については次報に述べる。

本研究に当り栖原豊太郎博士より有益な御示唆を賜わったことに対し厚くお礼申し上げます。

第 6 図 後流中のうずによる誘起速度 u_1 の c_2 に関する微分 $\partial u_1/\partial c_2$

第 7 図 プロペラ円内のうずによる誘起速度 u_2 の c_2 に関する微分 $\partial u_2/\partial c_2$

第 8 図 束縛うずによる誘起速度 u_3 の c_2 に関する微分 $\partial u_3/\partial c_2$

第 9 図 $\partial u_1/\partial c_2 + \partial u_2/\partial c_2$

文 献

(1) 安藤, 機械学会論文集, 24, 141 (昭 33-5), 307.

(2) W.-H. Isay, *Ing.-Arch.*, 23 (1955), 379.

(3) W.-H. Isay, *Ing.-Arch.*, 24 (1956), 148.

(4) W.-H. Isay, *Ing.-Arch.*, 25 (1957), 303.

533. 691. 01

ホイット・シュナイダ・プロペラに関する一考察*

(続報 2, 後流の非一様加速を考慮した場合の推進性能)

安 藤 常 世**

A Study on Voith-Schneider-Propeller

(Performance as the Non-uniform Acceleration of
the Slip Stream is Taken into Account)

by Tsuneyo ANDO

The propelling performance of the Voith-Schneider-Propeller is dealt with here theoretically by an approximation method, making use of results of the preceeding two reports.

When the solidity is small, the value of thrust is obtained by superposing the variation of lift and drag of blades caused by the induced velocities on the result by the treatment as quasi-steady-state. For the case the solidity is not so small, uniform decrease of the bound vortices of blades with a definite ratio is assumed, which enables to make use of the preceeding reports effectively and to give an account of propelling performance in a simplified form though approximately.

Assuming the same character of propeller blades, some efficiency diagrams are given here also.

1. はし が き

前報⁽¹⁾において筆者は二次元的に作動する無限翼枝数でかつ充実比の小さいホイット・シュナイダ・プロペラを考え, さらに若干の簡単な仮定を設けて簡略化を行ない, 後流中に残留分布する自由うずおよび各翼枝の束縛うずによって, プロペラ円周上に生ぜしめられる誘起速度の分布の近似的計算をこころみた. 本報においてはこの結果を利用し前々報⁽²⁾の結果を修正して, ホイット・シュナイダ・プロペラの推進性能を概略的に求めようとするものである.

前報で知られたごとく, プロペラ翼枝の流体力学的作用の非定常性, 具体的にいえば束縛うずの時間的(あるいは空間的)変化によって生じ, 後流中に分布する自由うずの影響を代表する誘起速度, ならびに翼枝の相互干渉の効果を単純な形で表現した, 束縛うずによる誘起速度は, 前報の仮定に従えばいずれも *nowca* を元としてあらわされ, これにより両者は充実比と線

形的な関係にある. したがって前報におけると同様の仮定を設け, i) プロペラが無限翼枝数をもち, ii) 随伴自由うずは一様流とおなじ速度で流れ去るとするならば, 充実比が微小であるときには, 誘起速度の存在によって生ずる束縛うずの大きさの変化もまた微小なものであり, これによる随伴自由うずの変化が小さく, 誘起速度そのものはほとんど影響を受けないものと考えて, これが単独翼(それぞれの翼枝)に及ぼす効果を量的に算出し, 前々報の結果に重ね合わせることによって, 推進性能を知ることができよう. また充実比がきわめて小さいとき以外は, たんなる重ね合わせの考え方では推進作用についての計算を行なうことができず, なんらかの形で流れ場の中に存在する自由うずと翼枝の束縛うずとの相互作用を考慮に入れなければならないが, このために筆者は翼枝束縛うずの一樣な低減を考えて問題を処理することとした.

以上のような方針に基き, 種々の充実比に対する平均スラスト係数, 所要動力ならびに推進効率の計算をこころみた. 若干の数値例をのちに示す.

* 昭和 34 年 10 月 29 日 長崎臨時大会講演会において講演, 原稿受付 昭和 35 年 11 月 30 日.

** 正員, 慶応義塾大学工学部(小金井市前原町 4).