534. 113. 014. 1:624. 072. 222

L 形 棒 の 自 由 振 動 (固 定-固 定)*

高 橋 伸**

The Free Vibrations of L-Bar (Both Ends Built-in)

by Shin TAKAHASHI

The free vibrations of the bar bent to L-type (both ends built-in) are discussed. The method used is to minimize Lagrangian which is expressed in terms of the unknown functions and the known and unknown boundary conditions which describe the vibrations. In the case that there are lateral, twisting and longitudinal vibrations at the same time, the unknown vibratory functions are obtained in general forms, and Lagrangian is expressed in the terms of the boundary conditions. Using the known boundary conditions and the conditions of continuity, Lagrangian is expressed in the terms of unknown constants. Then, Lagrangian is again minimized about unknown constants and these constants and the frequency equations are obtained. In the case of L-bar, the frequency equations of both vibrations in the plane of L-bar and perpendicular to that plane are obtained and the numerical calculations are carried out, and the comparison with the contents of papers already published are made.

1. 緒 言

L 形に折れ曲った棒 (両端固定) の自由横振動は、その平面内の振動を脚の長さが等しい場合について奥村⁽¹⁾、その平面に垂直な振動を実験的に小堀、理論的に太田・浜田、および佐藤⁽²⁾により研究されている。奥村および佐藤のは微分方程式を解き境界条件より振動数方程式を求める方法、太田らの方法は変位、ねじり角を級数であらわし、リッツの方法で振動数方程式を求める方法である。筆者はラグランジュアンを極小にする方法により、L 形棒の平面内および平面に垂直な振動数方程式を求め、種々の場合について、その結果を図で示した。

なお佐藤は筆者と同じ日にその研究を発表され、結果は筆者のと全く一致した。奥村の解は筆者のその特別な場合であるが、細部で筆者のと違っているところがある。

2. 記 号

添字 n は n 番めの棒をあらわす。

L : ラグランジュアン

x : 棒の一端を原点とし、その軸方向の座標

EI, C', ES : 曲げ、ねじり、縦の剛性

u, θ, w : 曲げ、ねじり、縦方向の変位

α, β, ζ : $\alpha^4 = S\gamma p^2 l^4 / EIg$, $\beta^2 = ip^2 l^2 / C'$,

$$\zeta^2 = \frac{S\gamma p^2}{ESg} l^2$$

$S\gamma$: 単位長さ当りの重量

i : 単位長さ当りの x 軸に関する慣性モーメント

l : 棒の長さ

A, B, C, D, F, G, J, K : 境界条件をあらわす定数

$$\lambda, \mu: \lambda = \frac{EI_2}{EI_1} \left(\frac{\alpha_2/l_2}{\alpha_1/l_1} \right)^3, \quad \mu = \frac{l_2/\alpha_2}{l_1/\alpha_1}$$

$$\xi, \kappa: \xi = \frac{C'}{EI} \frac{\beta \cos \beta}{\alpha \sin \beta}, \quad \kappa = s^2 \frac{\zeta \cos \zeta}{\alpha^3 \sin \zeta}$$

ψ : 2 本の足のなす角, s : 細長比

3. ラグランジュアン

任意個の一樣断面棒を任意の角度でつなぎあわせた系の振動の 1 周期ラグランジュアン L を考える。変位は曲げ (せん断や回転慣性によるものを省略)、ねじり、および伸縮の 3 種のものと考えたと

$$L = L_B + L_T + L_C$$

$$L_B = \sum_n \frac{EI_n}{2} \int_0^{l_n} \left[\left(\frac{\alpha_n}{l_n} \right)^4 u_n^2 - \left(\frac{d^2 u_n}{dx_n^2} \right)^2 \right] dx_n$$

$$L_T = \sum_n \frac{C_n'}{2} \int_0^{l_n} \left[\left(\frac{\beta_n}{l_n} \right)^2 \theta_n^2 - \left(\frac{d\theta_n}{dx_n} \right)^2 \right] dx_n$$

$$L_C = \sum_n \frac{ES_n}{2} \int_0^{l_n} \left[\left(\frac{\zeta_n}{l_n} \right)^2 w_n^2 - \left(\frac{dw_n}{dx_n} \right)^2 \right] dx_n$$

L_B, L_T, L_C は曲げ、ねじり、伸縮のラグランジュアン

* 昭和 36 年 4 月 4 日 第 38 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 36 年 6 月 2 日。

** 正員、山形大学工学部 (米沢市元中馬口町)。

で、添字 n は n 番めの棒をあらわし、 $\sum_n$ は全部の棒について加算することを意味する。棒の断面の重心をとる軸を x 軸とし、ねじりの中心はこれに一致するものとする。なお、このときは、曲げも伸縮も縦ひずみを生ずるが、それらのひずみエネルギーの和は曲げだけの、伸縮だけのひずみエネルギーを求め加算してよい。

棒の両端における値をそれぞれ次のようにおくと (ただし $u' = du/dx$)

$$u|_{x=0} = 2A, \quad u'|_{x=0} = 2B \frac{\alpha}{l}, \quad u|_{x=l} = 2C, \quad u'|_{x=l} = 2D \frac{\alpha}{l},$$

$$\theta|_{x=0} = 2F, \quad \theta|_{x=l} = 2G, \quad w|_{x=0} = 2J, \quad w|_{x=l} = 2K$$

振動はラグランジュアンを極小にするように生ずるので、変分と上記境界条件とより

$$u = H_1(\sin \alpha x/l + \sinh \alpha x/l) + H_2(\sin \alpha x/l - \sinh \alpha x/l) \\ + H_3(\cos \alpha x/l + \cosh \alpha x/l) + H_4(\cos \alpha x/l - \cosh \alpha x/l),$$

ただし $H_1 = B, \quad H_3 = A$

$$H_2 = -A \frac{\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha}{1 - \cos \alpha \cosh \alpha} - B \frac{\sin \alpha \sinh \alpha}{1 - \cos \alpha \cosh \alpha}$$

$$+ C \frac{\sin \alpha + \sinh \alpha}{1 - \cos \alpha \cosh \alpha} + D \frac{\cos \alpha - \cosh \alpha}{1 - \cos \alpha \cosh \alpha},$$

$$H_4 = A \frac{\sin \alpha \sinh \alpha}{1 - \cos \alpha \cosh \alpha} + B \frac{\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha}{1 - \cos \alpha \cosh \alpha}$$

$$+ C \frac{\cos \alpha - \cosh \alpha}{1 - \cos \alpha \cosh \alpha} - D \frac{\sin \alpha - \sinh \alpha}{1 - \cos \alpha \cosh \alpha},$$

$$\theta = 2F \cos \frac{\beta x}{l} + \frac{2(G - F \cos \beta)}{\sin \beta} \sin \frac{\beta x}{l}, \quad w = 2J \cos \frac{\zeta x}{l} + \frac{2(K - J \cos \zeta)}{\sin \zeta} \sin \frac{\zeta x}{l}$$

となり、これらをラグランジュアンに代入すると、

$$L_B = - \sum_n 2EI_n \left(\frac{\alpha_n}{l_n} \right)^3 \frac{1}{1 - \cos \alpha_n \cosh \alpha_n} \\ \times [(A_n^2 + C_n^2)(\sin \alpha_n \cosh \alpha_n + \cos \alpha_n \sinh \alpha_n) + (B_n^2 + D_n^2)(\sin \alpha_n \cosh \alpha_n - \cos \alpha_n \sinh \alpha_n) \\ + 2(A_n B_n - C_n D_n) \sin \alpha_n \sinh \alpha_n + 2(B_n C_n - A_n D_n)(\cos \alpha_n - \cosh \alpha_n) \\ - 2A_n C_n(\sin \alpha_n + \sinh \alpha_n) - 2B_n D_n(\sin \alpha_n - \sinh \alpha_n)]$$

$$L_T = - \sum_n 2C_n' \frac{\beta_n}{l_n \sin \beta_n} [(F_n^2 + G_n^2) \cos \beta_n - 2F_n G_n]$$

$$L_C = - \sum_n 2ES_n \frac{\zeta_n}{l_n \sin \zeta_n} [(J_n^2 + K_n^2) \cos \zeta_n - 2J_n K_n]$$

となる。棒が端で相互に接続しているので、 $A, B, \dots, K$ のあるものは連続条件により決定され、残りの $A, B, \dots, K$ はラグランジュアンを極小にするように決められるべきである。これより振動数方程式が求まる。最初の棒と最後の棒とが互に接続していないときは、例として最初の棒の $x_1 = 0$ の点を考えると、固定なら $A_1 = B_1 = 0$ 単純支持なら $A_1 = 0, B_1$ は未定として $\partial L / \partial B_1 = 0$ 、自由端なら A_1, B_1 ともに未定として、 $\partial L / \partial A_1 = \partial L / \partial B_1 = 0$ とする。たとえば両端自由棒 ($n \equiv 1$) のときは $\partial L / \partial A_1 = \partial L / \partial B_1 = \partial L / \partial C_1 = \partial L / \partial D_1 = 0$ より既知の振動数方程式が求まる。両端単純支持片持などの場合も同様にして既知の結果が求まる。なお、筆者の前論文⁽⁸⁾の振動数方程式も、ABC 平面に垂直な振動の場合は、縦振動と BC 部分のねじり振動を省略して、平面内の振動の場合は、ねじり振動と BC 部分の縦振動を省略して、上記のごとくすると求まる。

4. L 形棒の平面に垂直な振動

L 形棒の両端が固定されているときの、その平面に垂直な振動を考える。棒の縦振動は省略して、横とねじりの振動のみ考える。2本の脚の角度を ψ 、固定端より x_1, x_2 をはかるとすると、

$$J_n = K_n = 0, \quad A_n = B_n = F_n = 0 \quad (n=1, 2)$$

点 B で AB と CB が連続なので

$$C_2 = C_1, \quad D_2 \frac{\alpha_2}{l_2} = D_1 \frac{\alpha_1}{l_1} \cos \psi - G_1 \sin \psi, \quad G_2 = D_1 \frac{\alpha_1}{l_1} \sin \psi + G_1 \cos \psi$$

の関係が成立する。

ゆえにラグランジュアン L は

$$\begin{aligned} -L = & \frac{EI_1}{2} \left(\frac{\alpha_1}{l_1} \right)^3 \frac{4}{1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1} [C_1^2 (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1) \\ & + D_1^2 (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1) - 2C_1 D_1 \sin \alpha_1 \sinh \alpha_1] \\ & + \frac{EI_2}{2} \left(\frac{\alpha_2}{l_2} \right)^3 \frac{4}{1 - \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2} [C_1^2 (\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2) \\ & + \left(D_1 \frac{\alpha_1}{l_1} \cos \psi - G_1 \sin \psi \right) \left(\frac{l_2}{\alpha_2} \right)^2 (\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2) \\ & - 2C_1 \left(D_1 \frac{\alpha_1}{l_1} \cos \psi - G_1 \sin \psi \right) \frac{l_2}{\alpha_2} \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2] \\ & + 2C_1 \frac{\beta_1 \cos \beta_1}{l_1 \sin \beta_1} G_1^2 + 2C_2 \frac{\beta_2 \cos \beta_2}{l_2 \sin \beta_2} \left(D_1 \frac{\alpha_1}{l_1} \sin \psi + G_1 \cos \psi \right)^2 \end{aligned}$$

ゆえに $\partial L / \partial C_1 = \partial L / \partial D_1 = \partial L / \partial G_1 = 0$ より

$$\lambda = \frac{EI_2}{EI_1} \left(\frac{\alpha_2 / l_2}{\alpha_1 / l_1} \right)^3, \quad \mu = \frac{l_2 / \alpha_2}{l_1 / \alpha_1}, \quad \xi = \frac{C'}{EI} \frac{\beta \cos \beta}{\alpha \sin \beta}$$

とおけば、次の振動数方程式が求まる。

$$\begin{aligned} & (\xi_1 + \lambda \mu^2 \xi_2 \cos^2 \psi) [(1 + \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2) \\ & + \lambda (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2)] \\ & + \lambda \mu^2 (\xi_1 \cos^2 \psi + \lambda \mu^2 \xi_2) [\lambda (1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(1 + \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2) \\ & + (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2)] \\ & - 2\lambda \mu \cos \psi (\xi_1 + \lambda \mu^2 \xi_2) \sin \alpha_1 \sinh \alpha_1 \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2 \\ & + \lambda \mu^2 \xi_1 \xi_2 \sin^2 \psi [\lambda (1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2) \\ & + (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2)] \\ & + \lambda \mu^2 \sin^2 \psi [(1 + \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2) \\ & + \lambda (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1)(1 + \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2)] = 0 \end{aligned}$$

ただし $(1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2) \neq 0$ としている。

上記振動数方程式で、 $\lambda = \mu = 1$ (AB, CB の両部分の断面積、断面二次モーメント、材質が同じな場合) とすると、佐藤の式⁽²⁾と一致する。

数値例として、 $\lambda = \mu = 1$ 、外径 d の円断面 (中実中空とも同じ結果を得る) で l_1/d と l_2/d とが十分大きいとき (すなわち $\beta \rightarrow 0$) の場合の振動数方程式の第 1 根は第 1 表のとおりである。佐藤は $l/d \approx 20$ の場合を図で与えているが、第 1 表とほとんど同じである。佐藤のおかげで、 l/d が 20 から無限大までは $\beta = 0$ として十分正しい結果を得ることがわかった。なお、筆者が発表した後で、佐藤が昭和 34 年卒業の学生の卒業研究指導で、上記の成果を得ていたことがわかった。

第 2 図に第 1 根と小堀の実験との比較を示す。第 3 図は二次振動数の計算結果である。

第 1 図

第 1 表 $\alpha_1 + \alpha_2$ の値 (第 1 根)

ϕ	$l_1/(l_1+l_2)$	0	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0		4.730	5.030	5.317	5.727	5.786	5.193	4.570	4.118	3.843	3.750
30°		4.730	4.987	5.244	5.680	5.486	5.004	4.473	4.091	3.869	3.781
60°		4.730	4.896	5.060	5.165	5.074	4.737	4.375	4.100	3.933	3.877
90°		4.730	4.810	4.903	4.939	4.847	4.635	4.399	4.209	4.091	4.046
120°		4.730	4.756	4.801	4.809	4.758	4.648	4.518	4.422	4.339	4.306
150°		4.730	4.733	4.747	4.748	4.732	4.702	4.662	4.626	4.600	4.591
180°		4.730	4.730	4.730	4.730	4.730	4.730	4.730	4.730	4.730	4.730

5. L 形棒の平面内の振動

両端固定のL形棒のその平面内の振動を考える。ねじり振動は省略し、曲げと伸縮の両振動を考える。 x_1, x_2 は前と同じく固定端を原点とした座標とする。このとき

$$F_n = G_n = 0, \quad A_n = B_n = J_n = 0 \quad (n=1, 2)$$

また点 B で、AB と CB の2本の棒が連続なので

$$D_2 \frac{\alpha_2}{l_2} = -D_1 \frac{\alpha_1}{l_1}, \quad C_2 = -C_1 \cos \psi + K_1 \sin \psi, \quad K_2 = C_1 \sin \psi + K_1 \cos \psi$$

の関係が成立する。したがって、ラグランジュアン L は

$$\begin{aligned} -L = & 2EI_1 \left(\frac{\alpha_1}{l_1} \right)^3 \frac{1}{1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1} [C_1^2 (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1) \\ & + D_1^2 (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1) - 2C_1 D_1 \sin \alpha_1 \sinh \alpha_1] \\ & + 2EI_2 \left(\frac{\alpha_2}{l_2} \right)^3 \frac{1}{1 - \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2} [(-C_1 \cos \psi + K_1 \sin \psi)^2 (\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2) \\ & + D_1^2 \mu^2 (\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2) + 2D_1 \mu (-C_1 \cos \psi + K_1 \sin \psi) \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2] \\ & + 2EA_1 \frac{\zeta_1 \cos \zeta_1}{l_1 \sin \zeta_1} K_1^2 + 2EA_2 \frac{\zeta_2 \cos \zeta_2}{l_2 \sin \zeta_2} (C_1 \sin \psi + K_1 \cos \psi)^2 \end{aligned}$$

s を細長比 ($s^2 = l^2 S/I$), $\kappa_1 = s_1^2 \zeta_1 \cos \zeta_1 / \alpha_1^3 \sin \zeta_1$

$$\kappa_2 = s_2^2 \zeta_2 \cos \zeta_2 / \alpha_2^3 \sin \zeta_2$$

とすると $\partial L / \partial (C_1, D_1, K_1) = 0$ より次の振動数方程式が求まる。

第 2 図

第 3 図

第 4 図

$$\begin{aligned} & (\kappa_1 + \lambda \kappa_2 \cos^2 \psi) [(1 + \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2) \\ & + \lambda \mu^2 (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2)] \\ & + \lambda (\kappa_1 \cos^2 \psi + \lambda \kappa_2) [\lambda \mu^2 (1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(1 + \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2) \\ & + (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2)] \\ & - 2\lambda \mu (\kappa_1 + \lambda \kappa_2) \cos \psi \cdot \sin \alpha_1 \sinh \alpha_1 \sin \alpha_2 \sinh \alpha_2 \\ & + \lambda \kappa_1 \kappa_2 \sin^2 \psi [\lambda \mu^2 (1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2) \\ & + (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2)] \\ & + \lambda \sin^2 \psi [(1 + \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cosh \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sinh \alpha_2) \\ & + \lambda \mu^2 (\sin \alpha_1 \cosh \alpha_1 + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_1)(1 + \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2)] = 0 \end{aligned}$$

ただし $(1 - \cos \alpha_1 \cosh \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2 \cosh \alpha_2) \neq 0$ とする.

細長比 s が十分大きい場合は κ_1, κ_2 とともに非常に大となり，振動数方程式は $\psi \neq 0$ または π のときは $\kappa_1 \kappa_2$ の係数を零としたものが振動数方程式になる。

このときは ψ の値に無関係になる。 s が十分大で $\psi \neq 0$ または π の場合、 $\psi=0$, $\psi=\pi$ の三つの場合の振動数方程式の第1根は第4図のようになる。いま ψ が零から π まで変化する場合を考えると、たとえば $l_1/(l_1+l_2)=0.4$ のとき、 s が十分大きければ、図のABCと振動数が ψ につれ増加し、また減少する。これを詳しく示したのが第5図で、 $l_1/(l_1+l_2)$ が0.5と0.25の場合、横軸に ψ 、縦軸に無次元振動数 $\alpha_1+\alpha_2$ を

としている。図からわかるように、細長比が 40 くらいでも、 ψ の大部分の値に対して、 $s \rightarrow \infty$ の場合と同じ振動数を得る。すなわち、 $s > 40$ で ψ が零や π に近くないときは、 $s \rightarrow \infty$ の結果を用いてよい。

なお、奥村も平面内の振動を研究、発表している。それは著者の場合で、 $\lambda = \mu = 1$, $l_1 = l_2$ とした場合にあたる。したがって $\kappa_1 = \kappa_2$ で、いまこれを κ とおくと奥村の振動数方程式は細長比が十分大きいときは

$$\kappa(1 - \cos \alpha \cosh \alpha)(\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) \\ \doteq 0$$

で著者のそれと一致するが，細長比が大きくないときは違う．なお奥村は $\psi = 0$, π の場合の振動数方程式を求め吟味しているが，それは著者の場合も同じ結果を得る．

上述のように平面内の振動は、縦振動の影響が細長比の大きいところでは小さいので、レイレイの方法で曲げのみを考慮して解いても十分正しい結果を得る。棒の軸に垂直、かつL形棒の平面内に一様分布荷重をうけるとして、その静たわみを用いて計算した結果は、 $\psi=30^\circ$ で、細長比無限大の場合の厳密解と2~3%くらいしか変わらず、また $\psi=90^\circ$, 60° ではほとんど同じ結果を得、また実験ともよく合った。

終りに実験およびレイレイ法をともにやってくれた
35年度卒業研究学生 江口、首藤両君に謝意を表する。

第 5 图

文 献

- (1) 奥村, 佐藤, 日本応用力学会・日本機械学会連合応力講演会前刷(昭 25-10), 27.
- (2) 小堀, 第 36 期通常総会講演会前刷集, No.5 (昭 34-4), 19;
太田, 浜田, 外 3 名, 機械学会論文集, 27, 176 (昭 36-4), 487; 佐藤, 第 38 期通常総会講演前刷集, No. 40 (昭 36-4), 9.
- (3) 高橋, 機械学会論文集, 27, 176 (昭 36-4), 480.