621.867.52.034:534.1.014

振動面上における粒体の進行速度*

(第 2 報, 振動面が円運動をする場合)

杉本 信夫**, 秋山 高治**, 所 謙三***, 増田 武***

Travelling Speed of Granular Solid on the Oscillating Trough

(2nd Report, When Trough Oscillates in Circle Motion)

by Nobuo SUGIMOTO, Takaji AKIYAMA, Kenzo TOKORO,
and Takeshi MASUDA

Succeeding to the 1st Report, this paper treats of the theoretical analysis and experimental studies concerning the travelling speed of granular solid on the oscillating trough in harmonic circular motion. As for the matter, we discuss the two cases: the travelling speed of granular solid both in the sliding movement and the sliding and jumping movements. After theoretical analysis based upon the same idea as the analysis of straight line motion, we give a formula for relative displacement Δx_i between oscillating trough and solid. According to the said formula, travelling speed V of solid is given as $V = \frac{\omega}{2\pi m_0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$ and numerical calculation is consequently made possible. Theoretical analysis is in approximate accordance with the results acquired from experiments, and the rationality of the analysis could be ascertained.

Samples and measuring methods for the experiments are both the same as described in the 1st report.

1. ま え が き

本文は, 振動面が鉛直面内において円運動を行なう場合の粒体の定常な進行速度を求めることを目的とする。

円運動は振動ふるいなどに広く用いられるが, 従来, この場合における進行速度を扱った研究⁽¹⁾⁽²⁾はほとんどない。

著者らは, 粒体の進行状態が, すべり運動と, これに飛行運動が加わるときの定常な進行速度について, 第 1 報と同様な考えのもとに, 理論解析を行ない, 実験によってその合理性を確かめる。

2. 解 析

この場合, 粒体の進行速度を求めるための取扱い上の仮定, ならびに記号は, 特記以外すべて直線運動の場合と同一とする。

2.1 進行速度の式 第 1 図は調和振動を行なう円運動の振動機構の略図である。A を出発点として角速

度 ω で, 半径 a の円運動を行なうとい上の一点 P の任意の時間 t における加速度は, つねに円運動の中心に向かい, その大きさは $a\omega^2$ である。このとき, とい上に 1 個の粒体 (質量 m) を考える。

いま, 原点を O として, x_t, y_t および x_m, y_m をそれぞれといおよび粒体の x, y 方向の変位とすると, 一般関係として

$$\left. \begin{aligned} x_t &= -a \cos \omega t, \\ \frac{dx_t}{dt} &= a\omega \sin \omega t, \\ y_t &= a \sin \omega t, \\ \frac{dy_t}{dt} &= a\omega \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_t}{dt^2} &= -a\omega^2 \cos \omega t, \\ \frac{d^2 y_t}{dt^2} &= -a\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

第 1 図

*. 昭和 36 年 3 月 17 日 関西支部第 36 期定時総会議演会において講演, 原稿受付 昭和 36 年 3 月 29 日。

** 正員, 汽車製造会社大阪製作所(大阪市此花区島屋町 406)。

*** 准員, 汽車製造会社大阪製作所。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{また } m \frac{d^2 x_m}{dt^2} &= mg \sin \beta - F, & m \frac{d^2 y_m}{dt^2} &= N - mg \cos \beta \\
 N &= mg \cos \beta (1 - K_v \sin \omega t) \cdots \cdots K_v \sin \omega t \leq 1 \text{ のとき} \\
 &= 0 & \cdots \cdots \varphi_L < \omega t < \varphi_0 \text{ のとき (飛行中)} \\
 \text{ただし } K_v &= K / \cos \beta
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (2)$$

である。

粒体の進行速度を求めるために、第1報と同様、粒体の x 方向のといに対する相対運動に注目する。このとき、 x 方向の粒体の絶対加速度 $b_m (= d^2 x_m / dt^2)$ 、絶対速度 $v_m (= dx_m / dt)$ 、といの絶対加速度 $b_i (= d^2 x_i / dt^2)$ 、絶対速度 $v_i (= dx_i / dt)$ 、粒体のといに対する相対加速度 $b_r (= b_m - b_i)$ 、相対速度 $v_r (= v_m - v_i)$ 、および摩擦力 F を、粒体がといに対し、静止、正方向のすべり、負方向のすべり、ならびに飛行運動をする場合について、添字 $s, ', ', j$ をつけて区別して、まとめて表わすと、(1), (2) 式より

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(a) 相対静止 } (v_m = v_i) \text{ のとき} \\
 F_s &= m(g \sin \beta - a\omega^2 \cos \omega t) \\
 b_{ms} &= a\omega^2 \cos \omega t \\
 b_{rs} &= 0 \\
 \text{(b) 正方向のすべり } (v_m > v_i) \text{ のとき} \\
 F' &= \mu N \\
 b_m' &= g \sin \beta - \mu(g \cos \beta - a\omega^2 \sin \omega t) \\
 b_r' &= g \sin \beta - \mu(g \cos \beta - a\omega^2 \sin \omega t) - a\omega^2 \cos \omega t \\
 \text{(c) 負方向のすべり } (v_m < v_i) \text{ のとき} \\
 F'' &= -\mu N \\
 b_m'' &= g \sin \beta + \mu(g \cos \beta - a\omega^2 \sin \omega t) \\
 b_r'' &= g \sin \beta + \mu(g \cos \beta - a\omega^2 \sin \omega t) - a\omega^2 \cos \omega t \\
 \text{(d) 飛行 } (\varphi_L < \omega t < \varphi_0) \text{ のとき} \\
 F_j &= 0 \\
 b_{mj} &= g \sin \beta \\
 b_{rj} &= g \sin \beta - a\omega^2 \cos \omega t
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3)$$

となる。いま簡単のため

$$\left. \begin{aligned}
 A &\equiv \tan \beta \mp \mu \\
 B &\equiv \sqrt{1 + \mu^2} \\
 \phi &\equiv \tan^{-1} \mu \\
 \mu &\equiv 0 \quad (\text{ただし飛行中に対し})
 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (4)$$

とおくと、粒体の任意の相対運動の区分、すなわち $\omega t = \theta_{1,i} \sim \theta_{2,i}$ において、粒体のといに対する相対加速度 $b_{r,i}$ の式は、(3), (4) 式より

$$b_{r,i} = g \cos \beta \{A - K_v B \cos(\omega t \pm \phi)\} \cdots \cdots (5)$$

で表わすことができる。すなわち(5)式は粒体のすべり運動中はもちろん、飛行運動を行なうときにも用いられ、円運動の場合の粒体の運動を決定する基礎となる式である。

初期条件として $\omega t = \theta_{1,i}$ のときに、 $v_{r,i} \equiv a\omega \varepsilon_{1,i}$ とすれば、任意の時間における粒体のといに対する相対速度 $v_{r,i}$ は(5)式を積分して

$$v_{r,i} = a\omega B \left[\frac{A}{K_v B} (\omega t - \theta_{1,i}) - \{\sin(\omega t \pm \phi) - \sin(\theta_{1,i} \pm \phi)\} + \frac{\varepsilon_{1,i}}{B} \right] \cdots \cdots (6)$$

となる。

したがって、 $\omega t = \theta_{1,i}$ より $\omega t = \theta_{2,i}$ まで経過するとき、粒体のといに対する相対変位 Δx_i は、(6)式を積分することによって

$$\Delta x_i = \frac{aB}{2} \left[\frac{A}{K_v B} (\theta_{2,i} - \theta_{1,i})^2 + 2 \{ \cos(\theta_{2,i} \pm \phi) - \cos(\theta_{1,i} \pm \phi) \} + 2 \left\{ \sin(\theta_{1,i} \pm \phi) + \frac{\varepsilon_{1,i}}{B} \right\} (\theta_{2,i} - \theta_{1,i}) \right] \cdots \cdots (7)$$

となる。

いま、粒体とといとの相対運動が、といの m_0 サイクルの間で n 区分されて行なわれるものとする、粒体の進行速度 V は、平均値として (7) 式より

$$V = \frac{\omega}{2\pi m_0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (8)$$

となる。(8) 式は円運動の場合の粒体の進行速度を与える一般式である。

2.2 角度の条件 **2.2.1 すべり運動** 粒体がつねにとい上にあるための条件は、(2) 式より

$$N = mg \cos \beta (1 - K_v \sin \omega t) > 0 \quad (9)$$

である。

また、粒体がといに対し相対静止の状態を持続するための条件は、(3) 式より

$$|\tan \beta - K_v \cos \omega t| < \mu (1 - K_v \sin \omega t) \quad (10)$$

であり、このときは粒体に働く重力と、といの振動による力の合計値が摩擦力とつりあっている。

いま、このつりあいが破れる瞬間を $\omega t = \varphi_1$ とすれば、(5) 式の b_{ri} を 0 とおいて

$$\frac{A}{K_v B} = \cos(\varphi_1 \pm \phi) \quad (11)$$

となる。(11) 式はすべり方向によって

$$\left. \begin{aligned} \text{正方向のすべり: } \frac{A'}{K_v B} &= \frac{\tan \beta - \mu}{K_v \sqrt{1 + \mu^2}} = \cos(\varphi_1' + \phi) \\ \text{負方向のすべり: } \frac{A''}{K_v B} &= \frac{\tan \beta + \mu}{K_v \sqrt{1 + \mu^2}} = \cos(\varphi_1'' - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (11)'$$

で表わされる。

(11)' 式はそれぞれ φ_1' と $(2\pi - \varphi_1' - 2\phi)$ 、および $-\varphi_1''$ と $(-\varphi_1'' + 2\phi)$ の二つの値を満足する。これらは、第 2 図に示されるように、といの加速度を表わす曲線 $b_i/a\omega^2$ と粒体の加速度を表わす曲線 $b_m'/a\omega^2$ 、または $b_m''/a\omega^2$ との交点として与えられる。

また、 $v_{ri} \equiv a\omega \varepsilon_i$ とおくと、あるすべり運動区分 ($\omega t = \theta_{1,i} \sim \omega t = \theta_{2,i}$) における任意の ωt に対して (6)、(11) 式より

$$\frac{\{\sin(\omega t \pm \phi) + \varepsilon_i/B\} - \{\sin(\theta_{1,i} \pm \phi) + \varepsilon_{1,i}/B\}}{\omega t - \theta_{1,i}} = \frac{A}{K_v B} = \cos(\varphi_1 \pm \phi) \quad (12)$$

の関係をj得る。(12) 式は、次のような幾何学的性質、すなわち、第 2 図においてといの速度を表わす曲線 $v_i/a\omega$ (正弦曲線) 上の 2 点 $[(\theta_{1,i} \pm \phi), \{\sin(\theta_{1,i} \pm \phi) + \varepsilon_{1,i}/B\}]$ と $[(\omega t \pm \phi), \{\sin(\omega t \pm \phi) + \varepsilon_i/B\}]$ とを結ぶ直線の傾斜は $\cos(\varphi_1 \pm \phi)$ であり、正弦曲線 $v_i/a\omega$ 上の $\omega t = \varphi_1 \pm \phi$ における微係数に等しい。

これを用いると、すべり運動中における粒体の x 方向の絶対速度 v_m 、およびすべり運動を終了するときの回転角 $\omega t = \theta_{2,i}$ を図式的に求めることができる。作図例は第 2 図に示される。

2.2.2 飛行運動 円運動の場合にも、粒体の飛行運動に関する条件は、直線運動の場合と全く同一である。よって

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_L &= 1/K_v \\ \varphi_0 - \varphi_L &= \sqrt{K_v^2 - 1} + \sqrt{K_v^2 + 1 - 2K_v \sin \varphi_0} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

が成立し、粒体が飛行しはじめる角度 φ_L 、および着陸するときの角度 φ_0 は K_v によって決定される。

(13) 式において、 $\varphi_0 - \varphi_L = 2m_0\pi$ (m_0 は正の整数) のときを考えると、粒体の飛行時間がといの m_0 サイクルの振動を行なう時間と等しくなる。この状態を粒体の飛行運動とといの運動とが同調するという (第 m_0 次の同調点)。この状態では、飛行運動を終えてとい上に着陸した粒体は、そのまま再び直ちに投射されるから、すべ

第 2 図

$K_v = 1.13$, $\mu = 1.0$, $\beta = 15^\circ$
 $m_0 = 1$, $n = 3$

りがないものとする。

いま, $m_0=1$ の場合を考えると, (13) 式より $K_0 = \sqrt{1+\pi^2} \approx 3.3$, したがって $\sin \varphi_L \approx 1/3.3$ となり, $\varphi_L = 17^\circ 38'$ を得る. ゆえに, $K_0 < \sqrt{1+\pi^2}$ では, 粒体は1回の振動の1サイクルごとに力をうけるが, $K_0 > \sqrt{1+\pi^2}$ では, 粒体の運動は1回の2サイクルの振動範囲にはいるので, はじめの1サイクルの振動がむだとなる. したがって, たいていの場合, $K_0 \leq \sqrt{1+\pi^2}$ で十分である.

なお, このような同調状態では, $\beta=0^\circ$ の場合を除

第 3 図

第 4 図

き, 一般に定常運動とはならない. これは, 粒体がすべり運動をしないために, x 方向に逐次, 加速, または減速運動をするからである.

飛行中の粒体の x 方向の絶対速度 v_m は, 重力のために時間とともに直線的に変化する. この関係は, $\varepsilon_{1,i}, \theta_{1,i} = \varphi_L$, $\varepsilon_{2,i}, \theta_{2,i} = \varphi_0 = \varepsilon_0$ とすれば, (4), (12) 式より

$$\frac{(\sin \varphi_0 + \varepsilon_0) - (\sin \varphi_L + \varepsilon_L)}{\varphi_0 - \varphi_L} = \frac{\tan \beta}{K_0} \quad (14)$$

を得る. (14) 式の関係を用いると, 飛行運動区分における粒体の x 方向の絶対速度 v_m も, 第 2 図に示すように図式的に求めることができる.

ここで粒体の運動を決定するといの回転角の条件をまとめると

$\varphi_1' \sim (2\pi - \varphi_1' - 2\phi)$ 正方向のすべりを
おこす

$\varphi_1'' \sim (-\varphi_1'' + 2\phi)$ 負方向のすべりを
おこす

$(-\varphi_1'' + 2\phi) \sim \varphi_1'$, $(2\pi - \varphi_1' - 2\phi)$

$\sim (2\pi + \varphi_1'')$ 相対静止が続く

$\varphi_L \sim (\pi - \varphi_L)$ 飛行運動をおこす

となる.

2.3 定常状態の境界条件 **2.3.1 定常なすべり運動** この場合, (8) 式において $K_0 \leq 1$, $m_0=1$ であって, 次の条件

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1,i} &= \varepsilon_{2,i+1} = 0, \\ \sum_{i=1}^n (\theta_{1,i+1} - \theta_{1,i}) &= 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

を満足しなければならない. このためには, (12) 式で示した方法により, 図式的に行なうのが便利である.

第 3 図はすべり運動の定常状態の一例を, 粒体, およびといの速度, ならびにこれに対応する加速度の経過として示したものである.

また, この場合, 粒体の運動区分の組合せに対する数値計算例を第 4 図に示す.

2.3.2 すべりに飛行運動が加わる ときの定常な運動 この場合, 次の条件が満足されねばならない. すなわち

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\theta_{1,i+1} - \theta_{1,i}) &= 2m_0\pi \\ \varepsilon_{1,i} &= \varepsilon_{1,i+n} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

前述の第 2 図は, このときの一例を

粒体とといの速度, および加速度の経過として示したものである。

また, $m_0=1$ の場合, 粒体の運動区分の組合せに對する数値計算例を第 5 図に示す。

3. 実 験

3.1 実験の装置と方法 進行速度の測定には, 偏心機構により円運動を行なう振動ふるいを用いた。第 6 図はその機構を示す略図で, 第 7 図は測定中の装置の全景である。

機械の振幅は, 駆動軸の偏心量を 1.5 mm と 3 mm の 2 種類用いることによって変化させ, かつ振動数は変速電動機によって 400~1200 c/min で運転し, 振動

強度を広範囲に変化させた。すえ付角は $0 \sim \pm 15^\circ$ に変えた。

これらの実験では, 振動数やすえ付角を変えるので, 機械がひずんだ運動をするおそれがあるので, とい上の各点がつねに同一運動を行なっているか否かを確認する方法として, 簡単な振動表示器⁽³⁾を用いた。

といの材質は, 鋼製の場合だけについて行ない, 実験に用いた砂袋は, 第 1 報のものと同一である。したがって摩擦係数も $\mu=0.69$ である。

進行速度は砂袋がとい上を 500 mm 進行するために要する時間を測定することによって求めた。

3.2 測定結果 実験の結果を縦軸に進行速度, 横軸に振動強度をとって表わすと, 第 8 図となる。この

場合, $\beta=0^\circ$ で $K(=K_v)=8$ まで測定した結果も記入した。

実線は, $K_v \leq \sqrt{1+\pi^2}$ に対し, $\mu=0.3, 0.6, 0.9$ に対する理論値である。

4. 結 論

進行速度の理論値と実験値は, 第 8

第 5 図

1: とい, 2: 振動台, 3: フレーム
4: 偏心軸, 5: サイドアーム
6: 防振ゴム架, 7: バランス車
8: バランス調節片, 9: 防振ゴム
10: Vベルト車, 11: 電動機

第 6 図

第 7 図

第 8 図

図によってだいたい一致したといえることができる。そこでこれらの結果を、直線運動の場合と比較してまとめると次のようになる。

(1) 円運動では進行速度が一般にきわめて低い。すなわち、直線運動と同一の振幅、振動数（したがって同一振動強度）で振動しても、円運動で得られる最大進行速度は、直線運動の場合よりつねに相当小さな値となる。

(2) すえ付角 $\beta=0^\circ$ で、振動強度を0より逐次大きくするとき、摩擦係数によってある範囲内では、粒子が逆方向に進行する場合がある。直線運動では、投射角 α が $0\sim90^\circ$ の範囲にある限り、 $\beta=0^\circ$ では絶対に逆方向に進行しない。

(3) (2) の場合に関連し、円運動では、粒子が飛行するときの絶対速度は負となることがあるが（たとえば第5図の⑥の例）、直線運動では、飛行するときの絶対速度は決して負とはならない。

(4) 振動強度によって進行速度が変化する状態は、直線運動ではだいたい振動強度に応じて一様に増加するが、円運動では、同調点付近を極大値として大

きく波状的に変化する（たとえば第8図の測定値）。すなわち、振動強度を大きくしてもかえって進行速度が小さくなる場合がある。

(5) 摩擦係数が進行速度に及ぼす影響については、直線運動の場合と同様、 K_0 が大きくなるにつれて小さくなり、同調点（たとえば $K_0 \approx 3.3$ ）では、摩擦は関係しない。

5. む す び

振動面が円運動を行なう場合の粒子の進行速度は、従来から不安定であるといわれてきた。これは、振動強度、および摩擦係数によって逆方向に進行することがあり、かつ、進行速度が直線運動の場合に比し、きわめて小さいからである。

本研究は、このような現象を理論的に明らかにし、実験によってその合理性を確かめることができた。

文 献

- (1) W. Kluge, *Erdöl u. Kohle*, 4, 11 (1951), 705.
- (2) 杉本, 宮野, 秋山, *KSK 技報*, 7, 2 (昭 26), 5.
- (3) 杉本, 第140回講習会教材 (昭 35-11), 7.

航空技術研究所第二次計画成る

科学技術庁航空技術研究所では、このほど第二次の計画を決めた。

それによると同所は37年度を初年度とする5箇年間に約100億円の予算を投じ (1) 遷音速および超音速機に関する研究, (2) VTOL (垂直上昇機): STOL (短距離着陸機) に関する研究, (3) ロケットの基礎研究を行なう方針である。

大要つぎのとおり

▽遷音速および超音速機に関する研究=遷音速, 超音速時における航空機の熱弾性, 高温疲れなどを試験するため, ドイツのセンク社から試験装置を購入するほか, 飛行中の機体の各部分が受ける荷重の測定装置, データの解析装置を設ける。

実際飛行中の航空機から直接データを得るため実験用航空機を2機 (37年度に双発ビーチクラフト1機, 39年度に国産YS 11 1機) 購入する。

また既存のフラッタ試験設備の性能を向上させる (マッハ1.2のものを1.5にする)。これに要する設備費は建て屋建設費を除いて約17億9000万円。

▽VTOL, STOL に関する研究=欧米諸国ですでに研究中のものだが, 国土のせまいわが国の交通機関

として有望なので重点的に研究する。

研究開発に必要な大形風洞や各種計測機器, 自動制御機器を備えるほか, ブートルのリフトエンジンを試作する。これに要する資金は28億6000万円 (建て屋建設費を除く)。

▽ロケットの基礎研究=ロケットの研究開発については総理府の宇宙開発審議会の答申をまわって科学技術庁に宇宙技術研究所を作る計画があるが, 同所はこれと別にロケットの基礎研究を行なう方針である。

このため200気圧の空気源をもつ極超音速風洞 (マッハ5~15) を建設するほか, さらに37, 8年にはロケットの固体燃料, 39~41年には同液体燃料の研究を行なう。

また, ロケットと空気との摩擦熱を試験する加熱負荷試験装置を備える。これらに要する費用は約11億円である。

なお, 同研究所の第一次計画は31年から6箇年間にわたって行なわれ, 今年度が最終年次にあたるが, 計画の達成率は予算で69%, 研究所要員で51%にとどまった。

(服部敏夫)