ど 0 に近い値になっているのである。このようなことは全計算を完了してはじめて明らかになるので、はじめから修正を行なう必要がないということはできない。本論文の例では、理論の妥当性を立証するために、固定壁と多孔壁の両方の場合の実験値が判明しているもののみ掲載したが、本計算法の目的は、一方の値のみがわかっていて、それをもとにして他方の値を推定するにあるから、このような場合には修正量が大きくなるか小さいかはやってみなければわからないはずである。

(5) 本文では、ピッチ比が 1 よりあまり大きくない場合、流入方向の変化によって流出方向はほとんど変化しないからいいと書いたが、たとえ大きくてもこれを修正する方法は前回答でふれたごとくに行ないうるので、ピッチ比の大きい方向への制限はない。ピッチ比の小さい場合は計算の精度が落ちるが、その限度はピッチ比 0.8 程度であろう。またピッチ比と無関係に NACA 65 系翼形の場合、 $C_{l0}=2$ 以上のものは精度が望めない。

(6) 一例を掲げると第 12, 13 図のとおりである。

532.526.011

非 定 常 境 界 層 の 研 究*

(第 4 報, 級数解法による任意形状物体の境界層計算法)

堀 栄 一**

Unsteady Boundary Layers

(4th Report, Calculation of Boundary Layer Around a Body with Arbitrary Shape by the Use of a Series Expansion Method)

by Ei-ichi HORI

A method of calculating the unsteady laminar boundary layer is presented. Two-dimensional flow of an incompressible fluid is assumed. The case of an oscillating outer flow, about a time-mean value, with a small amplitude and at relatively low frequency, is considered.

By the use of a power-series expansion method, boundary layer around a body with an arbitrary shape and with a wedge-shaped nose of arbitrary angle, can be calculated. The solution is obtained as a linear combination of a set of universal functions. Velocity fluctuations in the boundary layer, of second order in magnitude, are taken into account. The time-mean velocity at a point in the boundary layer shifts as the amplitude of outside flow oscillation is increased. At the same time, the second harmonic fluctuation is produced. The method of calculation is applied to the boundary layer of a circular cylinder, and it is found that the influence of the second order velocity change is rather small, even at the outside velocity fluctuation 0.5 times the mean velocity.

1. 緒 言

任意形状の物体のまわりを流れる非圧縮性流体の、非定常二次元層流境界層の計算法について報告する。境界層の外側の流れの速度は時間的な平均値を有し、この平均値のまわりに微小な速度振幅で、比較的低い周波数で、正弦的に変動するものと仮定する。すなわち、境界層外縁の速度 $U(x, t)$ が

$$U(x, t) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) \cos \{\omega t - \varphi(x)\} \cdots (1)$$

で与えられる場合を取扱う。ここに $U_0(x)$ は層外速度の時間平均値、 $\varepsilon U_1(x)$ は速度変動の振幅で、それぞれ x のみの関数とする。 ε は無次元の微小定数で、速度の大きさの程度を比較するのに便利のように導入したものである。 $U_0(x)$ と $U_1(x)$ は同じ程度の大きさで 1 の程度とする。 x は物体前縁を原点として、物体表面に沿って測った距離である。原点は層外速度 $U_0(x)$ の定常流について定義し、非定常流の場合もそこに固定しておくことにする。物体表面に垂直に、物体表面から流体内部へ測った距離を y 、時間を t とする。 ω は角周波数で、 $\varphi(x)$ は層外速度変動の位相が x によって異なることを表わす位相関数である。

* 昭和 36 年 4 月 6 日 第 38 期通常総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和 35 年 11 月 29 日。

** 正員、日立製作所中央研究所 (東京都北多摩郡 国分寺町 恋ヶ窪 280)。

本報告は筆者がこれまでにこなして来たところの、級数展開による非定常境界層の解法^{(1)~(3)}を一般化したものである。第1報から第4報までの計算の条件を第1表に比較した。

まず $U_0(x)$ を比較する。前報で $U_0(x)$ が x から始まる奇数べき級数で与えられているのは、前部よどみ点を有する対称形物体（無限遠における流れの方向に関して対称）を取扱ったためであるが、本報ではそれを拡張して x^m から始まるべき級数として、前縁がくさび状（よどみ点の場合を含む）をなす任意形状の物体を取扱う。次に $U_1(x)$ であるが、第1報ではそれが $U_0(x)$ と一致する場合を考えた。すなわち、無限遠における流速が正弦的に変化する場合であって、Lighthill⁽⁴⁾ が初めて扱った問題である。第2報では、 $U_1(x)$ が x の偶数べき級数で与えられる場合を扱った。物体のまわりに循環の変動が存在する場合である。本報では $U_1(x)$ を x^m から始まるべき級数で与え、第1報、第2報の両方を含めて一般化する。 $U_w(x)$ というのは物体壁が運動する（その面内で）速度であって、第3報でその場合を扱った。層外速度が変動すると同時に物体壁も運動する問題も本報と同様に計算できるけれども、計算式が繁雑になるから省略した。

最後に ε について述べる。前報の計算はすべて ε の程度の微量量に限って行ない、 ε^2 の程度以上に小さい量は無視できるものと考えた。本報では ε^2 程度の速度変化をも計算する。これによって、変動する境界層の中の一点における流速を時間平均したものは、定常流の中の同一点における流速から ε^2 の程度ずれることと、 ε^2 の程度の振幅で、周波数が層外速度の周波数の2倍にあたる速度変動が起ることがわかる。そしてこれらの ε^2 の程度の速度変化を実際に計算してみることにより、前報で行なった ε の程度で打切る計算（線形理論）がどの程度正確であるのかわかる。 ε^2 の程度までの計算はこれまでに Lin⁽⁵⁾ のものと、Moore と Ostrach⁽⁶⁾ のものとがある。Lin は ω が高いとして計算を簡単にし、Moore と Ostrach は平板の非定常境界層を扱った。本報告は ω が低いと仮定する点で、Moore-Ostrach の計算に似ているが、任意

形状の物体の境界層を扱う点が異なっている。

2. 層外速度が微小変動する場合の境界層方程式

点 (x, y, t) における x 方向の流速を u 、 y 方向の流速を v 、流体の密度を ρ 、圧力を p 、動粘性係数を ν とするとき、非圧縮性流体の非定常二次元層流境界層の方程式は周知のごとく、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

であって、圧力こう配は層外速度 $U(x, t)$ によって、次のように与えられる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (3)$$

層外速度を(1)式のように与えた場合の取扱い方についてはあとで述べることにして、まず説明を簡単にするために、層外速度が次の(4)式のように、時間平均速度 $U_0(x)$ と振幅が $\varepsilon U_1(x)$ で、位相のずれのない正弦の変動の和で表わされるものとする。

$$U(x, t) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (4)$$

このとき圧力こう配は(3)、(4)式より、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = & U_0 \frac{dU_0}{dx} + \varepsilon \left\{ \left(U_0 \frac{dU_1}{dx} + U_1 \frac{dU_0}{dx} \right) \cos \omega t - \omega U_1 \sin \omega t \right\} \\ & + \varepsilon^2 U_1 \frac{dU_1}{dx} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となる。

そこで境界層内における速度を微小定数 ε のべき級数に展開する。すなわち、 u_0, u_1 等を x, y, t の関数として、

$$\left. \begin{aligned} u = & u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots\dots\dots \\ v = & v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

とする。

$\varepsilon=0$ とおいてみれば直ちにわかるとおり、速度 u_0, v_0 は層外速度が $U_0(x)$ の定常境界層の中の点 (x, y) における速度である。これを $\bar{u}, \bar{v}$ と記し、定常速度と呼ぶことにする。

次に角周波数 ω が小さければ、 ε の程度の速度

第1表 計算条件の比較

	$U_0(x)$	$U_1(x)$	$U_w(x)$	微 少 量
第 1 報	$x(a_0 + a_2 x^2 + \dots\dots)$	$x(a_0 + a_2 x^2 + \dots\dots)$	0	ε の程度まで
第 2 報	同 上	$(b_0 + b_2 x^2 + \dots\dots)$	0	ε "
第 3 報	同 上	0	b_0	ε "
第 4 報	$x^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots)$	$x^n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots)$	0	ε^2 "

注：第1, 2, 3報では a_0, a_2, b_0, b_2 の代りに u_1, u_3, u_0, u_2 等の記号を使った。

$\varepsilon u_1, \varepsilon u_2$ は ω のべき級数に展開できる。展開式は

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_s \cos \omega t - \omega u_t \sin \omega t - \omega^2 u_u \cos \omega t + \cdots \\ v_1 &= v_s \cos \omega t - \omega v_t \sin \omega t - \omega^2 v_u \cos \omega t + \cdots \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (7)$$

であって、これは一般の展開式を (2) 式に代入し、(5) 式と比較して零にならない項のみ残したものである。

u_s, u_t 等は x と y との関数で、時間 t には無関係である。添符 s, t, u は $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ の係数であることを示すために順番に従って付けたものである。

u_s, v_s を準定常速度振幅、 u_t, v_t を一次の非定常速度振幅、 u_u, v_u を二次の非定常速度振幅というように呼ぶことにする。準定常速度というのは、 ω がごく小さいとき、ある瞬間の層外速度分布と同じ速度分布を持つ定常流を考え、その瞬間の境界層内の速度は、対応する定常境界層の中における速度に等しいとするものである。 ω が大きくなると、層外速度が変化するときの加速度によって起る圧力こう配、すなわち (5) 式の $-\omega U_1 \sin \omega t$ と u_s と v_s によって境界層内に局部的に引起される圧力こう配とに支配される非定常な速

度変動であるところの、 $-\omega u_t \sin \omega t, -\omega v_t \sin \omega t$ をも考慮することが必要になる。

次に ε^2 の程度速度変化、 $\varepsilon^2 u_2, \varepsilon^2 v_2$ について考えよう。Lin⁽⁵⁾ は角周波数 ω のきわめて大きい場合を考え、層外速度の時間的な変化に起因する圧力こう配が場所的变化による圧力こう配よりもはるかに大きく、層内の運動量変化も速度の時間的な変化によるものが主であるとして式を簡単化し、まず ε の程度の非定常速度振幅を求め、これをもとの境界層方程式に代入して ε^2 の程度の量を求めた。本報告においては、 ω が比較的小さくて、時間的な変化よりも場所的な変化がきく場合を取扱うから、Lin とは異なった方法で計算せねばならない。

さて、 ε の程度速度振幅の満たす微分方程式およびその解法は前報と同じであるから、それによって (7) 式の u_1, v_1 はわかっているものとする。定常速度 $\bar{u}, \bar{v}$ も既知とする。

境界層方程式 (2) に圧力こう配の式 (5) と ε に関する展開式 (6) を代入して整理し、 ε^2 の係数を集めれば、

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = U_1 \frac{dU_1}{dx} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \cdots \cdots (8)$$

を得る。左辺の第 2 項 $u_1(\partial u_1/\partial x)$ に展開式 (7) を入れれば、

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} - \omega \frac{1}{2} \sin 2\omega t \left(u_s \frac{\partial u_t}{\partial x} + u_t \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) - \omega^2 \frac{1}{2} \left(v_s \frac{\partial u_u}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + u_u \frac{\partial u_s}{\partial x} - u_t \frac{\partial u_t}{\partial x} \right) - \omega^2 \frac{1}{2} \cos 2\omega t \left(u_s \frac{\partial u_u}{\partial x} + u_u \frac{\partial u_s}{\partial x} + u_t \frac{\partial u_t}{\partial x} \right) + \cdots \cdots \end{aligned} \cdots \cdots (9)$$

が得られる。 $v_1(\partial u_1/\partial y)$ に対しても同様な式が求められる。 u_1 に対する計算と同様にして、 u_2 に対する下記の展開式を得る。

$$u_2 = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) \bar{u}_s - \omega \frac{1}{2} (\sin 2\omega t) \bar{u}_t - \omega^2 \frac{1}{2} \bar{u}_u - \omega^2 \frac{1}{2} (\cos 2\omega t) \bar{u}_u + \cdots \cdots \cdots (10)$$

$\bar{u}_s, \bar{u}_t$ 等は次の微分方程式によって決定される。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} + \bar{u}_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial y} + \bar{v}_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = U_1 \frac{dU_1}{dx} - \left(u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial y^2} \cdots \cdots (11)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}_t}{\partial x} + \bar{u}_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}_t}{\partial y} + \bar{v}_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -2\bar{u}_s - \left(u_s \frac{\partial u_t}{\partial x} + u_t \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_t}{\partial y} + v_t \frac{\partial u_s}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial y^2} \cdots \cdots (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_u}{\partial x} + \bar{u}_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}_u}{\partial y} + \bar{v}_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= - \left(u_s \frac{\partial u_u}{\partial x} + u_u \frac{\partial u_s}{\partial x} - u_t \frac{\partial u_t}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_u}{\partial y} + v_u \frac{\partial u_s}{\partial y} - v_t \frac{\partial u_t}{\partial y} \right) \\ &\quad + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_u}{\partial y^2} \cdots \cdots \end{aligned} \cdots \cdots (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}_u}{\partial x} + \bar{u}_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}_u}{\partial y} + \bar{v}_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= - \left(u_s \frac{\partial u_u}{\partial x} + u_u \frac{\partial u_s}{\partial x} + u_t \frac{\partial u_t}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_u}{\partial y} + v_u \frac{\partial u_s}{\partial y} + v_t \frac{\partial u_t}{\partial y} \right) \\ &\quad - 2\bar{u}_t + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_u}{\partial y^2} \cdots \cdots \end{aligned} \cdots \cdots (14)$$

このほかにももちろん連続の式と境界条件が必要である。連続の式は、 $(\bar{u}_s, \bar{v}_s), (\bar{u}_t, \bar{v}_t)$ 等のそれぞれの組について別々に成り立つ。境界条件はどの組についても同じで、一般に、

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \text{ で } u=0, \quad v=0; \\ y \rightarrow \infty \text{ で } u \rightarrow 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

である。

(10) 式にもどってみよう。 u_2 の時間平均を作ったときに、零にならない項として、 $(1/2)\bar{u}_s$ 、 $-\omega^2(1/2)\bar{u}_w$ 等がある。これらは非定常境界層内の一点 (x, y) における速度を時間的に平均した値は、変動をはじめから零とした定常境界層内の (x, y) における速度 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ とは異なることを示している。それは層外速度の変化に対する境界層の応答が非線形であるために起るひずみと考えられる。さらに (10) 式は、 ε^2 の程度まで計算すると、変動速度に第2高調波が表われることを示している。

層外速度が (4) 式よりもっと一般的な (1) 式で与えられた場合の計算法について、最後に付言しておく。

(1) 式の cosine を展開すれば、

$$U(x, t) = U_0(x) + \varepsilon C_1(x) \cos \omega t + \varepsilon S_1(x) \sin \omega t \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{array}{l} C_1(x) = U_1(x) \cos \{\varphi(x)\} \\ S_1(x) = -U_1(x) \sin \{\varphi(x)\} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

である。(16) 式は層外速度の変化分が、互に振幅が異なり、位相が 90° 異なる二つの変動を重ねたものであることを示す。 ε の程度まで考える計算は、線形の計算で、解の重ね合わせができるから、層外速度の変動が $\varepsilon C_1 \cos \omega t$ の場合と、 $\varepsilon S_1 \sin \omega t$ の場合の層内速度を別々に計算して、その結果をたし合わせればよい。 ε^2 の程度まで考えれば、 $C_1(x)$ による流れと $S_1(x)$ による流れとの干渉が起るので、計算は幾分複雑になるが、本節で述べた方法と同じ方針で取扱うことが可能である。

層外速度の変動が単弦振動の形でなくて、フーリエ級数の形に与えられるときにも、 ε の程度までなら重ね合わせが可能で、 ε^2 の程度になるとフーリエ成分同志の干渉を考えなければならない。

3. ブラジウス形級数の拡張と非定常境界層への適用

定常層流境界層の計算法でブラジウス級数と呼ばれている解法は、前部よどみ点を有する物体の境界層計算に用いられる方法で、層外速度分布を x のべき級数で与え、境界層内の速度をも x のべき級数として求めるものである。一方ハワース級数と呼ばれている解法は、流れが物体前縁に接線方向に流入し、層外速度分布が x に関して直線的に与えられる場合の解法である。いずれの解法も、境界層方程式の厳密解を与える

方法であること、解は普遍速度分布関数に重み(層外速度を表わす級数の係数で定まる)をつけて加えるだけで得られるのが特長である。この点ポールハウゼン法で代表される運動量積分を用いる方法が初めから近似解法であり、問題を解くごとに微分方程式を数値的に解かねばならぬことが多いのと大きく異なっている。

これらの級数解法の拡張や変形がこれまでにいくつか提案された。Chao⁽⁷⁾ はハワース級数の拡張を試み、ハワース級数が実は定数項からはじまる x のべき級数で層外速度を与える解法を、層外速度だけ x の一乗の項で打切ったものに相当することを示した。

Görtler⁽⁸⁾ は、層外速度が x^m から始まるべき級数で与えられる場合を取扱い、また解を表わす級数の初項のみで、層外速度との接続条件を満足させることを提案した。Görtler の方法では x を一度変換するが、 x をそのまま一つの変数として用いても Görtler の意図は達せられ、計算もより簡単であることを筆者⁽⁹⁾ が示した。上記の各級数解はそれぞれの普遍関数群に帰着されるが、関数群間に関係があって、一群から他の群の関数を線形結合で計算できることも筆者が示した。

上記のどの級数解法も非定常境界層に適用できると思われるが、ここでは前報と統一するためにブラジウス形の級数(ハワース級数を含む)を用いることにする。ただし、ブラジウス形の級数も、Görtler や筆者の級数と同様に層外速度が x^m から始まる級数で与えられる場合に拡張できるから、以下の式は m を任意にしておいて導くことにする。

層外速度が x^m から始まるということは、原点の付近では Falkner-Skan の問題に一致するということである。すなわち、一般に前縁が第1図のようにくさび形をした物体を扱うということである。くさびの角は $(2m\pi)/(m+1)$ である。 $m=0$ のときは物体前縁は先点で、流れは物体表面に平行に流入し、 $m=1$ のときは前縁がよどみ点で、流れは物体表面に垂直に流入する。境界層解法としては $m=0$ がハワース級数、 $m=1$ がブラジウス級数になる。

定常流の場合をまず考える。変数 x, y を次式によって、無次元の ξ, η に変換する。

第 1 図

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L} \sqrt{a_0 R_e} \xi^{(m-1)/2} \dots \dots \dots (18)$$

ただし L は物体の代表長さ (たとえば円柱の半径), a_0 は層外速度級数の初項の係数で定数, R_e はレイノルズ数で次式で定義する.

$$R_e = U_\infty L / \nu \dots \dots \dots (19)$$

U_∞ は無限遠における流速の時間平均値である. 層外速度は

$$U_0(\xi) = U_\infty \xi^m (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots) \dots \dots \dots (20)$$

とする. m, a_0, a_1 等は定数である.

流れの関数 ψ を導入して, 連続の式を満足させる. 境界層内の流速 $\bar{u}, \bar{v}$ と ψ の関係は

$$\bar{u} = \partial \psi / \partial y, \quad \bar{v} = -\partial \psi / \partial x \dots \dots \dots (21)$$

である. ψ は次のようにおく,

$$\psi = \frac{U_\infty L}{\sqrt{a_0 R_e}} \xi^{(m+1)/2} (a_0 F_0 + a_1 F_1 \xi + a_2 F_2 \xi^2 + \dots) \dots \dots \dots (22)$$

$$\text{さらに } F_2 = f_2 + \frac{a_1^2}{a_0 a_2} f_{11}, \quad F_3 = f_3 + \frac{a_1 a_2}{a_0 a_3} f_{12} + \frac{a_1^3}{a_0^2 a_3} f_{111}, \dots \dots \dots (23)$$

とおけば, $F_0, F_1, f_1, f_2, f_{11}$ 等は η のみの関数であって, 普遍関数である. ただし m をパラメータとして含んでいる. これらの普遍関数は, F_0 から始めて, 下記のごとき微分方程式を順々に数値積分して解き, 数表に作っておくことができる.

$$F_0''' + \frac{m+1}{2} F_0 F_0'' - m F_0'^2 = -m, \quad F_0(0) = F_0'(0) = 0, \quad F_0'(\infty) = 1 \dots \dots \dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1''' + \frac{m+1}{2} F_0 F_1'' - (2m+1) F_0' F_1' + \frac{m+3}{2} F_0'' F_1 &= -(2m+1) \\ F_1(0) = F_1'(0) = 0, \quad F_1'(\infty) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{11}''' + \frac{m+1}{2} F_0 f_{11}'' - (2m+2) F_0' f_{11}' + \frac{m+5}{2} F_0'' f_{11} &= -(m+1) + \left\{ (m+1) F_1'^2 - \frac{m+3}{2} F_1 F_1'' \right\} \\ f_{11}(0) = f_{11}'(0) = 0, \quad f_{11}'(\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

これらの普遍関数は, $m=0$ の場合はハース級数の関数に, $m=1$ ならばブラジウス級数の関数になるはずのものであるが, 定義が若干異なり, 記号も異なるので, 第 2 表の対照表のような関係になる. なお (24)~(26) 式および第 2 表でダッシュはそれぞれの変数 η で微分することを示す.

この拡張したブラジウス形の級数を非定常境界層の計算に適用する. 層外速度の変動振幅を表わす $U_1(x)$ は,

$$U_1(\xi) = U_\infty \xi^n (b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots) \dots \dots \dots (27)$$

とする. 準定常, 一次, 二次の非定常の速度振幅に対

第 2 表 関数の対照表

	$m=0$	$m=1$
F_0, F_0', F_0''	$f_0, (1/2)f_0', (1/4)f_0''$	f_1, f_1', f_1''
F_1, F_1', F_1''	$8f_1, 4f_1', 2f_1''$	$3f_2, 3f_2', 3f_2''$
f_2, f_2', f_2''	—	$4g_3, 4g_3', 4g_3''$
$f_{11}, f_{11}', f_{11}''$	$64f_2, 32f_2', 16f_2''$	$4h_3, 4h_3', 4h_3''$
f_3, f_3', f_3''	—	$5g_4, 5g_4', 5g_4''$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
η	2η	η

する流れの関数は, 前節と添符 s, t, u を一致させて, ϕ_s, ϕ_t, ϕ_u 等と記す.

$$\left. \begin{aligned} \phi_s &= \frac{U_\infty L}{\sqrt{a_0 R_e}} \xi^{(-m+2n+1)/2} (b_0 F_{s0} + b_1 F_{s1} \xi \\ &\quad + b_2 F_{s2} \xi^2 + \dots) \\ \phi_t &= \frac{L^2}{\sqrt{a_0^3 R_e}} \xi^{(-3m+2n+3)/2} (b_0 F_{t0} + b_1 F_{t1} \xi \\ &\quad + b_2 F_{t2} \xi^2 + \dots) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

とおく.

定常流の場合と同様に,

$$\left. \begin{aligned} F_{s1} &= f_{s1} + \frac{a_1 b_0}{a_0 b_1} f_{s10}, \\ F_{s2} &= f_{s2} + \frac{a_1 b_1}{a_0 b_2} f_{s11} + \frac{a_1^2 b_0}{a_0^2 b_2} f_{s110} + \frac{a_2 b_0}{a_0 b_2} f_{s20} \\ F_{t1} &= f_{t1} + \frac{a_1 b_0}{a_0 b_1} f_{t10}, \\ F_{t2} &= f_{t2} + \frac{a_1 b_1}{a_0 b_2} f_{t11} + \frac{a_1^2 b_0}{a_0^2 b_2} f_{t110} + \frac{a_2 b_0}{a_0 b_2} f_{t20} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

等とおけば, $F_{s0}, f_{s1}, F_{t0}, f_{t1}$ 等は η のみの関数 (パラメータ m, n を含む) で, 普遍関数である.

第1報や第2報において示したと同様に、準定常の速度振幅を表わす普遍関数は定常流の普遍関数の組合せで表わされることが多い。それは準定常境界層は、層外速度がわずかに変化したときの定常境界層と同じことなので、新しい層外速度に応じた定常解を求めれば、それは他方、もとの層外速度から準定常の計算をしたものと ε の程度で一致すべきだからである。ただし層外速度の新しい分布がもとの分布とかなり異なるときは準定常の普遍関数は定常の普遍関数の組合せでうまく表わすことができない。なお非定常の普遍関数は一般に数値積分によって求めなければならない。

ここで非定常の速度変化と周波数の関係について述べておく。(7)式から境界層内の速度は、

$$\begin{aligned} u_1 &= u_s \cos \omega t - \omega u_t \sin \omega t - \omega^2 u_s \cos \omega t + \dots \\ &= U_\infty \xi^n \left[b_0 \left\{ F_{s0}' \cos \omega t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\omega x}{a_0 U_\infty} \right) \xi^{-m} F_{t0}' \sin \omega t + \dots \right\} \right. \\ &\quad \left. + b_1 \left\{ F_{s1}' \cos \omega t - \left(\frac{\omega x}{a_0 U_\infty} \right) \xi^{-m} F_{t1}' \sin \omega t + \dots \right\} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

となる。(30)式から見ると、角周波数は $\{(\omega x)/(a_0 U_\infty)\} \xi^{-m}$ というパラメータにまとめられるものであって、非定常性に関与するのは ω のみでないことがわかる。 $m=1$ の場合には周波数パラメータは $(\omega L)/(a_0 U_\infty)$ になるから x に無関係であるが、 $m=0$ ならば、周波数パラメータは x に比例して増し、 ω は一定でも前縁から離れるほど非定常性が増すことになる。

以上の式はすべて ε の程度速度振幅について導いた。 ε^2 の程度の計算も同様に一般式について行なうこ

第2図

とができるが、数式が繁雑になるのでここで取上げるのはやめ、次の節で例題について計算するに止める。

4. 円柱のまわりの非定常境界層

無限遠の流速が

$$U(\infty, t) = U_\infty (1 + \varepsilon \cos \omega t) \dots \dots \dots (31)$$

で与えられる場合について、円柱のまわりの非定常境界層を計算する。 ε の程度までの計算はすでに第1報で行なったから、ここでは ε^2 の程度の量の寄与を主として論ずる。

層外速度の定常分は

$$U_0(x) = 2U_\infty \sin \xi = U_\infty \xi \left\{ 2 - \frac{1}{3} \xi^2 \right\} \dots \dots \dots (32)$$

で与える。すなわち(20)式において、

$$L=R, \quad m=1, \quad a_0=2, \quad a_1=0, \quad a_2=-1/3, \dots$$

とする。 R は円柱の半径である。層外速度の変動振幅を表わす U_1 はいまの場合は U_0 に等しい。ゆえに

$$n=1, \quad b_0=2, \quad a_1=0, \dots$$

である。

まず層内の定常速度は、

$$\bar{u} = U_\infty \xi \left(2F_0' - \frac{1}{3} \xi^2 f_2' + \dots \right) \dots \dots \dots (33)$$

である。 ε の程度の準定常速度振幅は、第1報により

$$\begin{aligned} u_s &= U_\infty \xi \left\{ 2 \left(F_0' + \frac{\eta}{2} F_0'' \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \xi^2 \left(f_2' + \frac{\eta}{2} f_2'' \right) + \dots \right\} \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

となる。

いま $\omega t = \pi$ の瞬間を考えてみよう。この瞬間に層外速度の値は $U_0(1-\varepsilon)$ である。準定常流を考えれば、このときの準定常速度は厳密には定常速度(33)式において、 U_∞ の代りに $U_\infty(1-\varepsilon)$ としたものである。この際、変数 η の中にも U_∞ が含まれていることを考慮しなければならない。このことは、層外速度が減ったために境界層が厚くなるということである。一方 ε の程度までの計算ではこの場合の準定常速度を $\bar{u} - \varepsilon u_s$ で代用することになる。厳密な準定常速度と、この ε の程度の近似との比較を第2図に示す。図は(33)式の第1項に表われる F_0' について比較したものであって、 $\omega t = 0$ と π に相当して、

$$(1 \pm \varepsilon) F_0'(\sqrt{1 \pm \varepsilon} \eta) \quad (\text{複号同順})$$

によって計算した速度分布を“exact”とし、 $\bar{u} \pm \varepsilon u_s$ によって計算した値と比較してある。 ε をかなり大きく0.5として計算したので、境界層底部の近くにかんり差が表われている。

そこで ε^2 の程度の速度の寄与を考えてみる。

$$\varepsilon^2 \bar{u}_s = \varepsilon^2 U_\infty \xi \left\{ 2 \left(\frac{3}{8} \eta F_0'' + \frac{1}{8} \eta^2 F_0''' \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{8} \eta f_2'' + \frac{1}{8} \eta^2 f_2''' \right) \xi^2 + \dots \right\} \dots (35)$$

であることは $\bar{u}$, u_s , $\bar{u}_s$ の表示式 (33), (34), (35) を微分方程式 (11) に代入してみればわかる. ε^2 まで採ると, $\omega t = 0$ と π のとき

$$u = \bar{u} \pm \varepsilon u_s + \varepsilon^2 \bar{u}_s \dots (36)$$

である. $\bar{u} = F_0'$ として (36) 式によって u を計算して第 2 図に記入しても “exact” の曲線と重なって区別がつかない. 数値的に比較するため, 第 2 図の $\eta = 1.0$ のところの速度値を第 3 表に示した. 同じ表には

第 3 図

第 4 図

表面摩擦に比例する $F_0''(0)$ とその準定常計算値を掲げてある. どちらからいっても, $\varepsilon = 0.5$ の場合, ε の程度では不十分でも, ε^2 の程度まで取れば十分精密値に近い結果が得られることがわかる. 前報におけるごとく, $\varepsilon = 0.1$ 程度の計算では ε の程度までで打切って十分である.

非定常速度振幅は ε の程度は,

$$u_t = U_\infty \xi \left(\frac{R}{2U_\infty} \right) \left(2F_{t0}' - \frac{1}{3} \xi^2 f_{t2}' + \dots \right) \dots (37)$$

第 3 表 準定常解の比較

	$u(1.0)$	$(\partial u / \partial y)_0$
exact	0.317 0	0.436
$\bar{u}$	0.777 8	1.232 6
$\bar{u} - \varepsilon u_s$	0.289 4	0.308
$\bar{u} - \varepsilon u_s + \varepsilon^2 \bar{u}_s$	0.308 7	0.424

第 4 表

η	$\bar{F}_{t0}'$	$\bar{f}_{t2}'$
0	0	0
0.2	0.013	-0.004
0.4	0.025	-0.008
0.6	0.032	-0.011
0.8	0.035	-0.011
1.0	0.033	-0.010
1.4	0.021	-0.006
1.8	0.006	-0.002
2.2	-0.003	-0.001
2.6	-0.005	-0
3.0	-0.003	-0
3.4	-0.001	-0
3.8	-0	-0

注 計算は小数点以下 4 けたまでとって行ない, 表には 3 けたに四捨五入した.

$\varepsilon = 0.5$, $(\omega R)/(2U_\infty) = 0.3$. 矢印は状態の推移する方向を示す.

第 5 図 円柱の境界層はがれ点の移動

で, ε^2 の程度は

$$\bar{u}_t = U_\infty \xi \left(\frac{R}{2U_\infty} \right) \left(2\bar{F}_{t0}' - \frac{1}{3} \xi^2 \bar{f}_{t2}' + \dots \right) \dots \dots \dots (38)$$

である。 F_{t0} と f_{t2} はすでに第1報で求めている。 $\bar{F}_{t0}$ と $\bar{f}_{t2}$ は今回数値積分によって求めたもので、その一階微分を第4表に示す。第3図は $\bar{F}_{s0}'$ と $\bar{F}_{t0}'$ とを、第4図は $\bar{f}_{s2}'$ と $\bar{f}_{t2}'$ とを示す。

これらの普遍関数の原点における二階微分の値は表面摩擦を計算するのに必要であるからまとめて下に記す。

$$F_0''(0) = 1.2326, \quad f_2''(0) = 2.898, \quad \bar{F}_{s0}''(0) = \frac{3}{2} F_0''(0), \quad \bar{f}_{s2}''(0) = \frac{3}{2} f_2''(0),$$

$$F_{t0}''(0) = 0.286, \quad f_{t2}''(0) = -0.057, \quad \bar{F}_{t0}''(0) = \frac{3}{8} F_0''(0), \quad \bar{f}_{t2}''(0) = \frac{3}{8} f_2''(0),$$

$$\bar{F}_{t0}''(0) = 0.066, \quad \bar{f}_{t2}''(0) = -0.08$$

これらの値を用いて、円柱面から境界層はがれる点の移動の様態を計算する。第1報では $\varepsilon = 0.1$ として ε の程度、 ω^2 の程度の計算を行なった。 ω^2 までととっても、 ω までとったのと大差なかった* ので、ここでは ω の程度までに計算を限る。

表面摩擦を無次元表示すれば、

第6図 円柱の境界層はがれ点の移動

* 森康夫氏がその討論中で質問されたので注記する。第1報では $\omega R/2U_\infty = 0.1, 0.2, 0.3$ の場合を計算したが、はがれ点の移動を示す図(本報告の第5図に相当するもの)に対しては ω^2 の程度の項の効果は全く表われなかった。

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu(\partial u/\partial y)_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \sqrt{\frac{2U_\infty R}{\nu}} = 4\left(\frac{x}{R}\right) \left\{ 2F_0''(0) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^2 f_2''(0) + \dots \right\} \\
& + \varepsilon 4\left(\frac{x}{R}\right) \left\{ 2F_{s0}''(0) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^2 f_{s2}''(0) + \dots \right\} \cos \omega t \\
& + \varepsilon 4\left(\frac{\omega R}{2U_\infty}\right) \left(\frac{x}{R}\right) \left\{ 2F_{t0}''(0) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^2 f_{t2}''(0) + \dots \right\} (-\sin \omega t) + \dots \\
& + \varepsilon^2 4\left(\frac{x}{R}\right) \left\{ 2\bar{F}_{s0}''(0) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^2 \bar{f}_{s2}''(0) + \dots \right\} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) \\
& + \varepsilon^2 4\left(\frac{\omega R}{2U_\infty}\right) \left(\frac{x}{R}\right) \left\{ 2\bar{F}_{t0}''(0) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^2 \bar{f}_{t2}''(0) + \dots \right\} \frac{1}{2}(-\sin 2\omega t) + \dots
\end{aligned} \quad \dots (39)$$

表面摩擦が零になる点で境界層がはがれるものとして, (39) 式を零とおいて (x/R) について解く. ただし近似的に, 定常はがれ点の付近で定常摩擦応力は (x/R) によって直線的に変わり, 非定常分は一定であるとする. 定常はがれ点を $(x/R)_{ss}$ と記す. (39) 式の定常摩擦応力の級数 (第 1 行) を第 2 項で打切った場合,

$$(x/R)_{ss} = 1.5977 \quad \text{で}$$

$$0 = -19.72 \left\{ \left(\frac{x}{R}\right) - \left(\frac{x}{R}\right)_{ss} \right\} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon \cos \omega t + \frac{3}{8} \varepsilon^2 \cos^2 \omega t \right) - \left(\frac{\omega R}{2U_\infty}\right) (3.96 \varepsilon \sin \omega t + 1.3 \varepsilon^2 \sin \omega t \cos \omega t) \dots (40)$$

より, はがれ点の移動が求められる. $\varepsilon = 0.5$, $(\omega R)/(2U_\infty) = 0.3$ に対する計算結果を第 5 図に示す. ε^2 の項を省略した場合と含めた場合の両者を図示した. 矢印は時間の経過とともに状態の移る向きを指示する. ε^2 の程度の項は $\omega t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ において零となるので, これらの時刻には両曲線は交わる. $\omega t = \pi/4, 3\pi/4, \dots$ で ε^2 の項の寄与はもっとも大きく, その付近で両曲線の差が大きくなる. それにして差はそれほど小さくなく, ε がこの計算より小さくて, 0.2 程度以下ならば, ε^2 以上を無視してさしつかえないと思われる. 参考のために ε と $(\omega R)/(2U_\infty)$ のいろいろの組合せに対する ε^2 の程度までの計算結果を第 6 図に示した.

5. 結 論

境界層の外側の流れの速度が時間的な平均値を有し, 平均値のまわりに微小振幅で正弦的に変動する場合に, 任意形状の物体のまわりの非圧縮性流体の二次元非定常の層流境界層を計算する一般的な方法について報告した.

まず基礎的な関係として, 速度変動の二次の微小量まで考慮した計算法について述べた. 二次の程度まで考えると, 境界層内部の一点における流速を 1 周期にわたって平均した値は, 変動のない定常境界層の中の, 同じ点における流速と異なってくる. さらに速度変動には第 2 高調波成分が表われる.

次に具体的に非定常境界層を計算する方法として, べき級数解法を提案した. 物体の形は任意であって,

前縁も任意角度のくさび状をしていてさしつかえない. 特殊な場合として, よどみ点も平板形の前縁もこの中に含まれる. 層外速度変動の振幅分布も同様に任意に与えることができる. 解は定常分, 準定常分, 非定常分の和の形で表わされ, それぞれがまた普遍速度分布関数の組合せで与えられる.

円柱のまわりの境界層を計算した. 無限遠の流速が正弦的に変化する場合には一次の程度の準定常速度振幅も, 二次の程度のそれも定常境界層の普遍関数によって簡単な形に表わされる. 速度分布の形や境界層はがれ点の移動を計算した結果から, 層外速度変動の片振幅が平均速度の 50% 程度になっても二次の程度の量の寄与はそれほど小さくなく, 変動振幅が平均速度の 20% 以下ならば, 二次の微小量は無視してさしつかえないと結論した.

本研究を行なうにあたり御懇切なる御指導を賜った名古屋大学 内田茂男教授, 古屋善正教授に心よりお礼申し上げる.

文 献

- (1) 堀, 機械学会論文集, 27, 174 (昭 36-2), 167.
- (2) 堀, 機械学会論文集, 27, 177 (昭 36-5), 564.
- (3) 堀, 機械学会論文集, 27, 177 (昭 36-5), 573.
- (4) M.J. Lighthill, *Proc. Roy. Soc. Lond., Sec. A*, 224 (1954), 1.
- (5) C.C. Lin, *Proc. 9th Inter. Congr. Appl. Mech.*, 4, (1957), 155.
- (6) F.K. Moore & S. Ostrach, *NACA Rep. No. 1325* (1957).
- (7) C.C. Chao, *Master's thesis, Ohio State Univ.*
- (8) H. Görtler, *J. Math. Phys.*, 6, (1957), 1.
- (9) 堀, 機械学会論文集, 27, 180 (昭 36-8), 1176.

討

論

【質問】 (1) 本論文は本質的には文献(5)にある C. C. Lin の用いた方法を非定常流の周波数の低い場合に適用したものである。 ϵ^2 の程度の量を考えるときに重要なのは(39)式下から2行めの定常項であり、これが(40)式に現われないのはいかなる理由か。また第5図の ϵ と ϵ^2 に対応する曲線の平均値(基線)に差があるはずであるが。

(2) 無限遠の流速が(31)式で与えられたとき、層外速度 U_1 が円筒のように slender body でない、ことにはく離を伴う物体の場合 U_0 に比例し、 ϵ^2 の項が層外の流れの中に存在しないなどの事実は証明を要するのではないか。

(3) H. Schuh [Z. Flugwiss., Ht. 5 (1953)] は円筒が急に動き出すときはく離点を Pohlhausen の方法で計算し, Blasius, Goldstein などが出した power series expansion の方法と比較しており、有限項を用いて series expansion の方法によりはく離点を論ずることは危険であるとのべている。本報告の結果を応用するには円筒のはく離点の検討はあまりよい例とは考えられない。

(4) (39)式の上にある“ ω^2 までの計算と ω までの計算との差がない”というのは $\omega x/\nu U_\infty$ のある範囲に限ったことではないだろうか。

(森 康 夫)

【回答】 (1) 本報告のねらいは、第一に非定常境界層に表われる二次の微少量の速度変動の効果を理論的に調べることにあり、第二に一般の形状の物体のまわりの非定常境界層の級数解法を導入することにある。前者については、Lighthill が二次の微少量まで考えれば平均表面摩擦応力変ることをすでに予想している。Lin が実際に計算を行なったことは本報告中にも記し、また御指摘を受けたとおりである。

しかし Lin は変動周波数が非常に高い場合について計算し、境界層方程式中の代表的な項についていえば、 $\partial u/\partial t \gg u(\partial u/\partial x)$ という近似を行なったので、一次の微少量の速度変動はいわゆる shear-wave solution で与えられ、層外速度 $U(x)$ の分布形に無関係に層内速度 u/U は y と t のみの関数となった。これに伴って、二次の微少量の計算も簡単になった。

筆者の場合には Lin とは反対に周波数が低くて、 $\partial u/\partial t \ll u(\partial u/\partial x)$ となるので、高周波域とは異なって shear-wave 形の単純な解法は用いられないことになった。すなわち目的とするところは Lin と同じであるが、周波数域が異なるために、計算方法は全く異なるのである。

次に円柱の境界層はがれ点移動の計算結果についてであるが、(39)式の $(1/2)(1 + \cos 2\omega t)$ は(40)式には変形して $\cos^2 \omega t$ と記してあるので、平均値の変

化分は考慮してあるわけである。それにもかかわらず第5図が上下対称で、はがれの位置が平均的にずれて見えない理由は次のとおりである。まず流速について考えれば(10)式からわかるように、平均値のずれを引起すのは ω^0 の程度の速度分〔準定常、(10)式の $\bar{u}_s$ 〕と ω^2 の程度の速度分〔(10)式の $\bar{u}_w$ 〕等であるから、 ω^1 の程度で打切った本計算では準定常変化のみが平均値のずれに寄与する。さて定常境界層理論によれば、はがれの位置はレイノルズ数には無関係である。準定常流は定常流と同じ状態がずっと実現されて行くものとするのであるから、本報告の $U_0(x) = U_1(x)$ の場合の準定常流は上記のレイノルズ数を変えた定常流に相当し、はがれの移動は起らない。もちろん筆者の第2報におけるごとく、 $U_0(x) \neq U_1(x)$ ならば準定常流でもはがれ点は移動する。第5図のはがれの移動は(39)式の $(-\sin \omega t)$ を含む項と $(1/2) \times (-\sin 2\omega t)$ を含む項の効果によるものである。第5図の計算は近似式(40)によっており、そこでは表面摩擦応力の定常分と準定常分の (x/R) による変化を直線で近似し、非定常分は一定としたので、第5図は完全に上下対称となった。しかし細かくいえば(39)式を直接解かねばならず、この場合は第5図が若干、上下非対称になるが、非対称分は図の線の太さよりも小さく、実際上は問題にならない。

(2) はがれを伴う流れの場合に境界層外縁の速度 U が単純に U_∞ に比例するかどうか、もちろん議論の余地がある。むしろ、主流変動→はがれ流の変化→主流への反作用といった過程こそ、もっとも興味のある問題である。しかし、これはあまりにも複雑で、未知の要素が多いので、本報告ではもっとも簡単に、反作用のない場合を計算した。しかし一般論としては境界層理論のわくの中で考える限り、反作用も含めて層外の流れは(1)式で与えられるとすれば問題は解けているわけである。もう一つの主流への反作用の因子として、境界層の排除効果が考えられる。しかし、これは次の理由で無視できる。境界層の平均の厚さは、レイノルズ数を R_0 、物体の代表長さを l とすれば、 $l/\sqrt{R_0}$ の程度で、非定常効果による厚さの変化率は ϵ の程度である。したがって厚さの変化の代表長さに対する比は $\epsilon/\sqrt{R_0}$ の程度で、 R_0 で大きければ主流への反作用は無視できる(ϵ^2 の程度よりもっと小さい)。ただし、平板の境界層の前縁付近の流れは代表長さに前縁からの距離をとり、したがって R_0 が小さいので上記の議論は成り立たない。この場合は Carrier と DiPrima のような特別の計算方法を用いるべきであろう。

(3) 御指摘のとおりである。 $\omega P^2 U_\infty < 0.3$ である。本文中に脚注として付記する。