621.515-154 : 532.595

多段軸流圧縮機のサージング限界について*

(第 1 報, サージング点の計算法)

竹 矢 一 雄**

Studies on the Limits of Surging in Multi-Stage
Axial-Flow Compressor

(1st Report, Methods for Calculating the Surging Points)

by Kazuo TAKEYA

The limit of surging in a multi-stage axial-flow compressor cannot be definitely determined merely from the overall characteristic curve alone. This is attributed to the reason that the internal inertance and capacitance play an important role in the multi-stage axial-flow compressor. In this report, the appearing point of surging in case of involving a system of duct is obtained on the basis of the static characteristics of an axial-flow compressor, by the following two methods.

- 1) An approximate estimation from the respective inertances and capacitances, when a multi-stage axial-flow compressor is regarded to be able to be divided into three parts.
- 2) A strict solution when a multi-stage axial-flow compressor is assumed to have a continuous capacitance distributed along the axial direction.

1. 緒 言

送風機あるいはポンプのサージングについてはすでに多くの理論的研究^{(1)~(3)}が発表されているが、それらは一般に送風機あるいはポンプの容量に比しダクトの容量がはるかに大きい場合が取扱われている。そこで、これらの場合には送風機あるいはポンプの容量は無視されうるので、これらの部分では慣性および抵抗(特性曲線の傾斜)だけを考え、振動方程式を導入している。その結果サージング開始点は必ず特性曲線の傾斜($R = -dp/dG$)が $R \leq 0$ の範囲でなければならないことになる。この結論は単段の送風機あるいはポンプでは多くの実験によりその妥当なことが確認されている。

以上に述べたのは単段の送風機あるいはポンプの場合であり、多段の軸流圧縮機の場合にも上記の結論をそのまま流用することは問題があるようである。そこで次に一つの管路系に二つあるいはそれ以上の送風機またはポンプを直列につないだ場合について検討する。ポンプの直列運転の場合のサージング現象につい

ては理論的⁽⁴⁾および実験的⁽⁵⁾に取扱った報告があり、ポンプの間に水そうなどを含まない形(容量項のない場合)についてはサージング特性は流体が非圧縮性と考えられるので、個々のポンプの特性曲線の代数和で表わした全体特性曲線によって代表される単一のポンプの場合と同様であることが示されている。ところが送風機の場合には上記のポンプの場合と異なり、流体の圧縮性が影響するので総合特性で代表することはできないようである。送風機の直列運転におけるサージングを取扱った実験的研究⁽⁶⁾では“送風機の直列運転の際のサージング現象は総合流量揚程曲線の形からはその生起の条件などを論ずることはできず、送風機の管路系における位置と個々の送風機の特性和を同時に考慮して取扱わねばならない”と述べられている。

多段軸流圧縮機は圧縮機の各段がそれぞれ独立の送風機を構成しているので、送風機の直列運転と類似のサージング現象が現われるであろうことは容易に推察される。すなわち圧縮機出口の特性曲線(出口圧力～流量)によってはサージング限界は定まらないことが推定される。

われわれが日本ジェットエンジン会社で試作した“J-3 ジェットエンジン”用軸流圧縮機の経験では、特に高回転時においては圧縮機出口の特性曲線の傾斜

* 昭和 35 年 6 月 30 日 第 681 回講演会において講演、原稿受付 昭和 36 年 6 月 9 日。

** 正員、新三菱重工業会社神戸造船所(神戸市兵庫区和田崎町 3 丁目)。

は十分負のまま($R > 0$)でサージングにはいることが認められた(実際の運転ではサージングにはいると急激に圧力は低下するが、これは同時に回転数も急激に低下することに帰因するものと考えられる。また回転数はほぼ一定に保ってもサージング点で見掛けの特性曲線は折れる場合がある。甲藤の研究⁽³⁾でも“送風機を何らかの方法でサージングを起さない状態で得た「静特性曲線」と「見掛けの特性曲線」は一般に一致せず、静特性を基礎に解析した理論結果は実験結果とよく合う”ことが示されている。ここでもサージング点近傍での特性曲線は静特性を指すもので、静特性は不連続的に折れ曲らないとして、非サージ域の特性を延長して推定した)。

このように特性曲線の傾斜が負のままでサージングにはいった理由としては燃焼器(吐出し管に相当する)の容量が圧縮機の容量に比してあまり大きくないので、圧縮機の容量が無視できないことによるものと思われる。この場合圧縮機は中間にそれぞれ容量を含んだ多くの送風機を直列運転した場合に相当し、それぞれの段における特性がサージングを支配しているものと考えられる。サージング点近傍の各段特性を計測した結果によると、全体の総合特性の傾斜は負であるが、後段では傾斜は正($R < 0$)になって失速域で動作していることが認められた。この場合には後段の失速によってサージングが発生したものと推定される。

以上の結果からも多段軸流圧縮機のサージング点は出口の特性曲線だけでは決定できないことが明らかであり、各段の特性曲線および慣性、容量がサージングに対し重要な位置を占めているものと考えられる。

本報は第1報において上述の観点から段特性を用いて軸流圧縮機のサージング点の計算法を述べる。第2報では第1報の計算を最も簡略化した状態で、回転数の異なった場合のサージング条件の変化を調べ、サージング線の定性的傾向とその発生原因を追究する。

第1報では多段軸流圧縮機のサージング開始点を、多段軸流圧縮機を構成する各段の静特性を用いて算出する方法を述べる。

近似的に多段軸流圧縮機を数個(本計算では3個)に分割し、各分割群をそれぞれ単一の圧縮機と考えると、分割個数に相当する圧縮機の直列運転とみなしうる。このように取扱うと各分割群間には容量が含まれるので各群の特性曲線の傾斜および慣性、容量と吐出し管の慣性、容量の組合せによってサージング開始点は決定される。

この方法は分割数が少ない(二つあるいは三つ)場

合には比較的簡単に結果が得られるが、分割数を増すと加速度的に計算手数が増大し実用的でなくなる。したがって比較的少ない分割数でしかも精度が確保されなければこの近似は意味がない。また分割位置の選択およびそれぞれの群に対応する慣性の選び方もあまり明確ではない。

そこで比較的厳密解と考えられる計算法によるものと対比させて、この方法でもある程度定量的にサージング開始点が求まることを確認した。

厳密解としては軸流圧縮機の各段の静特性を用い、各段の内部では圧力は連続的に変化するものと仮定して取扱った。この方法では容量および慣性も合理的に導入され、また音速(振動波の伝ば速度)の軸方向位置による変化も含まれるので、静特性の一次元的取扱い(半径方向の変化を無視し平均値で代表する)による誤差(たとえば内径あるいは外径部に局部的に発生する旋回失速の影響等)を除いては十分正確であると考えられる。

この厳密解と近似計算の結果は数値計算により比較的よく一致することが認められた。

2. サージング点の計算法(A)

多段軸流圧縮機のサージング現象に対する考え方として、圧縮比の少ない圧縮機を直列運転した場合について取扱うことは、全体特性と相似の特性をもった単独の圧縮機として取扱うよりも実際的であることは明白である。直列運転の圧縮機数としては多段軸流圧縮機を一段ごとに分割するのが理想的であるが、これでは圧縮機段数の多い場合には計算が非常に煩雑となり実用的でない。

逆に分割数を少なくすると計算は簡単になるが、それぞれの分割群の内部でやはり多段圧縮機と単段圧縮機の相違が現われ誤差が増してくる。最小分割数は2であるが、この場合でも単独性能から求めたものとはサージングの性格が大幅に異なり、定性的に多段軸流圧縮機に特有のサージング線の傾向が認められる(詳細は第2報に述べる)。

本報では3分割(分割段数の割合は任意)の場合について述べる。4分割あるいはそれ以上の場合も全く同様にして計算可能である。

サージング現象の振動学的定義は送風機あるいはポンプの場合と全く同様であると考えられるので、その取扱いは藤井⁽¹⁾、H. Pearson⁽²⁾、甲藤⁽³⁾らのものと同様とする。ただし圧縮性流体として取扱わねばならないので係数の選び方はH. Pearson⁽²⁾によった。

慣性, 抵抗, 容量を表わす係数はそれぞれ

$$\text{慣性係数 } L = \frac{p}{dG/dt} = \frac{l}{gA} \quad \text{s}^2/\text{m}^2$$

$$\text{抵抗係数 } R = -\frac{dp}{dG} \quad \text{s/m}^2$$

$$\text{容量係数 } C = \frac{dQ}{dp} = \frac{1}{k} \frac{Al}{RT} \quad \text{m}^2$$

ここで p : 圧力上昇 kg/m^2 , G : 流量 kg/s , t : 時間 s , l : 長さ m , g : 重力加速度 m/s^2 , A : 断面積 m^2 , Q : 空気量 kg , k : 断熱指数, R : ガス定数, T : 温度 $^\circ\text{K}$

L, R, C を用いてこの回路を図示すると第 1 図のようになる。

第 1 図で R_1, R_2, R_3 は前段, 中段, 後段の特性。

L_1, L_2, L_{3a}, L_{3b} は前段, 中段, 後段および吐出し管 (燃焼器) の慣性。

C_1, C_2, C_3 は (前中段), (中後段), (吐出し管) の容量とする。また R_1, R_2, R_3 を通過する微小変動流量を W_1, W_2, W_3 とする。サージングの現象をこのような等価回路で置換することについて, 甲藤⁽⁸⁾の研究でも

第 1 図 振動系等価回路

「慣性」および「容量」が正確にはあくされれば実験値とかなりよく一致することが示されている。

多段軸流圧縮機では「慣性」および「容量」を正確に求めることは困難であるので, 各分割ごとに内部の平均値を使用することにする。

「慣性」については圧縮機内では流線が旋回しているので見掛けの長さ (軸方向長さ) を用いることは実際的でなく, 流線の平均旋回方向に測った長さを用いるのがより妥当であると思われる。これについては甲藤⁽⁸⁾の実験で通風機の慣性は二重管として計算したものの 1.7 倍になっていることから推測される。

上記の等価回路の振動方程式は

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{d^2 W_1}{dt^2} + R_1 \frac{dW_1}{dt} + \frac{W_1 - W_2}{C_1} &= 0 \\ L_2 \frac{d^2 W_2}{dt^2} + R_2 \frac{dW_2}{dt} - \frac{W_1 - W_2}{C_1} + \frac{W_2 - W_3}{C_2} &= 0 \\ L_3 \frac{d^2 W_3}{dt^2} + R_3 \frac{dW_3}{dt} - \frac{W_2 - W_3}{C_2} + \frac{W_3}{C_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

(1) 式で W_1, W_2, W_3 は時間的に変動する量であるから $W_1 = A_1 e^{\lambda t}$, $W_2 = A_2 e^{\lambda t}$, $W_3 = A_3 e^{\lambda t}$ とおいて特性方程式を求め, A_1, A_2, A_3 を消去すると,

$$\begin{vmatrix} \left(L_1 \lambda^2 + R_1 \lambda + \frac{1}{C_1} \right) & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & \left(L_2 \lambda^2 + R_2 \lambda + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & \left(L_3 \lambda^2 + R_3 \lambda + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

(2) 式を解くと

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^5 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ここで $a_0 \sim a_6$ は

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= L_1 L_2 L_3 \\ a_1 &= L_1 L_2 R_3 + L_1 L_3 R_2 + L_2 L_3 R_1 \\ a_2 &= L_1 L_2 \left\{ \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right\} + L_1 L_3 \left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right\} + \frac{L_2 L_3}{C_1} + L_1 R_2 R_3 + L_2 R_1 R_3 + L_3 R_1 R_2 \\ a_3 &= \left\{ (L_1 + L_2) R_3 + L_3 (R_1 + R_2) \right\} \frac{1}{C_1} + \left\{ (L_2 + L_3) R_1 + L_1 (R_2 + R_3) \right\} \frac{1}{C_2} + \left\{ L_1 R_2 + L_2 R_1 \right\} \frac{1}{C_3} + R_1 R_2 R_3 \\ a_4 &= \left\{ L_1 + L_2 + L_3 \right\} \frac{1}{C_1 C_2} + \left\{ L_1 + L_2 \right\} \frac{1}{C_1 C_3} + \frac{L_1}{C_2 C_3} + R_1 R_2 \left\{ \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right\} + R_1 R_3 \left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right\} + \frac{R_2 R_3}{C_1} \\ a_5 &= \left\{ R_1 + R_2 + R_3 \right\} \frac{1}{C_1 C_2} + \left\{ R_1 + R_2 \right\} \frac{1}{C_1 C_3} + \frac{R_1}{C_2 C_3} \\ a_6 &= \frac{1}{C_1 C_2 C_3} \end{aligned} \right.$$

(3) 式は λ に関する六次式であり、これから λ を求めるのは容易でないが、いまこの振動系が安定 (非サージング域) か不安定 (サージング域) かを判別するには λ の根は必要でなく、 λ (一般に複素数) の実数部の正負を知ればよい。 λ の実数部がすべて負であれば $e^{\lambda t}$ は時間とともに減衰するので安定である。また λ の実数部の内一つでも正になれば振動は発散し不安定になる。したがってサージング開始点は λ の実数部の内最も大きいものが 0 になり他は負である点ということになる。

一般に n 次式を

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

において、 a_0 は正とすると、この n 次式の根の実数部が全部負であるためには Hurwitz の判定条件が用いられる。

Hurwitz の判定条件

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \cdots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

上記の n 個の不等式が成立すればよい。ただし、ここで $\nu > n$ である a_ν はすべて 0 と置く。

(3) 式は Hurwitz の条件から安定であるためには

$$\left. \begin{aligned} f_1 \cdots a_1 &> 0 \\ f_2 \cdots a_1 a_2 - a_0 a_3 &> 0 \\ f_3 \cdots a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 &> 0 \\ f_4 \cdots a_1 a_2 a_3 a_4 - a_0 a_1 a_3 a_6 - a_0 a_2 a_3 a_5 &> 0 \\ f_5 \cdots a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 &> 0 \\ f_6 \cdots a_6 &> 0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (4)$$

サージング点の計算は各段の静特性 (無次元) に回転数を固定し流量を任意に入れて逐次計算を行なうと各段の圧力、温度が得られる。流量を変えて計算を行なうと回転数一定の特性曲線が求まる。そこで分割位置を適当に選べば L, R, C がそれぞれ求まる。(4) 式の $f_1 \sim f_6$ は L, R, C だけの関数であるから $f_1 \sim f_6$ はただちに求まり、任意の流量での安定、不安定が判別でき、流量を変えてサージング開始点を求める。

上述の計算法は軸流圧縮機を三群に分割した場合についてのものであるが、一般的に n 分割した場合には、それぞれの慣性係数、抵抗係数、容量係数を、 $L_i, R_i, C_i, i=1 \sim n$ とすると、

(2) 式から振動方程式は

$$\left(L_1 \lambda^2 + R_1 \lambda + \frac{1}{C_1} \right) \left(L_2 \lambda^2 + R_2 \lambda + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \times \cdots \times \left(L_i \lambda^2 + R_i \lambda + \frac{1}{C_{i-1}} + \frac{1}{C_i} \right) \\ \times \cdots \times \left(L_{n-1} \lambda^2 + R_{n-1} \lambda + \frac{1}{C_{n-2}} + \frac{1}{C_{n-1}} \right) \left(L_n \lambda^2 + R_n \lambda + \frac{1}{C_{n-1}} + \frac{1}{C_n} \right) = 0$$

となり、これを λ について整理すると

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} \lambda + a_{2n} = 0 \cdots \cdots \cdots (3)'$$

(3)' 式は (3) 式の一般式である。

そこで Hurwitz の判定条件により $2n$ 個の不等式から振動系の安定、不安定が判別され、サージング開始点が求められる。

このようにすれば多段軸流圧縮機の各段特性を用いて計算可能になるが、実際に数値計算を行なうには非常に手間がかかり実用的でない。しかしながら高性能のアナログコンピュータを使用すれば割合容易に解がえられる。

3. サージング点の計算法 (B)

多段軸流圧縮機のサージング点を正確に求めるには各段の特性をできるだけ忠実に追跡することが必要である。

多段軸流圧縮機を直列の圧縮機群に分割する方法は先に述べたが、この場合にも各段で分割して取扱うのが最も望ましいことは明白である。ただし前述の方法では分割数を増すごとにその 2 倍の次数だけ高次になるので、Hurwitz の判別式を計算する手数は加速度的に増大し実用的でない。

そこで圧縮機の各段での圧力変化を軸方向に連続的に行なわれるものと仮定すると、これは分布容量と考えられる。

実際の軸流圧縮機では半径方向に反動度は異なり、またサージング点付近では半径方向に圧力上昇も一様ではないが、半径方向の変化を考えると取扱いが非常に困難になるので、各段ではそれぞれ平均径で代表し、流体の状態量は軸方向に一次的に変化するものと仮定する。

基礎式としては一次元の運動の式と、連続の式を用いる。

運動の式

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_f}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで u : 軸方向速度, x : 軸方向長さ, ρ : 密度, p : 圧力

p_f は圧縮機での圧力上昇を表す。各段内では直線的に圧力は上昇するものとして $\partial p_f / \partial x = \Delta p_f / \Delta x$ とする。 Δp_f は各段での圧力上昇, Δx は段間の軸距離、圧縮機の圧力上昇は段によって異なるが、特定の段でも軸流速 (流量) によって変化する (静特性に従って変動する) ので $1/\rho \cdot \partial p_f / \partial x = f(x, u)$ で表わされる。

(5) 式の左辺は

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{一次元})$$

であるが、前項でも述べたように軸流圧縮機内部の慣性は流線が旋回しているので、羽根の間の通路では慣性が増す。静翼または動翼の平均相対流の軸となす角を β 、平均相対速度を w 、翼弦長を l とすると、羽根の間では (5) 式は

$$\rho \frac{Dw}{Dt} l = -\Delta p + \Delta p_f$$

となり、ここで $w \cos \beta = u$ から

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_f}{\partial x}$$

羽根のないところでは (5) 式のとおりである。そこで羽根のある部分とない部分との割合を考慮して、等価の平均流のなす角を β とすると近似的に

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_f}{\partial x}$$

が全流線域にわたって成立する。

これを書きかえると

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\cos^2 \beta} u \frac{\partial u}{\partial x} - f(x, u) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式は圧縮機内部および吐出し管 (燃焼器) で常に成立する。ただし吐出し管では損失がなければ $f(x, u) = 0$ である。また燃焼器内で連続的に温度が変化している場合でも、 u, ρ がその点の値を示していれば成立する。

連続の式

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial x} (\rho A u) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで A : 断面積,

(7) 式から

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} u = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

(6), (8) 式で u, ρ, p は時間的に変動する量であるから、これを定常項と非定常項に分け

$$u = u_0 + u', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p'$$

とする (0 は定常項, $'$ は非定常項)。

(6) 式を時間 t で微分し、時間変動は微小であるとして、非定常一次の項だけをとり、

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{\partial^2 (u_0 u')}{\partial x \cdot \partial t} - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで $\sigma = \ln \rho$ とおくと $\partial \sigma = \partial \rho / \rho$, また $\sigma = \sigma_0 + \sigma'$

次に音速 $a = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ を用いて $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$ を整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) = a^2 \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial x \cdot \partial t}$$

(音速の時間変動は無視する)

(9) 式に上の関係を入れると

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0 \frac{\partial u'}{\partial t} \right) - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial x \cdot \partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

同様に (8) 式の非定常一次の項をとると

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} u' + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} u' + u_0 \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

(10), (11) 式は時間関数 u' , σ' を含む連立微分方程式である。同時に u' , σ' は位置 (x) の関数でもある。そこで

$$u' = \xi(x)e^{\lambda t}, \quad \sigma' = \eta(x)e^{\lambda t}$$

とかくことができる。

(10), (11) 式の特性方程式は (10) 式から

$$\lambda \xi + \left(\frac{du_0}{dx} - \cos^2 \beta \frac{\partial f}{\partial u} \right) \xi + u_0 \frac{d\xi}{dx} + \cos^2 \beta \cdot a^2 \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad (12)$$

(11) 式から

$$\lambda \eta + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{d\sigma_0}{dx} \right) \xi + \frac{d\xi}{dx} + u_0 \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad (13)$$

(12), (13) 式で β , A は x に対して固有であり, u_0 , σ_0 , a^2 , $\partial f / \partial u$ も静特性から求めた性能計算により, 回転数, 流量を任意に選べば x に関して既知の値である。

(12), (13) 式から $d\eta/dx$ を消去すると

$$\eta = F_3(x)\xi + \frac{1}{\lambda} F_4(x)\xi + \frac{1}{\lambda} F_5 \frac{d\xi}{dx} \quad (14)$$

$$\text{ここで } F_1(x) = \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{d\sigma_0}{dx}, \quad F_2(x) = \frac{du_0}{dx} - \cos^2 \beta \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$F_3(x) = \frac{u_0}{\cos^2 \beta \cdot a^2}, \quad F_4(x) = F_3 \cdot F_2 - F_1, \quad F_5(x) = u_0 F_3 - 1$$

次に (14) 式を x で微分し (12) 式とからふたたび $d\eta/dx$ を消去すると,

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \{G_1 \lambda + G_2\} \frac{d\xi}{dx} + \{G_3 \lambda^2 + G_4 \lambda + G_5\} \xi = 0 \quad (15)$$

$$\text{ここで } G_1(x) = 2F_3/F_5, \quad G_2(x) = \left\{ F_4 + \frac{dF_5}{dx} \right\} / F_5, \quad G_3(x) = F_3/u_0 F_5$$

$$G_4(x) = \left\{ \frac{F_2 F_3}{u_0} + \frac{dF_3}{dx} \right\} / F_5, \quad G_5(x) = \frac{dF_3}{dx} / F_5$$

(15) 式は ξ に関する二階の常微分方程式であり, 二つの条件が得られればとける。

この場合の条件としては, この系の入口および出口での境界条件を考え, 境界値問題として解くことができる。その場合に λ は固有値となり, 直接求めることはできないが, λ を任意に選んで境界条件を満足する値をさがすことにより決定される。

境界条件 入口の境界条件として, 圧縮機入口が大気開放しているとする, 圧力 (密度) の時間変動はないと考えられる。

出口の境界条件は圧縮機の圧力がある程度以上高い場合 (多段軸流圧縮機を対象としている) には, 吐出し管の絞り弁 (ジェットエンジンあるいはガスタービンではタービンノズル) で速度が音速になると考えられる。

そこで上記の二つをこの振動系の両端での境界条件に選ぶことは一般的であり, 妥当であると思われる。

入口の条件から $x=0$ (入口) で

$$p'(0) = 0, \quad \rho'(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 0$$

$\sigma'(0) = \eta(0)e^{\lambda t}$ で λ に無関係に $\sigma'(0) = 0$ であるためには $\eta(0) = 0$ でなければならない。

(14) 式から $x=0$ において

$$\left(\frac{d\xi}{dx} \right)_0 + \left\{ \left(\frac{F_3}{F_5} \right)_0 \lambda + \left(\frac{F_4}{F_5} \right)_0 \right\} \xi_0 = 0 \quad (16)$$

出口の条件から $x=l$ (出口) で

$$u_l = \cos \beta_l \cdot a_l$$

ここで β_l はタービンノズルの流出角, u_l はそのときの軸流速度である。

$$\text{音速 } a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} \text{ とおくと}$$

$$u_l^2 = \cos^2 \beta_l \cdot k \frac{p_l}{\rho_l} \quad (17)$$

(17) 式はタービンノズルでチェックしている場合の軸流速度と, ノズル角, 圧力, 密度の関係式である。

(17) 式の対数をとって微分すると

$$2 \left(\frac{du}{u} \right)_l = \left(\frac{dp}{p} \right)_l - \left(\frac{d\rho}{\rho} \right)_l \quad (18)$$

完全ガスと仮定すると

$$\frac{p}{\rho^k} = \exp \left[\frac{S}{c_v} \right]$$

これを S (エントロピ) 一定のもとで微分する

$$\frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho} \quad (19)$$

(18) 式に (19) 式の関係を入れると

$$\left(\frac{d\rho}{\rho} \right)_l = \frac{2}{k-1} \left(\frac{du}{u} \right)_l \quad (20)$$

連続の式 (8) は常に成立するので $x=l$ において (8) 式に (20) 式を代入し, これを定常項と非定常項に分け, 非定常一次の項だけをとると

$$\frac{2}{k-1} \left(\frac{1}{u_0} \frac{\partial u'}{\partial t} \right)_l + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} u' \right)_l + \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)_l + \frac{2}{k-1} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)_l = 0 \dots\dots\dots (21)$$

(21) 式の時間関数 u' を前同様 $u' = \xi(x)e^{\lambda t}$ とおく.

(21) 式から

$$\left(\frac{d\xi}{dx} \right)_l + \left\{ \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)_l + \frac{2}{k+1} \frac{1}{u_{0l}} \lambda \right\} \xi_l = 0 \dots\dots\dots (22)$$

(16) および (22) 式によって両端の境界条件が定まったので (15) 式は解ける.

数値計算法 軸流圧縮機の任意の作動状態で,

(15) 式を (16), (22) 式の境界条件を満足するようにとけば λ がえられる (λ は一般に複素数で $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ とする).

(15) 式から

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_r}{dx^2} + G_2 \frac{d\xi_r}{dx} - G_1 \lambda_i \frac{d\xi_i}{dx} + \{-G_3 \lambda_i^2 + G_5\} \xi_r - G_4 \lambda_i \xi_i &= 0 \\ \frac{d^2 \xi_i}{dx^2} + G_2 \frac{d\xi_i}{dx} + G_1 \lambda_i \frac{d\xi_r}{dx} + \{-G_3 \lambda_i^2 + G_5\} \xi_i + G_4 \lambda_i \xi_r &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

(16) 式から

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\xi_r}{dx} \right)_0 + \left(\frac{F_4}{F_5} \right)_0 \xi_{r0} - \left(\frac{F_3}{F_5} \right)_0 \lambda_i \xi_{i0} &= 0 \\ \left(\frac{d\xi_i}{dx} \right)_0 + \left(\frac{F_4}{F_5} \right)_0 \xi_{i0} + \left(\frac{F_3}{F_5} \right)_0 \lambda_i \xi_{r0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

(22) 式から

$$\left. \begin{aligned} X_r &\equiv \left(\frac{d\xi_r}{dx} \right)_l + \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)_l \xi_{rl} - \frac{2}{k+1} \frac{1}{u_{0l}} \lambda_i \xi_{il} = 0 \\ X_i &\equiv \left(\frac{d\xi_i}{dx} \right)_l + \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)_l \xi_{il} + \frac{2}{k+1} \frac{1}{u_{0l}} \lambda_i \xi_{rl} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

数値計算の順序としては任意の作動点 (回転数, 流量) で静特性から性能計算を行なう. $F_1(x) \sim F_5(x)$, $G_1(x) \sim G_5(x)$ はそれぞれの断面 (x の位置) で求まる (計算例では, 圧縮機部は各段間を, また入口部, 出口部, 燃焼器部は適当な間隔で分割した).

λ_i を任意に仮定し, ξ_{r0} , ξ_{i0} に単位量を入れると, (24) 式から $(d\xi_r/dx)_0$, $(d\xi_i/dx)_0$ を得る.

これを (23) 式に代入すると $(d^2 \xi_r/dx^2)_0$, $(d^2 \xi_i/dx^2)_0$ が求まる.

次に断面の位置 $x=x_1$ においては, $\Delta x = x_1 - x_0$ とすると

$$\begin{aligned} \xi_{r1} &\equiv \xi_{r0} + (d\xi_r/dx)_0 \Delta x_1 \\ \xi_{i1} &\equiv \xi_{i0} + (d\xi_i/dx)_0 \Delta x_1 \\ (d\xi_r/dx)_1 &\equiv (d\xi_r/dx)_0 + (d^2 \xi_r/dx^2)_0 \Delta x_1 \\ (d\xi_i/dx)_1 &\equiv (d\xi_i/dx)_0 + (d^2 \xi_i/dx^2)_0 \Delta x_1 \end{aligned}$$

から ξ_{r1} , ξ_{i1} , $(d\xi_r/dx)_1$, $(d\xi_i/dx)_1$ が求まり, これを (23) 式に代入して $(d^2 \xi_r/dx^2)_1$, $(d^2 \xi_i/dx^2)_1$ をうる.

以下同様に繰返し計算を行ない, $x=l$ において ξ_{rl} , ξ_{il} , $(d\xi_r/dx)_l$, $(d\xi_i/dx)_l$ をうる.

これを (25) 式に代入して X_r , X_i を求める.

X_r , X_i は一般に 0 にはならない. そこで λ_i の値を変えて同様の計算を行ない, λ_i と X_r , X_i の関係を求める. X_r , X_i はそれぞれ λ_i とともに変化し,

$+i\lambda_i$ となる).

しかしながら, 実際問題としてこの計算式を解くのは簡単ではないし, 必要としているのはサージング開始点である. またサージング域においては, 微小変動として取扱った (15) 式は無意味になる.

サージング開始点は λ の実数部が 0 ($\lambda_r=0$) と定義している (前項と同様).

そこで計算の便宜上 λ は常に純虚数 $\lambda = i\lambda_i$ として取扱うことにする.

任意の作動点で $\lambda = i\lambda_i$ として計算すると, その点がちょうどサージング開始点でなければ境界条件は満足されない. 流量を変えて計算し境界条件を満足する点を求めれば, その点がサージング開始点である.

$\xi(x)$ も複素数であるから $\xi = \xi_r + i\xi_i$ として実数部と虚数部に分ける ($\lambda = i\lambda_i$ とする).

第2図 特性曲線とサージング点

$$X_r = 0 \cdots \lambda_i = \omega_r$$

$$X_i = 0 \cdots \lambda_i = \omega_i$$

すなわち $\lambda_i = \omega_r$ で $X_r = 0$ となる。同様に $\lambda_i = \omega_i$ で $X_i = 0$ となる。ここで ω_r と ω_i は一般には一致しない(ちょうどサージング開始の流量点では一致する)。

次に作動点(流量)を変えて同様に ω_r, ω_i を求めると流量 G_a と ω_r, ω_i の関係がえられ、 $\omega_r = \omega_i$ になる点が定まる。この流量点がサージング開始点である。また $\omega_* \equiv \omega_r = \omega_i$ に相当する円振動数 ω_* がそのときのサージング振動数を表わす。

なお(6), (7)式は双曲線形の微分方程式になり、微小変動で線形化しなくても特性曲線法により図式的に解くことができ、サージングを起しているときの有限の振幅なども求められる。しかし計算は非常に手間がかかり、とくにサージング開始点を求めるのには不便である。

4. 計 算 例

前述のサージング点の計算法(A), (B)によって数値計算を行なった。

計算例としてはジェットエンジンの場合につき8段の軸流圧縮機について行なった。

計算に使用した各段の数値、特性は、日本ジェットエンジン会社のJ3-C形に合わせた。

この計算では特に高回転域で総合特性曲線の傾斜が負のままでサージングにはいるかどうかを確かめることを主眼にしたので、高回転範囲についてだけ数値計算を実施した(全体のサージング特性については第2

報に述べる)。

第2図は設計回転数($N/N_* = 100\%$)および106.5%での出口特性曲線を示す。横軸は流量、縦軸は出口圧力をとっている。

図中(A), (B)で示されている点はそれぞれサージング開始点を(A), (B)によって求めたものである。

ただし(B)による計算は106.5%の場合だけである。(B)の計算は複雑なため、数値計算は電子計算機IBM-650を使用した。

106.5%における(A), (B)の計算結果は比較的良好に合っていると思われる。

いずれの場合でも高回転時には、サージング点は特性曲線の傾斜が負の部分に存在することが確認された。

5. 結 論

多段軸流圧縮機のサージングは総合特性曲線とは無関係に、個々の段特性によって支配されると推測され、実験的にもある程度この事実を裏書きする現象が認められるが、本報に述べたサージング点の計算法により理論的にこれを立証した。

また多段軸流圧縮機を少数の群に分割した簡単な近似計算結果と、比較的厳密解と考えられる分布容量の計算結果との間により一致を見た。したがって多段軸流圧縮機を分割して取扱う簡単な方法でも、サージング現象の大略の傾向を求めることは可能であると考えられる。

サージング開始点の計算精度は、計算法(B)によればかなりの程度まで期待できるであろう。ただしこの場合も各段の「静特性」の精度によって左右される。したがって非サージング域での予想性能と実測性能の誤差範囲以上の精度は期待できない。

なお多段軸流圧縮機の高回転におけるサージングは、実験資料が乏しく計算値と数値的な対比はできていない。

文 献

- (1) 藤井, 機械学会論文集, 13, 44 (昭 22-5), 185, 192.
- (2) H. Pearson & T. Bowmer, *Aeron. Quarterly*, 1 (1949), 195.
- (3) 甲藤, 機械学会論文集, 26, 162 (昭 35-2), 256, 265.
- (4) 草間, 機械学会論文集, 21, 105 (昭 30), 350.
- (5) 草間, 辻, 木口, 機械学会論文集, 21, 105 (昭 30), 355.
- (6) 伊藤, 機械学会論文集, 26, 162 (昭 35-2), 283.