531. 717. 082. 36 : 532. 525

半径流ノズルに関する研究*

(第1報, 外向き流れの理論的解析)

萩 原 辰 弥**

Studies on the Characteristics of Radial-Flow Nozzles

(1st Report, Theoretical Analysis of Outward Flow)

by Tatsuya HAGIWARA

In connection with pneumatic micrometers, the outward flow characteristics of narrowly spaced radial-flow nozzles are studied with analytical methods. Assuming that fluid is incompressible and the velocity distribution in a boundary layer is parabolic, the momentum equation of a laminar boundary layer is solved approximately. Thus it becomes possible to calculate theoretically the inlet length, the velocity distribution in the clearance, the pressures at various radii or the pressure loss of any nozzle. As a corresponding value to Reynolds number, in this case, $R = Vh^2/\nu r_1$, should be used, where h is a breadth of a clearance, r_1 is the inner radius of a nozzle and V is a radial mean velocity at r_1 . Then profiles of pressure and velocity distributions are determined by R only.

1. 緒 言

空気マイクロメータは性能がよい上に構造が簡単であるので、いろいろな方面で数多く用いられている精密測定用計器である。その特性を左右するおもな要素は、使用する空気源の圧力を別にすれば、内部固定絞りと測定ノズルである。前者は流量測定用オリフィス板あるいはこれに類似の装置を用いているので、その特性は数多くの研究によってほぼ明らかにされている。後者は一種の半径流ノズルであるが、これに関する研究は比較的少なく、ノズル内の流れの機構は十分にはわかっていない。

本研究は低圧式空気マイクロメータの静特性を明らかにすることを予期して行なわれたもので、解析はその線に沿った条件のもとで進められた。測定ノズルでは第1図に示すように、中央の円管を通ってきた流体が、この管に直角に保たれている平行な二つの円板でかぎられたすきま内を放射状に広がり流れる。一般に中央円管の内径および流体が半径方向に流れる距離に比べてすきまの幅はきわめて小さい。また測定感度をよくするため、内部絞りの穴径を中央円管の径に比べて小さくするのが一般の設計である。したがって、ノズルを通る流体はすきまを満たして流れるが、その量

は比較的少なく、流れは層流であると考えられる。このような条件の半径流ノズルでは、半径流れのはじまるところで流速はすきまの断面にわたってほとんど均一に保たれる。すなわち、ノズルの入口で実際には境界層がわずかながら存在するだろうが、その厚さは0としてさしつかえないほど小さいであろう。流れが進むにしたがって境界層はしだいに発達し、ついにはすきまを満たすようになる。ここまですきまを満たすようになると、それ以後はすきま断面に関する速度分布の形が相似形に保たれているものとする。このような流れの機構が存在すると考えられるノズルにおける圧力流量特性を求めるのが本研究の目的である。

一般の半径流ノズルに関する理論的研究はわずかであるが発表されている。しかしこれらは、あらかじめその結果を適用しようと考えている応用面が異なるので、それぞれ異なった条件で解析が行なわれている。たとえば、Dienesらの研究⁽¹⁾はすきまの幅が時間とともに徐々に変化する場合を取扱っているが、この研究は可塑性計(plastometer)に関するもので流体の粘性だけに着目してすすめられた。Benedikt⁽²⁾はすきまが広くかつ完全流体を対象としている。水を対象として行なわれた鈴木⁽³⁾の2枚円板の研究は乱流範囲を予想している。沖の円形弁に関する一連の研究⁽⁴⁾は半径流れ部が短く、かつすきまが比較的大きな場合を取扱っている。このような条件では半径流れの特性が全体

* 昭和31年11月15日 岡山臨時大会講演会において講演、原稿受付 昭和36年6月21日。

** 正員、明治大学工学部(東京都千代田区神田駿河台)。

の流量特性に著しい影響を与えないであろう。そのほか、2枚円板がその平面内で回転する場合を扱った村田の研究⁽⁵⁾などもあるが、これらはいずれも助走区間についての解析を行っていない。助走区間に関する論文はきわめて少なく、筆者の知るかぎりでは Woolard の radial diffuser についての研究⁽⁶⁾があるにすぎない。しかし、この理論はきわめて特殊な場合にだけ成り立つ仮定を設けて求められたものだから、その適用範囲がかぎられている。空気マイクロメータに関連して半径流ノズルの理論式を導いた研究は一般の場合に比べてやや多いが、これらについては後にふれることにする。

本報は流体が半径流ノズルを外向きに広がり流れる場合の境界層の厚さ、速度分布、圧力分布、および圧力損失を簡単な仮定のもとに理論的に解析する。

第 2 報以下で内向き流れの場合の理論的解析を行ない、これらの理論式を実験によって確かめる。さらに空気マイクロメータのいろいろの静特性を求める計算式を導き、実験結果と比較する予定である。

2. 境界層の運動方程式

2.1 記号 本報告に用いられているおもな記号は次のとおりである。慣用のものは省略する。

- h : 平行円板のすきまの全幅
- δ : 境界層の厚さ
- η : 境界層の厚さの無次元量 ($=2\delta/h$)
- r_0 : ノズル中央円管の内半径
- $r_1(r_2)$: ノズル半径流れ部の内(外)半径
- r_p : ポアズイユの流れがはじまる位置
- α : r_1 と任意半径 r との比 ($=r/r_1$)
- u_0 : すきまの中心面における流速
- u_m : すきま断面の平均流速
- V : r_1 における平均流速
- p_0, p : 中心および r における圧力 (ゲージ)
- ξ : 圧力損失係数 $= (p_0 - p) / \left(\frac{\rho}{2} V^2 \right)$

2.2 仮定 次のような仮定を設ける。

- 1) 流体は非圧縮性とする。対象とするのは水柱 500 mm (ゲージ) 以下の圧力の空気であるから ρ は変らないとみなす。
- 2) 境界層内の速度分布は壁からの距離の二次式で表わされるものとする。したがって、境界層がすきまを満たしたときは速度分布は放物線状になる。
- 3) 半径流れのはじまる位置では半径方向の流速は断面にわたって均一である。
- 4) 流れは中央円管の中心軸 (z 軸) について対称

であって円周方向による流れのちがいはない。また円周方向の流速もない。

5) 流れはすきまの中心面に対して上下対称である。中心面での z 方向の流速は 0 である。

6) 助走区間ではすきま中心面付近に粘性の影響を受けない均一流速の流れが存在する。

2.3 運動方程式 仮定に基いて $\rho = \text{一定}$, $c_\theta = 0$, $\partial/\partial\theta = 0$ とし、外力を無視すると定常状態では Navier-Stokes の運動方程式は次のようになる。

$$c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial z^2} - \frac{c_r}{r^2} \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$c_r \frac{\partial c_z}{\partial r} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 c_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right] \dots\dots\dots (2)$$

また連続の条件は次のようになる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rc_r)}{\partial r} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

(3) 式を r について微分して (1) 式を整理し、さらに境界層においては z は r に比べてきわめて小さいとして微小項を省略すれば、(1) および (2) 式は

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \nu \left(\frac{\partial^2 c_r}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (5)$$

となる。このとき圧力は半径だけの関数となる。

すきまの幅は h でその中心面には均一流速 c_{r0} の流れがある。境界層の厚さを δ とすると $z = \delta$, すなわち、ちょうど層の外側で流速は c_{r0} になめらかに連続する (第 1 図参照)。いいかえれば $z = \delta$ で $\partial c_r / \partial z = 0$

第 1 図

および $c_r = c_{r0}$ となる. $z=0$ では $c_r=0$ および $c_z=0$ であるから, (3) 式と (5) 式を 0 から δ まで積分すると, それぞれ

$$[c_z]_{z=\delta} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^\delta r c_r dz$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^\delta r c_r^2 dz + c_{r0} [c_z]_{z=\delta} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \delta - \nu \left[\frac{\partial c_r}{\partial z} \right]_{z=0}$$

となるので, この両式から

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^\delta r c_r^2 dz - \frac{c_{r0}}{r} \frac{d}{dr} \int_0^\delta r c_r dz = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \delta - \nu \left[\frac{\partial c_r}{\partial z} \right]_{z=0} \quad \dots\dots\dots (6)$$

が得られる. これは境界層の運動量方程式である. すきま中心部の流れに対してベルヌーイの法則が成り立つとすると

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = c_{r0} \frac{dc_{r0}}{dr} \quad \dots\dots\dots (7)$$

であるから, これを (6) 式に代入すると

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^\delta r c_r^2 dz - \frac{c_{r0}}{r} \frac{d}{dr} \int_0^\delta r c_r dz = c_{r0} \frac{dc_{r0}}{dr} \delta - \nu \left[\frac{\partial c_r}{\partial z} \right]_{z=0} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる. c_r は境界層内の速度分布の与え方によってきめられる. z と r との関数 $g(r, z)$ で速度分布を与えると

$$\left. \begin{aligned} c_r &= \pm u = \pm u_0 g(r, z) \\ z=0 \text{ で } g &= 0, \quad z=\delta \text{ で } g=1 \text{ および } \partial g / \partial z = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる. u_0 はスカラー量であって r の方向の流速を正とする. したがって, 複号は外向き流れの場合は(+)を, 内向き流れの場合は(-)をとる. 境界層の外側では常に $g=1$, すなわち $c_{r0} = \pm u_0$ となる. (9) 式を (8) 式に代入して整理すると

$$\frac{1}{ru_0^2} \frac{d}{dr} ru_0^2 \int_0^\delta g^2 dz - \frac{1}{ru_0} \frac{d}{dr} ru_0 \int_0^\delta g dz = \frac{1}{u_0} \frac{du_0}{dr} \delta \mp \frac{\nu}{u_0} \left[\frac{\partial g}{\partial z} \right]_{z=0} \quad \dots\dots\dots (10)$$

を得る. またすきまの全流量は $4\pi r c_r dz$ を 0 から $h/2$ まで積分して得られる.

$$Q = 4\pi r u_0 \left(\frac{h}{2} - \delta + \int_0^\delta g dz \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

速度分布の関数 g のかわりに, 運動量厚さ ϑ , 排除厚さ δ^* および壁面の摩擦応力 τ_0 で (10), (11) 式を表わすと次のようになる.

$$\frac{d\vartheta}{dr} + (2\vartheta + \delta^*) \frac{1}{u_0} \frac{du_0}{dr} + \frac{\vartheta}{r} = \pm \frac{\tau_0}{\rho u_0^2} \quad \dots\dots\dots (10)'$$

$$Q = 4\pi r u_0 \left(\frac{h}{2} - \delta^* \right) \quad \dots\dots\dots (11)'$$

第 2 図

仮定にしたがって g が (z/δ) の二次式であるとして (9) 式の条件を満足させると g は

$$g = 2 \left(\frac{z}{\delta} \right) - \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる. $\delta \equiv \eta \frac{h}{2}$ とおいて (12) 式を用い (10), (11) 式を整理すると

$$\frac{2}{15ru_0} \frac{d}{dr} (ru_0 \eta) + \frac{7\eta}{15u_0} \frac{du_0}{dr} = \pm \nu \frac{8}{\eta h^2 u_0} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$Q = 2\pi r u_0 h \left(1 - \frac{1}{3} \eta \right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

このとき (11)', (12)' 式では

$$\vartheta = \frac{2}{3} \delta, \quad \delta^* = \frac{8}{15} \delta, \quad \tau_0 = \mu u_0 \frac{2}{\delta}$$

となる.

(13), (14) 式から u_0 を消去して整理すると

$$\frac{dX}{d\alpha} = \frac{Y}{\alpha} \pm \frac{4}{R} \alpha \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{10} \left\{ \frac{48-7\eta}{3-\eta} \eta + 48 \log_e \left(1 - \frac{\eta}{3} \right) \right\} \\ Y &= \frac{7}{10} \frac{\eta^2}{3-\eta} \\ R &= \frac{Qh}{2\pi r_1^2 \nu}, \quad \alpha = \frac{r}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

X と Y は η だけの関数であって

$\eta=0$ のとき $X=Y=0$

$\eta=1$ のとき $X=1.0374$, $Y=0.35$

である。 X および Y と η の関係を第2図に示す。

ノズル入口では流速は均一であると仮定し、これを V とすれば $R=(Vh/\nu)(h/r_1)$ となる。すなわち R はレイノルズ数に相当する値であって、流体の性質、流量、すきまの幅、および半径流れのはじまるところの半径を含んでいる。(15)式の η を α についてとけば R をパラメータとして境界層の厚さが変化する状態がわかり、したがって速度分布や圧力分布などが明らかになる。

しかし(15)式はこのままでは解析的にとくことはできない。そこで Y を X の関数で近似させると

$$Y=aX-bX^2 \quad (17)$$

(15)式は次のようになる。

$$\frac{dX}{d\alpha} = \frac{aX-bX^2}{\alpha} \pm \frac{4}{R}\alpha \quad (18)$$

ここで

$$X = \frac{\alpha}{bu} \frac{du}{d\alpha}, \quad u = v\alpha^{a/2} \quad \text{および} \quad \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{b}} x$$

のおきかえを行なうと(18)式は

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} - \left\{ \pm 1 + \frac{(a/2)^2}{x^2} \right\} v = 0 \quad (19)$$

となる。このとき X は次の式で表わされる。

$$X = \frac{a}{2b} + \frac{x}{bv} \frac{dv}{dx} \quad (20)$$

(19)式の複号は流れの方向によってきまる。内向き流れ、すなわち(一)をとったときは(19)式はベッセルの微分方程式であるから、ベッセル関数を用いてとける。また外向き流れの場合は変形されたベッセル関数によってとける。(17)式の近似式の係数は第2図に点線で示したように

$$a=5, \quad b=18.9$$

を用いるときわめてよい近似が得られる*。この近似式は(15)式でわかるように、 X を求めるためには積分される値なので、 η が1に近いところでの差は影響が小さい。

3. 運動方程式の解

3.1 境界層の厚さ (19)式の複号の(+)をとると、この式は変形されたベッセル関数を用いて解くことができる。 a が奇数であるので、 A と B を定数として

$$v = AI_{a/2}(x) + BI_{-a/2}(x)$$

したがって(20)式によって

$$X = \frac{a}{2b} + \frac{x}{b} \frac{DI'_{a/2}(x) + I'_{-a/2}(x)}{DI_{a/2}(x) + I_{-a/2}(x)}$$

をうる。 D は積分定数である。さらにベッセル関数の漸化式と $a=5$ なることを用いて上式を書きかえると

$$X = \frac{x}{b} \frac{DI_{3/2}(x) + I_{-3/2}(x)}{DI_{5/2}(x) + I_{-5/2}(x)} \quad (21)$$

$$x = c\alpha, \quad c = 2\sqrt{b/R}$$

関数 $I_{\pm n/2}(x)$ は n が奇数ならば双曲線関数で表わされるので、積分定数を $D = \coth K$ で置きかえると

$$X = \frac{1}{b} \left\{ \frac{1}{c\alpha \coth(K+c\alpha) - 1} - \frac{3}{c^2\alpha^2} \right\}^{-1} \quad (21)'$$

ノズルの入口では境界層が存在しないと仮定したので、初期条件は $\alpha=1$ で $X=0$ である。そこで積分定数は

$$\tanh(K+c) = c \quad (22)$$

したがって(21)式は

$$X = \frac{1}{b} \left\{ \frac{c + \tanh c(\alpha-1)}{c(\alpha-1) + (c^2\alpha-1)\tanh c(\alpha-1)} - \frac{3}{c^2\alpha^2} \right\}^{-1} \quad (23)$$

計算には(23)式を指数関数で表わしたほうが便利である。すなわち

$$X = \frac{1}{b} \left\{ \frac{(c+1)e^{2c(\alpha-1)} + (c-1)}{(c+1)(c\alpha-1)e^{2c(\alpha-1)} - (c-1)(c\alpha+1)} - \frac{3}{c^2\alpha^2} \right\}^{-1} \quad (23)'$$

式中 b は前述のように 18.9 とする。

流れの状態と装置の寸法から R が、したがって c がきまるから、 α に対する X の値が(23)あるいは(23)'式から求められる。 X は(16)式によって η の関数で表わされているが、同式を η について解くことは困難である。それで第2図を用いて X から η の値を求める。このようにして求めた η と α との関係を R をパラメータとして図示すると第3図のようになる。外向き流れの場合では境界層は流れすすむにし

第 3 図

* この近似式は講演会前刷の近似式より簡単でかつ近似度がよい。

たがって増大し、ある位置 α_p で $\eta=1$ となる。いかえれば、流れは α_p でポアズユの流れとなる。この α_p の値は第4図に示すとおり R だけできまる。

3.2 速度分布 助走区間での中心流れの速度 u_0 は

$$u_0 = u_m \frac{3}{3-\eta} = V \frac{3}{\alpha(3-\eta)} \quad \dots\dots\dots (24)$$

で求められる。 u_0/V の値を第5図に示す。 u_0 は境界層の厚さが増加するため初めは増速されるが、しだいに広がり効果を受けて減速されるようになる。 R が小さいと増速が著しく、 R が大きいほど早く減速しはじめる。 R が 50 前後では速度増減の効果がつりあって u_0 の値はあまり変わらず $du_0/d\alpha=0$, $u_0/V=1$ の仮定が成立する*。 $\eta=1$ 以降は速度分布形相似の仮定にしたがって u_0 は $1/\alpha$ に比例して減少する。 $\eta=1$ になった瞬間に速度変化が不連続となるが、これは速度分布を簡単にしたためで、実際にはこのような不連続は存在しない。平均流速との比 u_0/u_m のグラフは第3図と同じ傾向の曲線群であって、 $\eta=1$ で $u_0/u_m=1.5$ になる。

断面についての速度分布は(12)式によって

$$\frac{u}{V} = \frac{12}{(3-\eta)\alpha} \left\{ 1 - \frac{z}{\eta h} \right\} \frac{z}{\eta h} \quad \dots\dots\dots (25)$$

3種の R の値に対して u/V を計算すると第6図

第 4 図

第 5 図

* 前述の Woolard はこの条件を仮定した。

のようになる。 $R=5$ のときは $\alpha=1.1$ で放物線状分布となり、以後は相似形を保って減速する。 $R=100$ になると分布曲線の形は減速しながら放物線状に近づき $\alpha=1.7$ で完了する。 $R=50$ のときの最大速度はほとんど変わらないことは前に述べたとおりである。

3.3 圧力損失と圧力分布 流れを次の二つの領域にわけて考える。

〔I〕の領域 助走区間であって境界層の厚さは増加しつつある。すきまの中心面には粘性に影響されない均一流速 u_0 の流れがある。この領域の圧力はベルヌーイの法則に従い(7)式で求められる。平行円板の中心に静止している流体の静圧力を p_0 、任意の半径 α における静圧力を p とする。ノズルの入口に損失がないとすると

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} V^2 \left\{ \frac{3}{\alpha(3-\eta)} \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。

〔II〕の領域 α_p 以降の流れであってすきま断面の速度分布は完全な放物線状となっている。したがって平均流速を u_m とすると速度ヘッドは $(54/35) \times (\rho u_m^2/2)$ となる⁽⁷⁾。また粘性に基づく圧力損失は

$$\frac{6\mu Q}{\pi h^3} \log_e \frac{r'}{r}$$

となる⁽⁸⁾。そこで α_p における静圧力を p_p とすると

第 6 図

$$p_p - p = \frac{27}{35} \rho V^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha_p^2} \right) + \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \log_e \frac{\alpha}{\alpha_p} \quad \dots\dots\dots (27)$$

あるいは $\alpha > \alpha_p$ に対しては

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} V^2 \left\{ \frac{99}{140} \frac{1}{\alpha_p^2} + \frac{54}{35} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{24}{R} \log_e \frac{\alpha}{\alpha_p} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)'$$

となる。

圧力損失をノズル入口の速度ヘッド $(\rho/2) V^2$ でわったものを圧力損失係数とよび ξ で表わす。脚符によって領域あるいは位置を示すと

$$\xi_I = 9 / \{ \alpha (3 - \eta) \}^2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\xi_p = 9 / \{ 2\alpha_p \}^2 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{II} &= \frac{54}{35\alpha^2} + \frac{24}{R} \log_e \alpha + f(R) \\ f(R) &= \frac{99}{140\alpha_p^2} - \frac{24}{R} \log_e \alpha_p \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

(30)式で ξ_{II} の右辺第1および第2項は流れがはじめから放物線状速度分布をしていると考えたときの速度ヘッドと摩擦損失である。第3項の $f(R)$ は、この速度分布を完成するために助走区間で消費されたエネルギーを表わす項であって、 R だけの関数である。 $f(R)$ の値を第4図に示す。 $f(R)$ は $R=30$ で極大となり、 R が増すにつれて徐々に小さくなる。 $10 < R < 150$ の範囲では

$$f(R) = 0.130 \pm 0.008 \quad \text{である。}$$

3.4 圧力分布 任意の半径における静圧力 p を求める。ノズル外周 $\alpha_2 (= r_2/r_1)$ では流体が大気に放出されるので圧力 p_2 は0となる。したがって、この圧力損失係数 ξ_2 を用いて

$$p = (\rho/2) V^2 (\xi_2 - \xi) \quad \dots\dots\dots (31)$$

をうる。ただしノズルの出口で流れがどの領域にあるかによって計算式が異なる。

(1) ノズルの出口で流れが【I】の領域にある場合 出口 α_2 における η の値を η_2 とすると

$$p = \frac{\rho V^2}{2} \left\{ \frac{9}{\alpha_2^2 (3 - \eta_2)^2} - \frac{9}{\alpha^2 (3 - \eta)^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

しかし $R \leq 250$ のとき $\alpha_p \leq 1.992$ であるから、普通の空気マイクロメータではこのような場合になることはきわめてまれである。

(2) ノズルの出口で流れが【II】の領域にある場合 一般に $\alpha_2 > \alpha_p$ だからほとんどがこの場合である。このとき助走区間 ($\alpha < \alpha_p$) とそれ以降 ($\alpha > \alpha_p$) では計算式が別になる。

$$\alpha < \alpha_p : p = \frac{\rho V^2}{2} \left\{ \frac{54}{35} \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{24}{R} \log_e \alpha_2 + f(R) - \frac{9}{\alpha^2 (3 - \eta)^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\alpha > \alpha_p : p = \frac{\rho V^2}{2} \left\{ \frac{54}{35} \left(\frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{24}{R} \log_e \frac{\alpha_2}{\alpha} \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

R をパラメータとして $\alpha_2 = 3$ の場合を計算した結果を第7図に示す。不連続点が α_p にあって、これより上流には (33) 式を、下流には (34) 式を用いる。不連続点のするのは速度分布の項で説明したとおりである。

R が小さければ粘性の影響が強く摩擦損失による圧力降下が支配的で圧力は下がる一方である。これに対して R が大きいときは、流れはじめには粘性の影響によるわずかな圧力降下がみられるが、大部分は広がり流れによる速度ヘッドの減少のため圧力は上昇する。その中間の R の場合は、粘性と慣性の効果がまじりあって圧力は降下、上昇および降下と変動する。 α_2 が異なるときは、 α_2 の圧力が0になるように各曲線を上下にそのままずらせばよい。その結果圧力の符号が変わることがあるが、曲線の形は変らない。たとえば、 $R=25$ の場合、 $\alpha_2=3$ ならば圧力は大部分正であるが、 $\alpha_2=2$ とすると大部分は負になる。

3.5 検討 以上はノズル入口で $\eta=0$ すなわち流

第 7 図

速は断面にわたって均一であるという条件に基いて計算をすすめてきた。しかし初期条件として $\alpha=1$ で $\eta=\eta_0$ 、あるいは $\alpha=\alpha_0$ で $\eta=0$ という条件が考えられる。そこでこれらの条件を入れて積分定数を求めて整理すると

$$X = \frac{1}{b} \left[\left\{ c\alpha \frac{(1+m)e^{2c(\alpha-\alpha_0)} + (1-m)}{(1+m)e^{2c(\alpha-\alpha_0)} - (1-m)} - 1 \right\}^{-1} - \frac{3}{c^2\alpha^2} \right]^{-1} \\ m = c\alpha_0 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{bX_0} + \frac{3}{c^2\alpha_0^2} \right)^{-1} \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (35)$$

となる。 X_0 は η_0 に対応する X の値で (16) 式から求められる。 α_0 と η_0 とは任意の値をとるが、 $0 \leq \eta_0 \leq 1$ および $\alpha_0 \geq 1$ としなければならない。 η - α 曲線は初期条件にしたがって左右にずれるが、その形はほとんど変わらない。もちろん初期条件によって ξ の値が変わる。 ξ の変化は α_0 、 η_0 のほか R と出口の半径 α_2 によって変わる。第8図はその例であって、 $\alpha=1$ で $\eta=0$ のときの ξ の値を ξ_0 とした。つばの小さいノズルでは入口の条件による影響が大きい。 R の大きさの影響は α_0 の場合と η_0 の場合では反対になる。しかし R が大きいときは η_0 が小さいし、 R が小さいときに α_0 が大きくなることはないから、実際には ξ への影響は少ないものと考えられる。 $\eta_0 \neq 0$ の場合は入口で瞬間的にある速度分布になるため

第 8 図

に必要な圧力損失を加算しているの、 ξ は 100%以上になっているが、このエネルギーが別に供給されていると考えると ξ は 100%以下になる。たとえば $\eta_0=1$ では $f(R)$ に相当する分だけ ξ が小さくなる。

次に近似式 (17) の影響を吟味する。 X は (15) 式から

$$X = \int_1^\alpha \frac{Y}{\alpha} d\alpha + \frac{2}{R} (\alpha^2 - 1) \quad \dots\dots\dots (36)$$

で求められる。(23) 式で求めた η - α の関係をもとにして数値積分を行ない、逐次近似をさせて求めた X の値を厳密解として近似解と比較すると第9図のようになる。ここでは2例だけを示したが、 R が小さくなると (36) 式第2項の効果が大きくなって近似度はよくなる。しかし $R \leq 250$ の範囲では (17) 式の近似の影響はほとんど表われないことがわかる。

4. 結 言

半径流ノズルの外向き流れについて助走区間の流れの状態を理論的に解析した。解析にあたって2・2で述べたような仮定を設けた。その結果次の諸点が明らかになった。

1. 半径流ノズルではレイノルズ数に相当する値として $V_1 h^2 / (r_1 \nu)$ を用いなければならない。この点前述の Woolard の研究⁽⁹⁾と一致した。
2. 助走区間の終る位置 α_p は R が大きいほど大きくなる。±3%以下の誤差を許すならば次の近似式が適用できる。

$$\alpha_p \doteq 1 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{R}{10}}$$

3. 圧力および速度分布の形は R だけで表わされる。圧力損失係数も R とノズル内外径比 α_2 とだけで表わされるが、その両者の組合せによって二つの領

第 9 図