539. 384. 2 : 624. 073. 121

一様分布荷重を受ける周辺固定ひし形板の静的たわみ*

太田友弥**, 浜田 実**, 鷺島敏憲***,
西村義孝****, 増井 博*****Statical Deflection of a Rhomboidal Plate with Clamped Edges
Subjected to Uniformly Distributed Pressureby Tomoya ŌTA, Minoru HAMADA, Toshinori SAGIJIMA,
Yoshitaka NISHIMURA, and Hiroshi MASUI

The problem of the statical deflection of a rhomboidal plate with clamped edges subjected to uniformly distributed pressure, is studied in this paper on the basis of the energy method, which has been hitherto used in the natural vibration problem. As numerical examples, the deflection and the bending moments at the center of the plate, and the maximum bending moments along the edges are calculated for three oblique angles — 75°, 60° and 45°.

1. 緒 言

周辺固定ひし形板の静的たわみの問題は、それが構造上の基本的要素として種々の用途を持っているために重要な問題であるが、いままで計算されていなかった。近年 R. Heinen⁽¹⁾ が等角写像の方法によりこの問題を取扱ったが、辺角が 60° の場合に対して数値計算を行なったのみで、設計に適した数値を与えていない。

本研究においては、前に基本振動数⁽²⁾と座屈荷重⁽³⁾の計算に用いた方法によって、一様分布荷重を受けるひし形板の問題を取扱い、辺角が 75°, 60° および 45° の場合に対して数値計算を行なって一連の結果を得たので報告する。

2. 解 法

第 1 図のように辺の長さを $2a$ 、辺角を α とし、斜交座標 $O-X, Y$ と直交座標 $O-X', Y'$ をとり、また無次元変数 $x=X/a$ 、 $y=Y/a$ を用いる。そしてたわみ w を次のように二重フーリエ級数により表わす。

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos m\pi x \cos n\pi y \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos m\pi x \sin n\pi y \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \sin m\pi x \cos n\pi y \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y \dots\dots\dots (1)$$

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x = \pm 1 \text{ において } w = 0, \partial w / \partial x = 0 \\ y = \pm 1 \text{ において } w = 0, \partial w / \partial y = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

であるから、 $a_{mn} \sim d_{mn}$ の間に次の関係が成立しなければならない。

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot a_{mn} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots\dots) \dots (3 \cdot a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot a_{mn} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots\dots) \dots (3 \cdot b)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot b_{mn} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots\dots) \dots (3 \cdot c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot nb_{mn} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots\dots) \dots (3 \cdot d)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot mc_{mn} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots\dots) \dots (3 \cdot e)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot c_{mn} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots\dots) \dots (3 \cdot f)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot md_{mn} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots\dots) \dots (3 \cdot g)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot nd_{mn} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots\dots) \dots (3 \cdot h)$$

次に弾性エネルギー V を計算する。 D を板の曲げこわさとする。

第 1 図

* 昭和 31 年 4 月 1 日 第 33 期通常総会講演会および昭和 34 年 3 月 18 日 関西支部第 204 回講演会において講演、原稿受付 昭和 36 年 9 月 18 日。

** 正員、大阪大学工学部（大阪市都島区東野田町 9）。

*** 准員、大阪瓦斯会社。

**** 准員、松下電器産業会社。

***** 日石化学会社。

$$V = \frac{D}{2} \int \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y'^2} \right)^2 dX' dY' \dots\dots\dots (4)$$

(4) 式を座標変換式 $X' = X + Y \cos \alpha$, $Y' = Y \sin \alpha$; $X = ax$, $Y = ay$ を用いて変換すると

$$V = \frac{D}{2a^2 \sin^3 \alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \dots\dots\dots (5)$$

これに (1) 式を代入して計算すると次の結果が得られる.

$$\begin{aligned} V = & \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^4 (a_{m0}^2 + c_{m0}^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_{0n}^2 + b_{0n}^2) \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4} \{ (m^2 + n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2) \right. \\ & \left. \left. + 2 \cos \alpha \cdot mn(m^2 + n^2)(a_{mn} d_{mn} - b_{mn} c_{mn}) \right] \right] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

(6) 式に対してエネルギー停留の原理を適用する場合 (3) 式が拘束条件式となるが, (3) および (6) 式をみればわかるように問題が a_{mn} , d_{mn} ; b_{mn} , c_{mn} の互に関係のない 2 組に分けられ, これらの組を別個に考察することになる. ここでは一様分布荷重を受ける場合を考えるのであるから, 明らかに a_{mn} , d_{mn} の組が問題となる. さらに対称性により

$$a_{mn} = a_{nm}, \quad d_{mn} = d_{nm} \dots\dots\dots (7)$$

したがって (1) および (6) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} w = & \sum_{m=0}^{\infty} a_{mm} \cos m\pi x \cos m\pi y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} a_{mn} (\cos m\pi x \cos n\pi y \\ & + \cos n\pi x \cos m\pi y) + \sum_{m=1}^{\infty} d_{mm} \sin m\pi x \sin m\pi y \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} d_{mn} (\sin m\pi x \sin n\pi y + \sin n\pi x \sin m\pi y) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & \frac{2\pi^4 D}{a^2 \sin^3 \alpha} \left[\sum_{m=1}^{\infty} m^4 a_{m0}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \{ m^4 (1 + \cos^2 \alpha) (a_{mm}^2 + d_{mm}^2) + 4m^4 \cos \alpha \cdot a_{mm} d_{mm} \} \right. \\ & \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \left[\frac{1}{2} \{ (m^2 + n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} (a_{mn}^2 + d_{mn}^2) + 4mn \cos \alpha (m^2 + n^2) a_{mn} d_{mn} \right] \right] \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

一方 (7) 式により (3・b) および (3・h) 式は (3・a) および (3・g) 式とそれぞれ同じ式になるから, (3・a) 式と (3・g) 式だけを考慮し, これらに対して $u_n^{(a)}$ および $u_n^{(d)}$ なる未定の係数を指定して, 変分法における未定係数の方法を適用して (9) 式が停留値をとるための条件を求める. すなわち外力の一般成分を $Q_{mn}^{(a)}$, $Q_{mn}^{(d)}$ とすれば

$$\begin{aligned} \delta \left\{ V - \sum_{m=0}^{\infty} Q_{mm}^{(a)} a_{mm} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} Q_{mn}^{(a)} a_{mn} - \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mm}^{(d)} d_{mm} - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} Q_{mn}^{(d)} d_{mn} \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(a)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} a_{mn} - \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(d)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} m d_{mn} \right\} = 0 \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

V は弾性エネルギーであり, 第 2 ~ 5 項は外力の仕事であるから, 第 6 項と第 7 項は周辺支持力と周辺曲げモーメントの仕事でなければならない. いま $y=1$ の辺に垂直な周辺曲げモーメントを

$$({}_I M_{Y'})_{y=1} = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin m\pi x \dots\dots\dots (11)$$

とおく. ただしこの研究においては板の上面を圧縮する曲げモーメントを正にとる. 一方傾斜は

$$\left(\frac{\partial w}{\partial Y'} \right)_{y=1} = \frac{1}{a \sin \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=1}$$

(1) 式を用いると

$$\left(\frac{\partial w}{\partial Y'} \right)_{y=1} = \frac{\pi}{a \sin \alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n d_{mn} \sin m\pi x$$

したがって周辺曲げモーメントがする仕事は

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-a}^a (M_{Y'})_{y=1} \left(\frac{\partial w}{\partial Y'} \right)_{y=1} dX = \frac{-\pi}{\sin \alpha} \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin m\pi x \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n d_{mn} \sin m\pi x dx \\
 & = \frac{\pi}{\sin \alpha} \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n d_{mn}
 \end{aligned}$$

各辺において等しい仕事が行なわれるから、上式右辺の 4 倍を (10) 式の第 7 項と等置すれば

$$\frac{4\pi}{\sin \alpha} \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n d_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} n d_{mn}$$

これから

$$K_n = \frac{(-1)^{n+1} \sin \alpha}{4\pi} u_n^{(d)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

すなわち $u_n^{(d)}$ から周辺曲げモーメントの分布 (11) 式が得られるが、これはモーメント分布の非対称成分だけを与える。一方対称成分は後述の (24) 式によればよく、この両者の和が周辺曲げモーメントを与える。なお同様に $u_n^{(a)}$ から周辺支持力の対称成分が得られるが、この研究では支持力は問題にしない。

さて (10) 式にかえり、 a_{mn} , d_{mn} のかわりに次の a_{mn}' , d_{mn}' を用いる。

$$a_{mn}'/a_{mn} = d_{mn}'/d_{mn} = 2\pi^4 D/a^2 \sin^3 \alpha \quad \dots\dots\dots (13)$$

このとき (10) 式により次の関係式が得られる。

$$m=n=0 ; 0 = Q_{00}^{(a)} + u_0^{(a)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$m \neq n=0 ; 2m^4 a_{m0}' = Q_{m0}^{(a)} + (-1)^m u_0^{(a)} + (-1)^m u_m^{(a)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$m=n \neq 0 ; 2m^4 (1 + \cos^2 \alpha) a_{mm}' + 4m^4 \cos \alpha \cdot d_{mm}' = Q_{mm}^{(a)} + u_m^{(a)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$2m^4 (1 + \cos^2 \alpha) d_{mm}' + 4m^4 \cos \alpha \cdot a_{mm}' = Q_{mm}^{(d)} + m u_m^{(d)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$m \neq n, m \neq 0, n \neq 0 ;$$

$$\begin{aligned}
 & \{ (m^2 + n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} a_{mn} + 4mn \cos \alpha (m^2 + n^2) d_{mn} \\
 & = Q_{mn}^{(a)} + (-1)^{m+n} \cdot u_m^{(a)} + (-1)^{m+n} \cdot u_n^{(a)} \quad \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{ (m^2 + n^2)^2 + 4m^2 n^2 \cos^2 \alpha \} d_{mn} + 4mn \cos \alpha (m^2 + n^2) a_{mn} \\
 & = Q_{mn}^{(d)} + (-1)^{m+n} \cdot n u_m^{(d)} + (-1)^{m+n} \cdot m u_n^{(d)} \quad \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

ここでは一様分布荷重 p_0 が作用する場合を扱っているから、外力の一般成分 $Q_{mn}^{(a)}$ および $Q_{mn}^{(d)}$ は次のようになる。ただし A はひし形板の面積である。

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{00}^{(a)} &= A p_0 \\
 Q_{mn}^{(a)} &= 0 \quad (m=n=0 \text{ 以外のとき}) \\
 Q_{mn}^{(d)} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

さてたわみの問題を解くには、上に得られた (14) ~ (19) および (20) 式により a_{mn}' と d_{mn}' を $u_n^{(a)}$, $u_n^{(d)}$ および p_0 で表わし、これを (3・a) と (3・g) 式に代入して $u_n^{(a)}$ と $u_n^{(d)}$ の一次連立方程式を作り、これを解いてその結果から a_{mn}' と d_{mn}' を求めると問題が解ける。この計算過程においてははじめから $u_n^{(a)}$ と $u_n^{(d)}$ を数多く考慮すれば数値計算が困難となるから、はじめは少数の $u_n^{(a)}$ と $u_n^{(d)}$ を考慮し、順次これを増加して解の収束状態を検討しながらその精度を上げていく方法をとる。

最大たわみは板の中央点 ($x=0$, $y=0$) において生ずるが、その値は (1) 式により

$$w_{\max} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。

次に中央点における曲げモーメントを与える式を作る。第 2 図のように直交座標 $O-X_0, Y_0$ をとると、この座標に関する中央点の曲げモーメントの式は

$$\left. \begin{aligned}
 M_{X_0} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X_0^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial Y_0^2} \right)_{\substack{X_0=0 \\ Y_0=0}} \\
 M_{Y_0} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y_0^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial X_0^2} \right)_{\substack{X_0=0 \\ Y_0=0}}
 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし ν は板材料のポアソン比である。座標変換式

$$X_0 = (X+Y) \cos \frac{\alpha}{2}, \quad Y_0 = (Y-X) \sin \frac{\alpha}{2}; \quad X = ax,$$

第 2 図

$Y=ay$ を用いると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial X_0^2} &= \frac{1}{4a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial Y_0^2} &= \frac{1}{4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

(1) 式から

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=y=0} &= -\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m^2 a_{mn} \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=y=0} &= -\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{mn} \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=y=0} &= \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m n d_{mn} \end{aligned} \right\}$$

これらを(22)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} M_{X_0} &= \frac{\pi^2 D}{4a^2} \left\{ \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\nu}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (m^2 + n^2) a_{mn} - 2 \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\nu}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m n d_{mn} \right\} \\ M_{Y_0} &= \frac{\pi^2 D}{4a^2} \left\{ \left(\frac{\nu}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (m^2 + n^2) a_{mn} - 2 \left(\frac{\nu}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m n d_{mn} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

次に周辺曲げモーメントの対称成分を求める。 $y=1$ の辺に沿う Y' 方向の曲げモーメント(対称成分)は

$$(\text{II } M_{Y'})_{y=1} = -D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y'^2} \right)_{y=1} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X'^2} \right)_{y=1} \right\} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y'^2} \right)_{y=1}$$

座標変換により

$$\frac{\partial^2 w}{\partial Y'^2} = \frac{1}{a^2 \tan^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{a^2 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

また(1)式により

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=1} &= -\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n m^2 a_{mn} \cos m\pi x \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=1} &= -\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 a_{mn} \cos m\pi x \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{y=1} &= \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n m n d_{mn} \cos m\pi x \end{aligned} \right\}$$

ゆえに次式が得られる。

$$\begin{aligned} (\text{II } M_{Y'})_{y=1} &= \frac{\pi^2 D}{a^2} \left\{ \frac{1}{\tan^2 \alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n m^2 a_{mn} \cos m\pi x \right. \\ &\quad + \frac{2}{\sin \alpha \tan \alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n m n d_{mn} \cos m\pi x \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 a_{mn} \cos m\pi x \right\} \dots (24) \end{aligned}$$

(11) 式と(24)式の和が周辺曲げモーメントの分布を

$$\begin{aligned} +a_{00}' &= +a_{00}' \\ -a_{10}' &= +0.500\,000\,0\,u_0^{(a)} + 0.500\,000\,0\,u_1^{(a)} \\ -a_{20}' &= +0.031\,250\,0\,u_0^{(a)} \\ +a_{30}' &= +0.006\,172\,8\,u_0^{(a)} \\ &\vdots \\ -a_{19,0}' &= +0.000\,003\,837\,u_0^{(a)} \\ +a_{20,0}' &= +0.000\,003\,125\,u_0^{(a)} \quad \downarrow S = +0.000\,037\,5\,u_0^{(a)} \\ \hline a_{00}' + 0.541\,17\,u_0^{(a)} + 0.500\,00\,u_1^{(a)} &= 0 \dots (26) \end{aligned}$$

S は $a_{19,0}'$ 以下の和の推定値であり、項数 m に対して

$$S = \alpha + \beta / (m + \gamma) \quad (\alpha, \beta \text{ および } \gamma \text{ は定数})$$

の形で収束すると仮定して、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S = \alpha = a_{19,0}' \left(\frac{2}{a_{19,0}' / a_{20,0}' - 1} + 1 \right)$$

により求める。以下において単調に収束する無限級数の和を推定する必要があるときはこの方法による。

上と同様にして(3・a)および(3・g)式により $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} a_{m1} = 0$ および $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} m d_{m1} = 0$ の式を作ると

与える。すなわち

$$(M_{Y'})_{y=1} = (\text{I } M_{Y'})_{y=1} + (\text{II } M_{Y'})_{y=1}$$

3. 数値計算

数値計算は $\alpha = 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ の3個の場合に対し、最大たわみ、中央点の曲げモーメントおよび周辺の曲げモーメントを求めた。以下に $\alpha = 60^\circ$ の場合を例として計算の概要を述べる。

まず第1近似として $u_0^{(a)}, u_1^{(a)}, u_1^{(d)}$ のみを考えて $u_2^{(a)}, u_2^{(d)}$ 以下を零とする。(14)式と(20)式から

$$u_0^{(a)} + A p_0 = 0 \dots (25)$$

次に(15)式から a_{m0}' を求めて(3・a)式に代入する。ただし a_{00}' をそのまま残しておく次のようになる。

$$0.500\,00\,u_0^{(a)} + 1.697\,81\,u_1^{(a)} - 1.015\,61\,u_1^{(d)} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$1.782\,56\,u_1^{(d)} - 1.015\,60\,u_1^{(a)} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

(25)～(28) 式から $u_0^{(a)}$, $u_1^{(a)}$, $u_1^{(d)}$ および a_{00}' を求めると

$$u_0^{(a)} = -Ap_0, \quad u_1^{(a)} = 0.446\,76\,Ap_0,$$

$$u_1^{(d)} = 0.254\,54\,Ap_0, \quad a_{00}' = 0.317\,79\,Ap_0$$

となる。これらを用いて a_{mn}' を求めて (21) 式に代入すると最大たわみ値の第 1 近似として

$$w_{\max}^I = 0.012\,43\,a^4 p_0 / D$$

が得られる。次に第 2 近似を求めるために $u_2^{(a)}$ と $u_2^{(d)}$ を付加して、上と同様に $u_n^{(a)}$, $u_n^{(d)}$ および a_{00}' に関する方程式を作り、これを解くと次の結果が得られる。

$$u_0 = -Ap_0, \quad u_1^{(a)} = 0.443\,88\,Ap_0,$$

$$u_1^{(d)} = 0.259\,42\,Ap_0, \quad u_2^{(a)} = 0.169\,01\,Ap_0,$$

$$u_2^{(d)} = 0.028\,231\,Ap_0, \quad a_{00}' = 0.313\,94\,Ap_0$$

これらを用いて最大たわみ値を求めると

$$w_{\max}^{II} = 0.012\,32\,a^4 p_0 / D$$

次に $u_3^{(a)}$ と $u_3^{(d)}$ を付加して第 3 近似を求めると

$$u_0^{(a)} = -Ap_0, \quad u_1^{(a)} = 0.443\,74\,Ap_0,$$

$$u_1^{(d)} = 0.260\,14\,Ap_0,$$

$$u_2^{(a)} = 0.165\,88\,Ap_0, \quad u_2^{(d)} = 0.030\,360\,Ap_0,$$

$$u_3^{(a)} = 0.103\,68\,Ap_0,$$

$$u_3^{(d)} = 0.005\,785\,5\,Ap_0, \quad a_{00}' = 0.313\,49\,Ap_0$$

$$w_{\max}^{III} = 0.012\,31\,a^4 p_0 / D$$

となる。 $\alpha = 75^\circ$ および $\alpha = 45^\circ$ の場合に対しても全く同様の計算を行ない、第 1 表の結果を得た。

次に (23) 式により中央点の曲げモーメントを計算する。すでに求めた a_{mn}' のほかに d_{mn}' が必要であるからこれを計算し、それらの結果を用いて $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (m^2 + n^2) a_{mn}'$ と $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m n d_{mn}'$ を求める。このとき無限

第 1 表 最大たわみ値

α		75°	60°	45°
$\frac{10^2 w_{\max} D}{a^4 p_0}$	第 1 近似値	1.798	1.243	0.625
	第 2 近似値	1.795	1.232	0.606
	第 3 近似値	1.795	1.231	0.604

第 2 表 中央点の曲げモーメント

α	75°	60°	45°
$10^2 M_{Y0} / a^2 p_0$	9.02(9.04)	7.91(7.91)	5.77(6.32)
$10^2 M_{X0} / a^2 p_0$	7.96(7.99)	6.18(6.19)	3.91(4.01)

注。括弧外は第 3 近似値，括弧内は第 2 近似値。

交番級数の和を計算しなければならないが、それには 20 項まで計算し、19 項めまでの和と 20 項めまでの和の平均値をもって無限級数の和の推定値とする。計算は第 2 近似と第 3 近似に対して行ない、 $\nu = 0.3$ とした。結果は次のごとくである。

$$M_{X0}^{II} = 0.061\,9\,a^2 p_0 \quad M_{Y0}^{II} = 0.0791\,a^2 p_0$$

$$M_{X0}^{III} = 0.061\,8\,a^2 p_0 \quad M_{Y0}^{III} = 0.0791\,a^2 p_0$$

$\alpha = 75^\circ$ と $\alpha = 45^\circ$ の場合の結果と合わせて第 2 表に示した。

次に周辺の曲げモーメントを求める。まず (24) 式により対称成分を計算するために、式中の二重級数とを求めると。計算は第 2 近似と第 3 近似を $x=0$, $x=\pm 1/4$, $x=\pm 1/2$, $x=\pm 3/4$ に対して実施した。これらの表計算において周期変動の無限級数の和を求めるときは、20 項まで求めてから最終の 1 周期間の変動値の平均をもって級数と推定値とした。それらの結果を (24) 式に代入して曲げモーメントの対称成分が得られる。

第 3 図

第 3 表 周辺曲げモーメントの分布 $(M_{Y'})_{y=1/a^2 p_0}$

$x \backslash \alpha$	75°	60°	45°
3/4	-0.020(-0.018)	-0.007(-0.004)	+0.003(-0.004)
1/2	-0.078(-0.080)	-0.039(-0.038)	-0.019(-0.014)
1/4	-0.140(-0.141)	-0.080(-0.087)	-0.037(-0.041)
0	-0.184(-0.181)	-0.129(-0.129)	-0.069(-0.064)
-1/4	-0.192(-0.195)	-0.156(-0.161)	-0.098(-0.095)
-1/2	-0.165(-0.164)	-0.160(-0.162)	-0.114(-0.120)
-3/4	-0.084(-0.084)	-0.111(-0.105)	-0.102(-0.099)

注。括弧外は第 3 近似値，括弧内は第 2 近似値。

第 4 表 周辺最大曲げモーメント

α	75°	60°	45°
$10(M_{Y'})_{\max} / a^2 p_0$	1.93	1.61	1.15

次に (11) と (12) 式により非対称成分を求める。第2近似に対しては K_1 と K_2 , 第3近似に対しては K_1, K_2, K_3 を用い, $x=-1$ から $x=1$ まで $1/4$ とびに計算した。以上に得られた対称成分と非対称成分の和が, 周辺曲げモーメントの分布を与える。計算結果を第3表と第3図に示した。また第3図から最大周辺曲げモーメント値を求めて, 結果を第4表に示した。

第4図

第5図

第6図

第7図

第5表 最大たわみ, 中央点の曲げモーメント, 周辺最大曲げモーメント

α	0	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	180°
$10^4 w_{\max} D / l^4 p_0$	26.0	11.00	7.69	5.11	3.16	1.77	0.85	0.32	0
$10^2 M_{X0} / l^2 p_0$	1.25	1.67	1.55	1.34	1.15	0.90	0.66	0.42	0
$10^2 M_{Y0} / l^2 p_0$	4.17	2.46	1.98	1.52	1.15	0.79	0.52	0.29	0
$10^2 (M_Y')_{\max} / l^2 p_0$	8.33	4.80	4.03	3.25	2.57	1.92	1.34	0.82	0

4. 考 察

前節に得た計算結果を, $\alpha=90^\circ$ すなわち正方形板の場合と, $\alpha=0^\circ$ すなわち帯板の場合の各値と関連させるために, 第4図のようにひし形板の対角線の長さを l とし, これを一定に保ちながら α を 0° から 180° まで変化させるときの各値の変化状態を検討する。そのためには $l=4a \sin(\alpha/2)$ の関係を用いて第1, 2 および 4 表の結果を書きかえればよい。これを第5表および第5~7図に示した。またこれらの線図から $\alpha=30^\circ$ と $\alpha=15^\circ$ に対する各値を読みとって第1, 2 および 4 表に対する図を作ると第8~10図が得られる。

第8図

第9図

第10図

本解法は周辺条件をゆりめて解く方法であり、その意味で近似解法であるが、順次近似度を上げて解の収束状態を検討すると、第 3 近似で実用上ほぼ正解が得られると考えてよい。しかしこれは辺角 α が 90° からあまり離れない場合であって、 α が 45° より小さくなれば精度が落ちることが予想される。この傾向は前報の基本振動数⁽²⁾や座屈荷重⁽³⁾の場合にも見られた。第 2, 3 表および第 3 図からわかるように、 $\alpha = 45^\circ$ の場合の曲げモーメントの精度はよくない。したがって第 6, 7, 9 および 10 図を作製する場合に、その計算値にこだわらなかった。

次に、計算の途中で無限級数和の推定をするときの誤差は、曲げモーメントの計算の場合に相当大きい。各表のモーメント値の有効数字 3 けためは、このための誤差を幾分含むものと考えられる。最大たわみ値の有効数字 4 けためも同様である。

R. Heinen⁽¹⁾ は $\alpha = 60^\circ$ の場合の最大たわみ値と

して

$$w_{\max} = 0.0124 \alpha^4 p_0 / D$$

を与えている。これは第 1 表の計算値とほぼ一致する。

5. 結 論

一様分布荷重を受ける周辺固定ひし形板の最大たわみ、中央点の曲げモーメントおよび周辺最大曲げモーメントの値を、辺角が 75° , 60° , 45° の各場合について計算し、任意の辺角に対してこれらの値を求める図を作製した。第 8, 9 および 10 図が本研究の結論である。

本研究に協力した大阪大学工学部 井上 豊助手に感謝する。

文 献

- (1) R. Heinen, *Ing.-Arch.*, **26** (1958), 267.
- (2) 浜田・近藤, 機械学会論文集, **23**-131 (昭 32-7), 522.
- (3) 浜田, 機械学会論文集, **25**-151 (昭 34-3), 174.

539. 385

無限個の円周方向半円切欠きを有する丸棒のねじり*

西 谷 弘 信**

On the Torsion of a Shaft Having Infinite Number of Circumferential Semicircular Grooves

by Hironobu NISITANI

Starting from Michell's stress functions, the author calculated the stress concentration factors of a shaft having infinite number of circumferential semicircular grooves under torsion.

The linear combination of periodic functions is used so as to make notch surface free from surface tractions.

The results show that a) Neuber's formula concerning the effect of interference of notches gives too great values of the stress concentration factors and b) the interference effects of deep notches are small.

1. 緒 言

切欠きが 2 個以上あるときは、切欠きの干渉により、一般に応力集中が減少することはよく知られている。2 個以上の切欠きを持つ丸棒をねじる場合についてもかなりの研究がある⁽¹⁾。いずれも円周方向切欠きの問題では、切欠きの深さが丸棒の直径に比し十分小さい場合について干渉を論じている。切欠きが深くな

れば、応力集中係数はその切欠き底の状態だけでほぼきまること、したがって干渉効果の減少することは容易に想像される。

この論文は、丸棒直径と切欠き深さの比が有限の場合の切欠きの干渉を調べるのがおもな目的である。

切欠きの形は第 1 図に示す。すなわち $t = \rho = b/2$ の関係を保ちつつ、切欠き深さを変えた場合の干渉効果を計算した。

応力集中係数を計算するにあたっては、さきに⁽²⁾半円切欠きを有する丸棒の引張りで用いたのと同様な方

* 昭和 34 年 10 月 29 日 長崎臨時大会講演会において講演、原稿受付 昭和 36 年 10 月 6 日。

** 正員、九州大学工学部 (福岡市箱崎町)。