534.11 : 678.4-426

ゴムの振動*

関口久美**, 菅原一夫**

Vibration of Rubber Cord

by Hisayoshi SEKIGUCHI and Kazuo SUGAWARA

Experimentally, a rubber cord seems to have characteristics of a string on one hand, and of a beam on the other. Equation of motion with a term of damping was introduced as for a rubber cord. Then the solution was compared with the results of experiments, and the dynamical characteristics of rubber obtained as rubber vibration isolators were taken into account.

1) Vibration of rubber cord with a concentrated mass. Linear vibration with one degree of freedom was assumed. Elastic modulus E calculated from this experiment was compared with static modulus. Values of E are thought to be adequate when the ratio between dynamic and static moduli is taken into consideration.

2) Torsional vibration of rubber cord. Shear modulus $\bar{G}$ calculated in the same way was compared with the static shear modulus.

3) Free damped vibration of rubber cord. A term of damping was added to an ordinary equation of string. Results of experiments could be explained by an equation $\partial^2 y / \partial t^2 = a^2 (\partial^2 y / \partial x^2) - 2c (\partial y / \partial t) (\partial^2 y / \partial x^2)$, when an effective value of tension was taken into account.

1. 序 論

筆者らはいままでゴムの動特性を調べて来たのであるが、その形状効果すなわち試料の形状による見掛けの弾性係数の変化が非常に顕著に見られることは既にたびたび報告したとおりである。従来扱ってきたのは、その形を形状係数 $S = (\text{断面積}) / (\text{自由表面積})$ で表わして、0.2~1.0 の範囲の接着形防振ゴムが多かった。これによればねじりから求めたせん断弾性係数 G は形状効果を示さず、軸方向で求めた縦弾性係数 E は大きく変わることがわかっている。

今度はひも状で S の値が0に近いものの振動について考察と実験を行なってみた。両端を接着したひも状ゴムについては大きくはないが曲げ剛性がある、弦とはりとの中間的なものと考えることができる。しかしスパンが十分長いと曲げやせん断の影響は比較的小さくて、伸びしたがって張力が大きくきいてくる。

過去における弦の振動に関する研究もいろいろあるが、いずれも張力だけを考慮に入れている。本研究においては張力のほかにゴムひもの縦弾性係数と減衰も考えて運動方程式をたて、それによって実験結果を考察する。

2. 集中荷重をもったひもの振動

自然長 $2l_0$ のゴムひもをわずかにひきのばし、この両端を水平距離 $2l_1$ の二つの支点 I, II に固定し、ひもの中央に質量 m の荷重をつるしたときの平衡の位置を III とする。この荷重に鉛直方向の変位を与えて微小振幅の自由振動をさせたときの運動方程式は、減衰を考慮に入れなければ第1図の符号を用いて次のようになる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - 2EA \frac{y - l_0}{l_0} \cos \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

またつりあいの式は

$$2EA \frac{l - l_0}{l_0} \cos \alpha = mg \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに E は縦弾性係数、 A はひもの断面積を表わす。図から

第1図 集中荷重をつけたひもの略図

* 昭和 37 年 4 月 4 日 第 39 期通常総会講演会において講演、
原稿受付 昭和 37 年 6 月 4 日。

** 正員、姫路工業大学(姫路市伊伝屋 600)。

$$x \sin \theta = x \sin (\alpha - \varphi) = l \sin \varphi$$

ここで x , φ を一次微小量とすると

$$x \sin \alpha \doteq l \varphi$$

$$\cos \theta = \cos (\alpha - \varphi) = \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi$$

$$\doteq \cos \alpha + \varphi \sin \alpha \doteq \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{l} x$$

$$y = l \cos \varphi + x \cos \theta \doteq l + x \cos \alpha$$

これと (1), (2) 式とから

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &\doteq mg - 2EA \frac{l + x \cos \alpha - l_0}{l_0} \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{l} x \right) \\ &= -2EA \left\{ \frac{\cos^2 \alpha}{l_0} + \frac{l - l_0}{ll_0} \sin^2 \alpha \right\} x \\ &= -2EA \frac{l^3 - l_0 l_1^2}{l^3 l_0} x \end{aligned}$$

すなわち

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2EA \frac{l^3 - l_0 l_1^2}{l^3 l_0} x \quad \dots\dots\dots (3)$$

が得られる。

実際にはゴムひもには減衰力が働き振動はしばらくして停止する。この場合線形 1 自由度の振動としてその減衰力を速度に比例するものと考え、運動方程式を次のようにおく。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに k はばね定数に相当するものであって、(3) 式から

$$k = 2EA \frac{l^3 - l_0 l_1^2}{l^3 l_0} \quad \dots\dots\dots (5)$$

として表わされる。

(4) 式の解は C と φ を初期条件から定まる定数として

$$\left. \begin{aligned} x &= Ce^{-\alpha t} \sin (\omega t + \varphi) \\ \alpha &= \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、1 周期を隔てた相続く二つの最大変位を x_i , x_{i+1} とすれば

$$\text{対数減衰率 } \delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{2\pi\alpha}{\omega} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。

実験はロングレコーディングカメラを用い荷重の陰影を印画紙に写し、その記録から対数減衰率 δ および円振動数 ω を読取った。この二つの値から (7) 式により α を、(6) 式により k を、(5) 式により E を算出した。

$2l_0 = 42.70$ cm, $2l_1 = 44.25$ cm, $mg = 149.2$ g, $A = 0.3165$ cm² (円形断面) のものを用いて実験した結果 $\delta = 0.192$, $\omega = 28.94$ rad/s となり、これから次の

値が得られた。

$$k = 0.128 \text{ kg/cm}, \quad \alpha = 0.883 \text{ 1/s}$$

$$c = 2.7 \times 10^{-4} \text{ kg s/cm}, \quad E = 94.3 \text{ kg/cm}^2$$

ここで求められた E は動的な弾性係数である。一般に動的弾性係数は静的弾性係数より大きいことが知られており、その比であるところの静動比は防振ゴムについては 1.1~1.3 である。いま用いたゴムひもについて引張静試験を行なって E を求めたところ 74.8 kg/cm² を得た。この結果から静動比を出すと 1.26 となる。

もともと (3) 式はゴムひもの I から III までの部分と II から III までの部分が直線状になったまま振動すると仮定して導いたものである。したがって曲げ剛性は考慮に入れていない。一方 8 mm 映画にとって詳しく調べてみると、I, II の接着部ではひもの接線こう配は 0 であって、上記のように単純に考えるわけにはゆかないことがわかる。しかも微小振動としてある程度の省略もしている。したがってこれらのことを考慮に入れば、上で得られた $E = 94.3$ kg/cm² という値はだいたい妥当な値であるように思われる。

3. ゴムひものねじり振動

長さ l のゴムひもの上端を接着固定し、下端に慣性モーメント I の円柱形の金属板を接着し、回転振動をさせたとき、その運動方程式は減衰項を付加して次のようになる。

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに θ は角変位 (ねじれ角) を表わす。

ゴムひものせん断弾性係数を G , 断面の極慣性モーメントを I_p とすると

$$k = G \frac{I_p}{l} \quad \dots\dots\dots (9)$$

であり、(8) 式の解は

$$\left. \begin{aligned} \theta &= Ce^{-\alpha t} \sin (\omega t + \varphi) \\ \alpha &= \frac{c}{2I}, \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{I} - \alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となり、対数減衰率

$$\delta = \ln \frac{\theta_i}{\theta_{i+1}} = \frac{2\pi\alpha}{\omega} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。直径 9.15 cm, 重量 1.37 kg の円柱形金属板を使用して、前節と同じゴムひも (直径 0.635 cm) を用い、その長さをいろいろ変えて実験した結果 $G = 25.7$ kg/cm² が得られた。ねじりの周期はかなり長いので、これは前節の静試験の E と比べるのが妥当と考えられる。この値と静試験の E から E/G を算出すると 3 弱となる。一方ゴムひもは非圧縮性と考えら

第2図 初期ねじれ角による G の変化

れるから $E/G \approx 3$ であって、しかも3より小さくはない。

この点を調べるため初期振幅をいろいろ変えて実験し、初期条件としての単位長さ当りのねじれ角 θ/l を横軸にとり、 G を縦軸にとってプロットしたものを第2図に示す。これをみれば θ/l の大きくなるにつれて G の値は小さくなり、一種の振幅依存性を示すことがわかる。筆者の1人は以前縦弾性係数 E を定めるに当って、指定すべきいくつかの条件の一つとして応力振幅をとる必要があることを提唱した⁽¹⁾。これと同様にねじりから G を求めるに当ってもねじれ角の目安となる何らかの規制が必要であると思われる。単に E/G がいくらかということでは E , G のおのおのが求められた条件を考慮に入れなければ意義が少ない。したがって E/G が上述のように一見3よりやや小さいということもありうるわけである。この実験で θ/l の小さいところでは読取りの誤差がきいてくるし、 θ/l のあまり大きいところではねじり以外の振動はいりやすく、いずれにしてもばらつきは大きい。

また実験では α は $0.23 \sim 0.24$ 1/s でひもの長さ l に無関係であった。したがって c もまた l に無関係となる。

4. ゴムひもの減衰振動

一般に弦の減衰には①内部摩擦による減衰、②弦をとりまく媒質の作用による減衰——これには空気粘性によるエネルギーの損失、弾性波となって空中に伝わるためのエネルギーの損失等がある。③端から出るエネルギーの損失による減衰等が考えられきわめて複雑であり、どれがどのような割合できいてくるのかもよくわからない。しかしゴムひもについては内部摩擦による減衰が大きくきいているように考えられる。

減衰のない弦の運動方程式はよく知られているように

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad a^2 = \frac{P}{\rho A}$$

である。ここに x は一端からの距離、 y は横変位、 P は張力、 ρ は密度、 A は断面積を表わす。

減衰を表わす項としては

$$\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)$$

等が考えられる。このうち第一のものを考慮に入れたもの、すなわち

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2c \frac{\partial y}{\partial t}$$

はよく知られている電信方程式で、これは上記の②に相当していると考えられる。この方程式の解は

$$y = \sum C_n e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{a^2 \lambda_n^2 - c^2} t + \varphi_n) \sin \lambda_n x,$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$$

であって高調波に対しても一定な減衰を示す。一方ゴムひもの振動については高調波ほど減衰が急であるとえられるから、この解は実情に合わないことになる。

第二のものは同次双曲線形偏微分方程式をつくり減衰を表わさない。第五のものは中鉢がベルトに関する論文の中で取扱っているが⁽²⁾、これは曲げ剛性の強いもの、したがってはりに近いものの内部減衰に相当する。以下実験のデータが示すように本研究で取扱ったゴムひもについては、第三のものが①の内部摩擦を表わすものとして適当であるように思われる。

以上のようなことを考慮して、減衰のある弦の振動方程式として

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \dots \dots \dots (12)$$

をとることとする。

$x=0$ および $x=l$ で $y=0$ を満足する解は次のようになる。

$$y = \sum C_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \sin(\sqrt{a^2 - c^2 \lambda_n^2} \lambda_n t + \varphi_n) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \dots \dots \dots (13)$$

ここに n は自然数を表わし $n > al/c\pi$ に対しては振動しない減衰項を表わす。(13) 式によれば小時間後高調波は消滅し原振動だけが残ることになるから、近似的に

$$y = C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \sin \frac{\pi}{l} x \dots \dots \dots (14)$$

$$\alpha = \frac{c\pi^2}{l^2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{a^2 \pi^2}{l^2} - \alpha^2}$$

となる。いま特別な初期条件として $t=0$ で

$$y = C \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad \text{を与えると (13) 式の解は正確}$$

に (14) 式で与えられることになる。第2節と同様ロングレコーディングカメラを用いて対数減衰率 δ および ω を読取った。

$\alpha = \frac{\omega \delta}{2\pi}$ により α , $a^2 = \frac{l^2}{\pi^2} (\omega^2 + \alpha^2)$ から a^2 , $P = a^2 \rho A$ から P , $E = Pl_0 / A(l-l_0)$ から E が求められることになる。

5. 張力の実効値

通常弦の振動方程式では張力は一定としているが、振動状態では張力は絶えず変っていると考えられる。したがって張力として何をとるべきであるかということについて多少考察してみる。

まっすぐの場合 l である弦が正弦波の半周期の振動をすると仮定し、その形を

$$y = B \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{a\pi t}{l}$$

とおき時刻 t における弦長を $S(t)$, 張力を $P(t)$ で表わせば

$$P(t) = EA \frac{S(t) - l_0}{l_0}$$

ここに

$$S(t) = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = l + \frac{\pi^2}{4l} B^2 \cos^2 \frac{a\pi t}{l}$$

であるから

$$P(t) = \frac{EA}{l_0} \left\{ l - l_0 + \frac{\pi^2}{4l} B^2 \cos^2 \frac{a\pi t}{l} \right\}$$

静止の状態における張力を $P_{\min}$, 最も伸びた状態での張力を $P_{\max}$ で表わせば

$$P_{\min} = \frac{EA}{l_0} (l - l_0), \quad P_{\max} = \frac{EA}{l_0} \left\{ l - l_0 + \frac{\pi^2 B^2}{4l} \right\}$$

であるから

$$P(t) = P_{\min} + (P_{\max} - P_{\min}) \cos^2 \frac{a\pi t}{l}$$

が得られ、 $P(t)$ を1周期について平均した値を $\bar{P}$ とかけば

$$\bar{P} = \frac{1}{2} (P_{\min} + P_{\max})$$

ここに $P_{\min}$ および $P_{\max}$ の算出に当っては静的 E を用いるべきものであり、減衰振動から求められた P は $\bar{P} = \frac{1}{2} (P_{\min} + P_{\max})$ と比較すべきものと考えられる。

第1表は本節で述べたことを考慮して実験の結果を

第1表

諸元	単位	計 算 式	三角波	正 弦 波	
			(1)	(2)	(3)
l_0	cm		45.0	100.5	106.3
l	cm		46.4	109.6	111.6
T	s		0.056	0.099	0.124
ω	rad/s	$2\pi/T$	112.1	63.72	50.55
δ		$\ln(x_i/x_{i+1})$	0.0502	0.0164	0.0463
α	1/s	$\frac{\omega}{2\pi} \delta$	0.896	0.166	0.373
a^2	cm ² /s ²	$\frac{l^2}{\pi^2} (\omega^2 + \alpha^2)$	2.74×10^6	4.95×10^6	3.22×10^6
$*P$	kg	$a^2 \rho A$	1.186	2.15	1.41
$P_{\min}$	kg		0.737	2.14	1.18
$P_{\max}$	kg		1.073	2.20	1.68
$\bar{P}$	kg		0.905	2.17	1.43
E_d	kg/cm ²	$\frac{P}{A} \frac{l_0}{l-l_0}$	120.3	75.0	8.84
ω_0	rad/s	$\frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{P_{\min}}{\rho A}}$	89.8	63.8	46.4

$A = 0.3615 \text{ cm}^2$ $*P$ は $E = 74.8 \text{ kg/cm}^2$ より算出
 $\rho = 1.34 \text{ g/cm}^3$

示したものである。ここに $E_d = \frac{P}{A} \frac{l_0}{l-l_0}$ は動的 E を表わし、 ω_0 は減衰がないとしたときの角振動数で $\frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{P_{\min}}{\rho A}}$ から求めたものである。また三角波というのは、初期条件としてのひもの形が真中をつまんで三角形となっているものを用いたものであり、正弦波と記したものは初期のひもの形が正弦波の半波長の形になるよう十分注意したものである。これを見れば (2), (3) では実験から出した P と静張力から求めた $\bar{P}$ とはかなりよく一致しており、 ω と ω_0 とはかなり近い値になっている。(1) はそれと比較のため掲げたものであるが、 ω と ω_0 とはかなり違っている。実際は高調波の影響もかなりはいるであろうし、伸びが小さいのでゴムのくせを直すだけにとどまって計算のほうから出した値と大きく食違っているものと考えられる。またこれから出した E は過大のようである。一方初期条件を正弦波にとれば上記の理論と実験とはかなりよく合うことがわかる。

6. 心入りゴムひもの振動

以上述べて来たものはすべて心のないゴムひもで、いちおう等方質とみなしうるものである。ここで、上記と同じ太さ、同じゴム質で中に強力人絹の糸が10本、心としてはいつているものを作り、同様の試験を行なってみた。この人絹の糸は張力がかかってもなかなか伸びないもので、これを含んだゴムひもでは見掛けの縦弾性係数 E_{ap} はかなり大きな値になり、ねじりの G はあまり大きくならないものと予想される。

実験の結果を見ると引張静試験においては、 $E_{ap} = 2082 \text{ kg/cm}^2$ となっている。一方第1節と同様

の集中荷重法によれば $E_{ap}=2138 \text{ kg/cm}^2$ が得られた。このことにより心がはいっていても第1節のような振動をさせたときの特性は静試験の結果から推定することができる。次に第2節と同様のねじりから G を求めてみると、その値は $106\sim 108 \text{ kg/cm}^2$ であった。心入りの場合 $E/G\approx 3$ が成り立たないことは予想どおりであった。

7. 結 言

従来筆者らが動特性を調べてきたゴムは比較的短いものであった。今回は形状係数が零に近いものとしてひも状のものにつき考察と実験を行ない次のような結果を得た。

(1) 集中荷重をつけたゴムひもの振動は減衰のある線形1自由度の振動として取扱うことができる。その際算出された縦弾性係数 E は動的弾性係数である。

(2) ゴムひものねじりについても同様であるが、その際求められたせん断弾性係数 G は静的弾性係数と考えてよい。ただし振幅依存性が見られるので、 G を定めるにはねじり角について何らかの規制が必要である。

(3) ゴムひもの自由減衰振動では

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

なる方程式で説明できる。張力としてその実効値をとり、適当な初期条件を与えれば上式の解は実験結果とよく合っている。

なお本研究に当り試料を提供しいろいろと便宜を図っていただいた三星ベルト会社に深じんの謝意を表明する次第である。

文 献

- (1) 関口, 機械学会論文集, 27-173 (昭 36-1), 85.
- (2) 中鉢, 移動線材の振動に関する研究, 学位論文 (昭 31).

535.121.1:624.073.12

部分的に固定された支持辺を持つ正方形板の基本振動数*

太田 友弥**, 浜田 実**, 三宮加美雄***
乾 宏明****, 鎌村 寿巳*****

Fundamental Frequencies of Simply Supported but Partially Clamped Square Plates

by Tomoya ŌTA, Minoru HAMADA, Kamio SANNOMIYA,
Hiroaki INUI, and Toshimi KAMAMURA

This paper deals with the fundamental vibration of a simply supported but partially clamped square plate. The energy method is applied here, which was proposed in the former paper for solving the general problems of statical deflections, stationary vibrations, bucklings, etc. of rectangular plates. Numerical calculations are carried out for fourteen cases, two of which are contained in the former paper, and five diagrams are obtained which give the fundamental frequencies of square plates under typical boundary conditions.

1. 序

部分的に固定された支持辺を持つ長方形板のたわみ・定常振動・座屈の問題を、エネルギー法により解く

一般的な方法については前に報告したが⁽¹⁾, その後この方法を用いて種々の境界条件を持つ正方形板の基本振動数を計算したので報告する。この問題については倉田・岡村²⁾の研究があり、計算結果の精度は高いが計算例が少ない。ここでは12個の場合について計算し、前報の計算例と合わせて、代表的な場合について固定部分と支持部分の長さの比に対する基本振動数の変化を求めることができた。

* 昭和36年3月17日 関西支部第36期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和37年6月21日.
** 正員, 大阪大学工学部 (大阪市都島区東野田町).
*** 准員, 帝国人網会社.
**** 准員, 日立造船会.
***** 郡里中学校.