の集中荷重法によれば $E_{ap}=2138 \text{ kg/cm}^2$ が得られた。このことにより心がはいっていても第1節のような振動をさせたときの特性は静試験の結果から推定することができる。次に第2節と同様のねじりから G を求めてみると、その値は $106\sim 108 \text{ kg/cm}^2$ であった。心入りの場合 $E/G\approx 3$ が成り立たないことは予想どおりであった。

7. 結 言

従来筆者らが動特性を調べてきたゴムは比較的短いものであった。今回は形状係数が零に近いものとしてひも状のものにつき考察と実験を行ない次のような結果を得た。

(1) 集中荷重をつけたゴムひもの振動は減衰のある線形1自由度の振動として取扱うことができる。その際算出された縦弾性係数 E は動的弾性係数である。

(2) ゴムひものねじりについても同様であるが、その際求められたせん断弾性係数 G は静的弾性係数と考えてよい。ただし振幅依存性が見られるので、 G を定めるにはねじり角について何らかの規制が必要である。

(3) ゴムひもの自由減衰振動では

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

なる方程式で説明できる。張力としてその実効値をとり、適当な初期条件を与えれば上式の解は実験結果とよく合っている。

なお本研究に当り試料を提供しいろいろと便宜を図っていただいた三星ベルト会社に深じんの謝意を表明する次第である。

文 献

- (1) 関口, 機械学会論文集, 27-173 (昭 36-1), 85.
- (2) 中鉢, 移動線材の振動に関する研究, 学位論文 (昭 31).

535.121.1:624.073.12

部分的に固定された支持辺を持つ正方形板の基本振動数*

太田 友弥**, 浜田 実**, 三宮加美雄***
乾 宏明****, 鎌村 寿巳*****

Fundamental Frequencies of Simply Supported but Partially Clamped Square Plates

by Tomoya ŌTA, Minoru HAMADA, Kamio SANNOMIYA,
Hiroaki INUI, and Toshimi KAMAMURA

This paper deals with the fundamental vibration of a simply supported but partially clamped square plate. The energy method is applied here, which was proposed in the former paper for solving the general problems of statical deflections, stationary vibrations, bucklings, etc. of rectangular plates. Numerical calculations are carried out for fourteen cases, two of which are contained in the former paper, and five diagrams are obtained which give the fundamental frequencies of square plates under typical boundary conditions.

1. 序

部分的に固定された支持辺を持つ長方形板のたわみ・定常振動・座屈の問題を、エネルギー法により解く

一般的な方法については前に報告したが⁽¹⁾, その後この方法を用いて種々の境界条件を持つ正方形板の基本振動数を計算したので報告する。この問題については倉田・岡村²⁾の研究があり、計算結果の精度は高いが計算例が少ない。ここでは12個の場合について計算し、前報の計算例と合わせて、代表的な場合について固定部分と支持部分の長さの比に対する基本振動数の変化を求めることができた。

* 昭和36年3月17日 関西支部第36期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和37年6月21日.
** 正員, 大阪大学工学部 (大阪市都島区東野田町).
*** 准員, 帝国人網会社.
**** 准員, 日立造船会.
***** 郡里中学校.

2. 解 法

前報⁽¹⁾においては、長方形板の静的たわみ・固有振動・定常強制振動・座屈の各問題を対象とする一般的な解法について述べたが、ここでは正方形板の基本振動問題のみを対象として以下に本解法を要約する。

W, w, ω を振動変位、振動振幅および固有振動数として

$$W = w \cos \omega t \dots\dots\dots (1)$$

とおく。正方形板の辺長を a とし、第 1 図のように座標系 $O-X, Y$ をとり無次元変数 $x = X/a, y = Y/a$ を用いて w を次式により与える。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y \dots\dots\dots (2)$$

(2) 式は周辺支持の条件を満足している。これに対し部分的に固定された箇所に対する条件を満足するために、各周辺に次の形の曲げモーメントの分布を考える。

$$\left. \begin{aligned} m_{y=0}(x) \cos \omega t &= \left(\sum_{m=1}^{m'} K_m \sin m\pi x \right) \cos \omega t \\ m_{y=1}(x) \cos \omega t &= \left(\sum_{m=1}^{\bar{m}'} K_{\bar{m}} \sin m\pi x \right) \cos \omega t \\ m_{x=0}(y) \cos \omega t &= \left(\sum_{n=1}^{n'} K_n \sin n\pi y \right) \cos \omega t \\ m_{x=1}(y) \cos \omega t &= \left(\sum_{n=1}^{\bar{n}'} K_{\bar{n}} \sin n\pi y \right) \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

この曲げモーメント分布を各周辺に沿う細い帯状部分に分布する振動荷重におきかえて、一種の定常強制振動の問題と考えエネルギー停留の原理を用いると、その結果次の関係式が得られる。

$$\frac{1}{2} \{ (m^2 + n^2)^2 - Q^2 \} c_{mn} = \frac{\pi}{2} \{ nK_m + (-1)^{n+1} nK_{\bar{m}} + mK_n + (-1)^{m+1} mK_{\bar{n}} \} \dots\dots\dots (4)$$

ただし

$$Q^2 = a^4 \rho h \omega^2 / \pi^4 D, \quad c_{mn} = (\pi^4 D / 2a^2) C_{mn} \dots\dots\dots (5)$$

ここに ρ, h, D は板の密度、厚さおよび曲げこわさである。

次に境界条件を考える。まず周辺の支持部分に対す

第 1 図

る条件であるが、いま $y=0$ の辺において $x_j < x < x_{j'}$ ($j=1, 2, \dots, i$) の部分が支持されているとすれば、この箇所では $m_{y=0}(x)$ が零であるべきであることから次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^i \int_{x_j}^{x_{j'}} \sum_{\mu=1}^{\mu'} K_{\mu} \sin \mu\pi x \sin m\pi x dx = 0$$

同様にして他の三辺に対し

$$\sum_{j=1}^i \int_{x_j}^{x_{j'}} \sum_{\mu=1}^{\mu'} K_{\mu} \sin \mu\pi x \sin m\pi x dx = 0$$

$$\sum_{j=1}^i \int_{y_j}^{y_{j'}} \sum_{\nu=1}^{\nu'} K_{\nu} \sin \nu\pi y \sin n\pi y dy = 0$$

$$\sum_{j=1}^i \int_{y_j}^{y_{j'}} \sum_{\nu=1}^{\nu'} K_{\nu} \sin \nu\pi y \sin n\pi y dy = 0$$

..... (6)

$x_j, x_{j'}; y_j, y_{j'}$ および i は対応する辺における値をとる。次に周辺の固定部分に対する条件は、いま $y=0$ の辺において $x_j < x < x_{j'}$ ($j=1, 2, \dots, i$) の部分が固定されているとすれば、ここでは $\partial w / \partial y$ が零であるべきであることから次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^i \int_{x_j}^{x_{j'}} \sum_{\mu=1}^{\mu'} L_{\mu} \sin \mu\pi x \sin m\pi x dx = 0$$

$$\sum_{j=1}^i \int_{x_j}^{x_{j'}} \sum_{\mu=1}^{\mu'} L_{\mu} \sin \mu\pi x \sin m\pi x dx = 0$$

$$\sum_{j=1}^i \int_{y_j}^{y_{j'}} \sum_{\nu=1}^{\nu'} L_{\nu} \sin \nu\pi y \sin n\pi y dy = 0$$

$$\sum_{j=1}^i \int_{y_j}^{y_{j'}} \sum_{\nu=1}^{\nu'} L_{\nu} \sin \nu\pi y \sin n\pi y dy = 0$$

..... (7)

$$\text{ただし } L_m = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi C_{mn}$$

$$L_{\bar{m}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\pi C_{mn}$$

$$L_n = \sum_{m=1}^{\infty} m\pi C_{mn}$$

$$L_{\bar{n}} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m\pi C_{mn}$$

..... (8)

上に得た (4)~(8) 式を用いて固有振動の問題を解くには、まず (3) 式における級数の項数 $m', \bar{m}', n', \bar{n}'$ を適当に指定し、次に Q^2 の値を仮定して (4) 式から c_{mn} を $K_m \sim K_{\bar{n}}$ にて表わす。これを (8) 式に代入して $L_m \sim L_{\bar{n}}$ を $K_m \sim K_{\bar{n}}$ にて表わし、さらにこれを (7) 式に代入して $K_m \sim K_{\bar{n}}$ の一次同次式を得る。一方 (6) 式からもそれが得られるから、これらが両立するような Q^2 の値を試算法により求めると固有振動数が得られる。それに対する振動形は (4) 式から c_{mn} を求めることにより得られる。以下の計算例においては種々の形式の境界条件に対して基本振動数のみを計算する。

3. 計 算 例

(I) 二対辺の中央において辺長の α 倍の部分
固定され他の部分が支持された正方形板 (第2図)

$x=0$ および $x=1$ の辺は支持辺であるから $K_n = K_{\bar{n}} = 0$, また対称性により $K_m = K_{\bar{m}}$, $L_m = -L_{\bar{m}}$ であり m, n はすべて奇数となる. ゆえに (6), (7) 式として

$$\int_0^{(1-\alpha)/2} \sum_{\mu=1}^{\mu'} K_{\mu} \sin \mu \pi x \sin m \pi x dx = 0 \dots \dots (9)$$

($m=1, 3, 5, \dots$)

$$\int_{(1-\alpha)/2}^{1/2} \sum_{\mu=1}^{\mu'} L_{\mu} \sin \mu \pi x \sin m \pi x dx = 0 \quad (m=1, 3, 5, \dots) \dots \dots (10)$$

(4) 式から $\frac{1}{2} \{ (m^2 + n^2)^2 - Q^2 \} c_{mn} = n \pi K_m$

これを (8) 式に代入すれば

$$L_m = \frac{4a^2}{\pi^2 D} K_m \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(m^2 + n^2)^2 - Q^2} \dots \dots (11)$$

前報⁽¹⁾ においては (11) 式のような無限級数の計算に際しては, 20 項まで計算してその終わりの 2 項を用い収束の形を一次双曲線に仮定して級数和を推定したが, その後次の数学公式を用いることにより有限形にて表わし得ることがわかったので, 本報ではこれによった.

$$\left. \begin{aligned} \cot Z &= \frac{1}{Z} + 2Z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z^2 - n^2 \pi^2} \\ \frac{1}{\sin Z} &= \frac{1}{Z} + 2Z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{Z^2 - n^2 \pi^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

(12) 式を用いると (11) 式は次のように変形する.

$$\left. \begin{aligned} Q > m^2 : L_m &= \frac{a^2}{2\pi D} \frac{K_m}{Q} \{ \sqrt{Q+m^2} (\coth \pi \sqrt{Q+m^2} - \operatorname{cosech} \pi \sqrt{Q+m^2}) - \sqrt{Q-m^2} (\cot \pi \sqrt{Q-m^2} - \operatorname{cosec} \pi \sqrt{Q-m^2}) \} \\ Q < m^2 : L_m &= \frac{a^2}{2\pi D} \frac{K_m}{Q} \{ \sqrt{m^2+Q} (\coth \pi \sqrt{m^2+Q} - \operatorname{cosech} \pi \sqrt{m^2+Q}) - \sqrt{m^2-Q} (\coth \pi \sqrt{m^2-Q} - \operatorname{cosech} \pi \sqrt{m^2-Q}) \} \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

(13) 式によるときと前報の計算法によるときとで級数の誤差はわずかであり, 最終結果の振動数に影響を与えない.

さて数値計算は $\alpha=2/3$, $\alpha=1/2$ および $\alpha=1/3$ に対して実施した.

(i) $\alpha=2/3$ の場合 第1近似として K_1, K_3, K_5, K_7 を考える. (9) 式を $m=1$ および $m=3$ に対して作ると

$$0.1811721 K_1 + 0.4330127 K_3 + 0.4330127 K_5 + 0.2165064 K_7 = 0$$

$$0.4330127 K_1 + 1.0471976 K_3 + 1.0825318 K_5 + 0.6062178 K_7 = 0$$

次に試みに $Q^2=8.6$ において (13) 式により L_1, L_3, L_5, L_7 を K_1, K_3, K_5, K_7 で表わして (10) 式の $m=1$ および $m=3$ に対する式に代入すると

$$-0.0006371710 K_1 - 0.05758745 K_3 - 0.03406776 K_5 - 0.01215142 K_7 = 0$$

$$0.00009319728 K_1 + 0.2785389 K_3 - 0.08516941 K_5 - 0.03402399 K_7 = 0$$

上に得られた4元連立同次式の係数行列式の値を計算すると $1\Delta_{8.6}=1.7909 \times 10^{-4}$ となる. 次に $Q^2=8.5$ とすれば $1\Delta_{8.5}=0.2888 \times 10^{-4}$ が得られ, また $Q^2=8.3$ とすれば $1\Delta_{8.3}=-2.9256 \times 10^{-4}$ となるから, $1\Delta=0$ ならしめる Q^2 の値として $Q_1^2=8.48$ を得る. これが求める基本振動数の第1近似値であるとする.

第2近似を得るには $K_1, K_3, K_5, K_7, K_9, K_{11}$ を考え, (9) および (10) の条件式を $m=1, m=3, m=5$ に対して作り, 6元連立同次式の係数行列式の計算を行なう. その結果 $11\Delta_{8.6}=-25.271 \times 10^{-8}$, $11\Delta_{8.5}=-0.638$

第2図

$\times 10^{-8}$, $II A_{8.3} = 52.074 \times 10^{-8}$ となるから Q^2 の第 2 近似として $Q_{II}^2 = 8.50$ が得られる。

(ii) $\alpha = 1/2$ の場合 (i) と同様に計算すると

$$I A_{8.3} = 1.3740 \times 10^{-8}, \quad I A_{8.0} = -2.0768 \times 10^{-8},$$

$$I A_{7.8} = -4.6729 \times 10^{-8}$$

となるから $Q_I^2 = 8.18$

$$II A_{8.3} = -8.3605 \times 10^{-6}, \quad II A_{8.2} = 1.2066 \times 10^{-6},$$

$$II A_{8.0} = 21.740 \times 10^{-6}$$

となるから $Q_{II}^2 = 8.21$

(iii) $\alpha = 1/3$ の場合

$$I A_{7.8} = 1.4585 \times 10^{-8}, \quad I A_{7.5} = -0.3528 \times 10^{-8},$$

$$I A_{7.3} = -1.7410 \times 10^{-8}$$

となるから $Q_I^2 = 7.56$

$$II A_{7.8} = -4.0610 \times 10^{-6}, \quad II A_{7.5} = 0.8956 \times 10^{-6},$$

$$II A_{7.3} = 4.7048 \times 10^{-6}$$

となるから $Q_{II}^2 = 7.56$

(II) 二対辺において一端から辺長の α 倍の部分が固定され、他の部分が支持された正方形板 (第 3 図)

$x=0$ および $x=1$ の辺は支持辺であるから $K_n = K_n^- = 0$, また対称性により $K_m = K_m^-$, $L_m = -L_m^-$ であり, n は奇数であるが m はすべての正整数である。ゆえに (6), (7) 式として

$$\int_a^{1-\alpha} K_m \sin \mu \pi x \sin m \pi x dx = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$(m=1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_0^a L_m \sin \mu \pi x \sin m \pi x dx = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$(m=1, 2, 3, \dots)$$

(11), (13) 式はこの場合も成立する。

(i) $\alpha = 2/3$ の場合 第 1 近似として K_1, K_2, K_3, K_4 を考慮して前と同様に計算すると,

$$I A_{8.2} = 4.8214 \times 10^{-2}, \quad I A_{8.0} = 1.9558 \times 10^{-2},$$

$$I A_{7.7} = -2.8802 \times 10^{-2}$$

となるから

$$Q_I^2 = 7.88$$

次に第 2 近似として $K_1, K_2, \dots, K_6$ を考慮して計算

第 3 図

すると, $II A_{8.2} = 7.3982 \times 10^{-4}$, $II A_{8.0} = 1.8618 \times 10^{-4}$, $II A_{7.7} = -7.4781 \times 10^{-4}$ となるから

$$Q_{II}^2 = 7.94$$

を得る。

(ii) $\alpha = 1/2$ の場合

$$I A_{7.0} = 2.9336 \times 10^{-1}, \quad I A_{6.5} = -0.5416 \times 10^{-1},$$

$$I A_{6.2} = -3.0025 \times 10^{-1}$$

となるから $Q_I^2 = 6.58$

$$II A_{7.0} = 1.2662 \times 10^{-2}, \quad II A_{6.5} = -0.7762 \times 10^{-2},$$

$$II A_{6.2} = -2.4311 \times 10^{-2}$$

となるから $Q_{II}^2 = 6.66$

(iii) $\alpha = 1/3$ の場合

$$I A_{5.5} = 7.8734 \times 10^{-2}, \quad I A_{5.0} = -1.4498 \times 10^{-2},$$

$$I A_{4.8} = -8.8375 \times 10^{-2}$$

となるから $Q_I^2 = 5.06$

$$II A_{5.5} = -3.0745 \times 10^{-2}, \quad II A_{5.0} = 3.1467 \times 10^{-2},$$

$$II A_{4.8} = 8.0607 \times 10^{-2}$$

となるから $Q_{II}^2 = 5.18$

(III) 一辺の中央において辺長の α 倍の部分が固定され、他の部分が支持された正方形板 (第 4 図)

$x=0, x=1$ および $y=1$ の辺は支持辺であるから $K_n = K_n^- = K_m^- = 0$, また対称性により m は奇数であり, 一方 n はすべての正整数である。この場合は (I) における (9), (10) 式はそのまま用いられるが, (11) 式の代りに

$$L_m = \frac{2a^2}{\pi^2 D} K_m \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(m^2+n^2)^2 - Q^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。(12) 式を用いると (16) 式は次のように変形する。

$$\left. \begin{aligned} Q > m^2 : L_m &= \frac{a^2}{2\pi D} \frac{K_m}{Q} \left\{ \sqrt{Q+m^2} \coth \pi \sqrt{Q+m^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{Q-m^2} \cot \pi \sqrt{Q-m^2} \right\} \\ Q < m^2 : L_m &= \frac{a^2}{2\pi D} \frac{K_m}{Q} \left\{ \sqrt{m^2+Q} \coth \pi \sqrt{m^2+Q} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{m^2-Q} \coth \pi \sqrt{m^2-Q} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

第 4 図

(i) $\alpha=2/3$ の場合 第1近似として K_1, K_3, K_5, K_7 を考慮して前と同様に計算すると,

$$I A_{5,5} = -9.1845 \times 10^{-2},$$

$$I A_{5,7} = -0.0186 \times 10^{-2}, \quad I A_{5,9} = 6.1485 \times 10^{-2}$$

となるから $Q_I^2 = 5.70$

次に第2近似として $K_1, K_3, \dots, K_{11}$ を考慮すると

$$II A_{5,5} = 3.4535 \times 10^{-5}, \quad II A_{5,7} = 0.1447 \times 10^{-5},$$

$$II A_{5,9} = -2.4913 \times 10^{-5}$$

となるから $Q_{II}^2 = 5.71$

(ii) $\alpha=1/2$ の場合

$$I A_{5,5} = -3.0940 \times 10^{-2}, \quad I A_{5,6} = -0.0998 \times 10^{-2},$$

$$I A_{5,7} = 2.1298 \times 10^{-2}$$

となるから $Q_I^2 = 5.60$

$$II A_{5,5} = 7.4828 \times 10^{-4}, \quad II A_{5,6} = 1.4983 \times 10^{-4},$$

$$II A_{5,7} = -4.4061 \times 10^{-4}$$

となるから $Q_{II}^2 = 5.62$

(iii) $\alpha=1/3$ の場合

$$I A_{5,3} = -2.0052 \times 10^{-2}, \quad I A_{5,4} = -1.1224 \times 10^{-2},$$

$$I A_{5,5} = 1.3611 \times 10^{-2}$$

となるから $Q_I^2 = 5.41$

$$II A_{5,3} = 6.4362 \times 10^{-4}, \quad II A_{5,4} = 0.2298 \times 10^{-4},$$

$$II A_{5,5} = -0.6422 \times 10^{-4}$$

となるから $Q_{II}^2 = 5.42$

(IV) 一辺の一端から辺長の α 倍の部分が固定され他の部分が支持された正方形板 (第5図) $x=0, x=1$ および $y=1$ の辺は支持辺であるから $K_n = K_n^- = K_m^- = 0$, また m, n はすべての正整数となる。(17)式はこの場合にも用いられる。

(i) $\alpha=2/3$ の場合

第1近似として K_1, K_2, K_3, K_4 を考慮すると

$$I A_{5,3} = -0.9155, \quad I A_{5,5} = -0.1003,$$

$$I A_{5,7} = 0.4861$$

となるから $Q_I^2 = 5.52$

第2近似として $K_1, K_2, \dots, K_6$ を考慮すると

$$II A_{5,5} = -0.7739 \times 10^{-2}, \quad II A_{5,6} = 0.7541 \times 10^{-2},$$

$$II A_{5,7} = 2.1033 \times 10^{-2}$$

となるから $Q_{II}^2 = 5.55$

(ii) $\alpha=1/2$ の場合

$$I A_{5,0} = -1.0338, \quad I A_{5,1} = -0.1213,$$

$$I A_{5,2} = 0.9748$$

となるから $Q_I^2 = 5.11$

$$II A_{5,0} = -3.0893 \times 10^{-1}, \quad II A_{5,1} = -0.8462 \times 10^{-1},$$

$$II A_{5,2} = -0.1419 \times 10^{-1}$$

となるから $Q_{II}^2 = 5.14$

(iii) $\alpha=1/3$ の場合

$$I A_{4,4} = -4.7813 \times 10^{-1}, \quad I A_{4,5} = -0.1641 \times 10^{-1},$$

$$I A_{4,6} = 2.9213 \times 10^{-1}$$

となるから $Q_I^2 = 4.51$

$$II A_{4,4} = 1.1635, \quad II A_{4,5} = 0.3809,$$

$$II A_{4,6} = -0.1419$$

となるから $Q_{II}^2 = 4.57$

(V) 四辺の中央において辺長の α 倍の部分が固定され他の部分が支持された正方形板 (第6図) 前報⁽¹⁾において $\alpha=1/2$ および $\alpha=1/3$ の場合の計算をした。それらの結果をここに再記する。

(i) $\alpha=1/2$ の場合

$$Q_I^2 = 12.92, \quad Q_{II}^2 = 12.96$$

(ii) $\alpha=1/3$ の場合

$$Q_I^2 = 11.65, \quad Q_{II}^2 = 11.76$$

以上における計算結果を第7~11図の線図および第1表に示した。線図は Q の第2近似値を示している。また $\alpha=0$ および $\alpha=1$ に対する周知の値を併記した。

4. 実験

実験は辺長 $a=165$ mm, 板厚 $h=1.6$ および $h=2.3$ mm の軟鋼板を用い, 第12~14図に示すようにわくに取り付け, 低周波発振器と小形電磁石により板を共振させて, 共鳴音の最大のときの周波数を読取って基本

第5図

第6図

振動数を求めた。第7～11図に実験結果を記入した。測定値は固定条件に対しては低めに、支持条件に対しては高めに出る傾向があって、理想的な周辺条件の実現の困難性を痛感した。締付用ナットの締付力をゆるくして全周辺支持の場合に理論値にほぼ近い測定値が得られたので、全実験を通じて支持部分に対してはできるだけ同じ程度の締付力となるように注意した。一方固定部分に対しては強く締付けた。その結果第7～11図に示すような結果が得られた。

第1表 Ω の計算値

支持条件	$\alpha=0$	$\alpha=1/3$	$\alpha=1/2$	$\alpha=2/3$	$\alpha=1$
(I)の場合	2	2.75(2.75) [2.767]	2.86(2.87)	2.91(2.92)	2.933
(II)の場合	2	2.25(2.28)	2.57(2.58)	2.81(2.82)	2.933
(III)の場合	2	2.33(2.33)	2.37(2.37)	2.39(2.39)	2.396
(IV)の場合	2	2.12(2.14)	2.26(2.27)	2.35(2.36)	2.396
(V)の場合	2	3.41(3.43) [3.442]	3.59(3.60)	—	3.646

注 () の外は第2近似値、内は第1近似値、[] 内は倉田・岡村の値。

第7図 二対辺中央固定(第2図)の場合

第8図 二対辺端部固定(第3図)の場合

5. 考 察

計算値は有効数字3けたで第1近似と第2近似がほとんど一致し、また倉田・岡村⁽²⁾の値とも合っており

第9図 一辺中央固定(第4図)の場合

第10図 一辺端部固定(第5図)の場合

第11図 四辺中央固定(第6図)の場合

第 12 図

第 13 図

り, 実用上十分の精度内にあると考える. 実験値は主として正確な境界条件の実現が困難であるという理由によりかなりのばらつきがあるが, ほぼ計算結果と一致した.

次に第 2, 4 図および第 6 図の場合において, $\alpha \rightarrow 0$ のとき全周辺支持の場合の $Q=2$ と異なる値に収束しないかということについて検討する. いま第 15 図(a)のように長さ l の両端支持はりの両端から $\delta \cdot l$ の箇所に強制集中荷重 $P_0 \cos \omega t$ が作用する場合を考える. 振動変位を

$$W = \left(\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} C_m \sin m\pi x \right) \cos \omega t, \text{ ただし } x = X/l$$

とおけば, 最大運動エネルギー T および最大弾性エネルギー V は次式で与えられる.

$$T = \frac{\rho A l \omega^2}{4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} C_m^2, \quad V = \frac{\pi^4 EI}{4l^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} m^4 C_m^2$$

ただし ρ , A , EI は密度, 断面積および曲げこわさである. これらを用いてエネルギー停留の原理を適用すると

$$\frac{\pi^4 EI}{2l^3} (m^4 - Q^2) C_m = P_0 \{ \sin m\pi\delta + \sin m\pi(1-\delta) \}$$

ただし $Q^2 = \rho A l^4 \omega^2 / \pi^4 EI$

第 14 図

第 15 図

ここで $\delta \rightarrow 0$, $W_{x=\delta} = W_{x=1-\delta} = 0$ とすれば次式が得られる.

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m^2}{m^4 - Q^2} = 0$$

これは両端固定はりの振動数方程式

$$1 - \cos \pi \sqrt{Q} \cosh \pi \sqrt{Q} = 0$$

に一致することが確かめられる.

さて正方形板の問題にかえり, 代表例として第 2 図の問題において $\alpha \rightarrow 0$ の場合を考える. いま第 15 図(b)のように 2 点 ($x=1/2, y=\delta$) ($x=1/2, y=1-\delta$) において強制集中荷重 $P_0 \cos \omega t$ が作用すると考え, $\delta \rightarrow 0$ のときこれら 2 点のたわみが零であるとすれば, 前のはりの場合と同様にして $\alpha \rightarrow 0$ の場合の振動数方程式が得られるはずである. 前報⁽¹⁾における強制項として

$$Q_{mn} = P_0 \sin \frac{m\pi}{2} \{ \sin n\pi\delta + \sin n\pi(1-\delta) \}$$

これから

$$C_{mn} = \frac{Q_{mn}}{\{(m^2+n^2)^2 - Q^2\}/2} = \frac{(-1)^{(m-1)/2} 4n\pi\delta}{(m^2+n^2)^2 - Q^2}$$

これを用いると

$$w(1/2, \delta) = w(1/2, 1-\delta) \\ = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin n\pi\delta = 0$$

の条件から

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(m^2+n^2)^2 - Q^2} = 0$$

となる. しかるにこの二重無限級数は Q のいかなる有限値に対しても収束しない. したがって上式を導くとき $(m^2+n^2)^2 \neq Q^2$ としたが, これに対する固有振動は存在しない. 結局全周辺支持に対する $Q^2 = (m^2+n^2)^2$ となり, すなわち $\alpha \rightarrow 0$ の場合基本振動数とし

では $Q \rightarrow 2$ にならざるを得ないことになる。第4図および第6図の場合も上と同様になる。第3図および第5図の場合は当然 $\alpha \rightarrow 0$ に対し $Q \rightarrow 2$ となる。このようにして第7~11図の線図の左端はすべて $Q=2$ となる。

6. 結 論

部分的に固定された支持辺を持つ正方形板について

て、その代表的な場合の基本振動数を、前に提案した一般的な方法を適用して計算して線図を作製した。またこの結果を裏付けるための実験を行なった。

文 献

- (1) 太田・浜田, 機械学会論文集, 25-155 (昭34-7), 668.
- (2) 倉田・岡村, 第11回応用力学連合講演会論文抄録集, 第1部, (昭36), 71.

621-272.2 : 534.28

圧縮コイルばねの振動減衰率について*

綾 部 久 文**, 串 山 正**

Damping Factor of Helical Spring

by Hisafumi AYABE and Tadasu KUSUYAMA

This report deals with the damping factor of helical compression spring with a constant pitch and presents studies for the calculation of the additional stress on the spring at the time of surging, which is often a main cause of failure of the spring. The results of our experiments reveal that damping effects come from three major frictions, internal and external frictions of the coil itself, the contact friction of the both ends of the spring, and the friction when coils are driven home. If the logarithmic damping factor derived from the linear theory is taken into account for the clarification of experimental results, and if we consider the ratio ζ between the amplitude of the m th harmonics C_m and the geometrical minimum coil clearance a_T , the minimum damping factor is obtained as follows:

$$\xi_{\min} \cong 0.015 \quad \text{when } \zeta \leq 0.003, \quad \xi_{\min} \cong 1.6(\zeta)^{0.8} \quad \text{when } \zeta \geq 0.003$$

1. はじめに

圧縮コイルばねは、材料的な欠陥のほか、サージングにより付加応力が増大しても折損することが報告されている。そして、ばねの振動特性については多くの研究^{(1)~(3)}があり、振動振幅の減衰法に関する研究⁽⁴⁾やサージング時の振動振幅の計算法⁽⁵⁾も明らかにされているが、ばねの減衰率の特性を系統的に検討したものはほとんどないようである。

よって、本論文は、内燃機関の排気弁ばねを対象に数種のばねを製作して、その取付長さや取付方法を変えて実験し、ばねの対数減衰率に及ぼす諸因子の影響を明らかにすることを目的としたものである。

2. 理 論 式

ばねの対数減衰率を求めるには次の二つの方法が考

* 昭和37年4月2日 第39期通常総会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和36年11月28日.

** 正員, 三菱造船会社(長崎市飽ノ浦町1).

えられる。一つは、ばねに衝撃を与えて、その自由振動振幅の減衰から対数減衰率を求める方法(以下、自由振動法と呼ぶ)であり、他は、ばねの一端に周期的な強制力を加えて、ばねが共振するときの振動振幅と強制振幅から求める方法(以下、強制振動法と呼ぶ)である。このいずれの方法によっても対数減衰率は求められるが、それぞれ方法が異なるので別々に説明する。

2.1 自由振動法による対数減衰率 自由振動をしている両端固定のばねコイルのある点に抵抗線ひずみ計を張付け、応力の時間的変化を記録する場合を考える。

計測点における応力を τ , 時間を t , 両端固定のばねの基本振動の角振動数を ω , 減衰係数を b とすると、自由振動の方程式は、

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + 2b\frac{d\tau}{dt} + \omega^2\tau = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

であり、一般解は次の式で示される。