534.014

和差調波振動の共振曲線と安定性について*

山 本 敏 男**, 林 叡***

On the Response Curves and the Stability of "Summed and Differential Harmonic" Oscillations

by Toshio YAMAMOTO and Satoru HAYASHI

In the present paper, the authors obtain theoretically the response curves of summed and differential harmonic oscillations induced by symmetrical and unsymmetrical nonlinearities of spring forces, and they investigate the influences of nonlinearities and damping forces of those vibrations. Further the stability criteria of vibrations are analytically studied. The conclusions obtained are as follows:

(1) The characteristics of summed and differential harmonic oscillations are analogous to those of sub-harmonic oscillations of order 1/2 and 1/3.

(2) There are the critical values of damping coefficients, and the summed and differential harmonic oscillations cannot take place, when the magnitudes of damping are larger than these critical values.

(3) The loci of vertical tangency of the response curves divide the response curves into two parts, and the upper parts of the loci are the stable range, the lower unstable.

1. ま え が き

非線形ばね特性をもった多自由度系において発生する“和差調波振動”については、従来より解析的、実験的な研究をおこなって来ているが⁽¹⁾⁽²⁾、ここでは固有振動数がそれぞれ p_1, p_2 である 2 自由度非線形系に、二乗、三乗の非線形項が存在するとき、系に発生する $[p_1+p_2]$; $[2p_1+p_2]$, $[p_1+2p_2]$ 様式の和差調波振動について、その共振曲線および振動数を求め、かつ非線形項の係数、減衰係数が振動の発生、共振曲線などにどのように影響するかを調べた。またこれらの和差調波振動と、1/2, 1/3 次分数調波振動が、いろいろの点で類似していることをもあきらかにし、さらに和差調波振動の安定性を Andronow および Witt の方法⁽³⁾にしたがって考察し、1 自由度の非線形系においてえられている結果⁽⁴⁾⁽⁵⁾と定性的に同様の結論をえた。

2. 共振曲線について

一般の多自由度系に発生する和差調波振動の共振曲

* 昭和 37 年 4 月 4 日 第 39 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 37 年 6 月 6 日。

** 正員、名古屋大学工学部。

*** 准員、名古屋大学工学部 (名古屋千種区不老町)。

線を求めることは計算が非常に複雑となるので、ここでは比較的簡単な 2 自由度の振動系に対して解析をおこなう。すなわち

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + C_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2x_2 + \varepsilon f(x_1) &= a \cos \omega t \\ m\ddot{x}_2 + C_2\dot{x}_2 + k_2x_1 + k_1x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

の場合を考える。(1) 式を次の変換で無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{x_i}{x_0}, \quad t' = \sqrt{\frac{k_1}{m}} t, \quad \omega' = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \omega \\ C_i' &= \frac{C_i}{\sqrt{k_1 m}}, \quad \gamma_{12} = \frac{k_2}{k_1}, \quad x_0 = \frac{a}{fk} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)'$$

(1)' 式によって (1) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1' + C_1'\dot{x}_1' + x_1' + \gamma_{12}x_2' + \varepsilon f(x_1') &= f \cos \omega t \\ \ddot{x}_2' + C_2'\dot{x}_2' + \gamma_{12}x_1' + x_2' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)''$$

$$\varepsilon f(x_1') = \alpha x_1'^2 + \beta x_1'^3 \quad (\varepsilon: \text{微小量})$$

(1)'' 式は座標変換

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{X_1}{\sqrt{2}} + \frac{X_2}{\sqrt{2}} \\ x_2' &= \frac{X_1}{\sqrt{2}} - \frac{X_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

によって次のように基準座標に変換される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_1 + p_1^2 X_1 &= -C \dot{X}_1 - C_{12} \dot{X}_2 - \alpha_0 (X_1 + X_2)^2 - \frac{4}{3} \beta_0 (X_1 + X_2)^3 + f_0 \cos \omega t \\ \ddot{X}_2 + p_2^2 X_2 &= -C_{12} \dot{X}_1 - C \dot{X}_2 - \alpha_0 (X_1 + X_2)^2 - \frac{4}{3} \beta_0 (X_1 + X_2)^3 + f_0 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \alpha, & \beta_0 &= \frac{3}{16} \beta, & f_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} f, & C &= \frac{C_1' + C_2'}{2} \\ C_{12} &= \frac{C_1' - C_2'}{2}, & p_2^2 &= 1 \pm \gamma_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)'$$

和差調波振動の定常解はすでに摂動法によって求められているが⁽¹⁾⁽²⁾, この方法は定常解の安定性を判別するためには不都合であるので, ここでは Andronow および Witt の方法によって定常解を求め, かつその安定性について考察をおこなった.

2.1 $[2p_1 + p_2]$ 様式の和差調波振動 この様式の和差調波振動は多自由度非線形系が三乗の非線形項をもつときに発生し, 大振幅で振動している二つの振動の振動数 ω_1, ω_2 の間には,

$$\omega_1 \doteq p_1 \quad \omega_2 \doteq p_2 \quad \omega = 2\omega_1 + \omega_2 \dots\dots\dots (4)$$

の関係がある.

(3) 式の両辺に $(\omega_i^2 - p_i^2)X_i$ ($i=1, 2$) をくわえ, $\beta_0, C, C_{12}, (\omega_i^2 - p_i^2)X_i$ は ε と同程度の微小量と考える. まず解の形を

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= R_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + f_1 \cos \omega t \\ X_2 &= R_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2) + f_2 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left(f_1 = \frac{f_0}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad f_2 = \frac{f_0}{\omega_2^2 - \omega^2} \right)$$

とおく. ここで $R_1, R_2, \theta_1, \theta_2$ をゆっくり変化する時間の関数と考え, (5) 式を (3) 式に代入し両辺の $\cos(\omega_i t - \theta_i), \sin(\omega_i t - \theta_i)$ の項をそれぞれ等しくおくと次式をうる. この際, ε に関する二次以上の微小量は無視する.

$$\left. \begin{aligned} -2\omega_1 \frac{dR_1}{dt} &= C\omega_1 R_1 + 2R_1 R_2 \beta_0 P \sin(2\theta_1 + \theta_2) \\ -2\omega_2 \frac{dR_2}{dt} &= C\omega_2 R_2 + R_1^2 \beta_0 P \sin(2\theta_1 + \theta_2) \\ 2\omega_1 R_1 \frac{d\theta_1}{dt} &= \lambda_1 R_1 - \beta_0 R_1 (R_1^2 + 2R_2^2) - 2R_1 R_2 \beta_0 P \cos(2\theta_1 + \theta_2) \\ 2\omega_2 R_2 \frac{d\theta_2}{dt} &= \lambda_2 R_2 - \beta_0 R_2 (2R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 \beta_0 P \cos(2\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \omega_i^2 - p_i^2 - 2\beta_0 P^2 \quad (i=1, 2) \\ P &= f_1 + f_2 = f_0 \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)'$$

(6) 式において

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

とおいてえられる4個の式と (4) 式の $\omega = 2\omega_1 + \omega_2$ の関係から次のように $\omega_1, \omega_2, R_1, R_2$ に関する定常解が求まる.

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \eta_1 \omega + \frac{1}{\omega} \left[f_2 \{ \omega^2 - (2p_1 + p_2)^2 \} + f_3 \beta_0 P^2 \pm \frac{f_3}{2f_1^2} \sqrt{D} \right] \\ \omega_2 &= \eta_2 \omega - \frac{2}{\omega} \left[f_2 \{ \omega^2 - (2p_1 + p_2)^2 \} + f_3 \beta_0 P^2 \pm \frac{f_3}{2f_1^2} \sqrt{D} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} R_1^2 &= \frac{2\gamma_2}{\beta_0 f_1^2} [\gamma_1 \gamma_2 f_1 \{\omega^2 - (2p_1 + p_2)^2\} - \beta_0 f_6 P^2 \pm 3\gamma_1 \gamma_2 \sqrt{D}] \\ R_2^2 &= \frac{\gamma_1}{\beta_0 f_1^2} [\gamma_1 \gamma_2 f_1 \{\omega^2 - (2p_1 + p_2)^2\} - \beta_0 f_6 P^2 \pm 3\gamma_1 \gamma_2 \sqrt{D}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{ここに } \gamma_i = \frac{p_i}{2p_1 + p_2} \quad (i=1, 2)$$

$$D = 4\gamma_2 f_1 \beta_0 P^2 \{\omega^2 - (2p_1 + p_2)^2\} - f_4 \beta_0^2 P^4 - f_1^2 C^2 \omega^2$$

$$f_1 = \gamma_1^2 + 8\gamma_1 \gamma_2 + 4\gamma_2^2$$

$$f_2 = \frac{1}{2f_1} (2\gamma_2^3 + 2\gamma_2^2 \gamma_1 - 4\gamma_1^2 \gamma_2 - \gamma_1^3)$$

$$f_3 = \frac{1}{f_1^2} (14\gamma_2^3 + 6\gamma_2^2 \gamma_1 - 9\gamma_2 \gamma_1^2 - \gamma_1^3)$$

$$f_4 = \frac{4}{\gamma_1} (16\gamma_2^3 + 3\gamma_2^2 \gamma_1 + 20\gamma_2 \gamma_1^2 + 2\gamma_1^3)$$

$$f_5 = 2\gamma_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_2^2$$

(8), (9) 式は $[2p_1 + p_2]$ 様式の和差調波振動に対するものであるが, $[p_1 + 2p_2]$ 様式のもののはこれらの式中の添字の1と2を交換すればえられる。

同様の方法でこの場合の 1/3 次分数調波振動の共振曲線を求めると,

$$R_i^2 = \frac{1}{\beta_0} \left[\left\{ \left(\frac{\omega}{3} \right)^2 - p_i^2 \right\} - \frac{3}{2} \beta_0 P^2 \pm \sqrt{\beta_0 P^2 \left\{ \left(\frac{\omega}{3} \right)^2 - p_i^2 \right\} - \frac{7}{4} \beta_0^2 P^4 - \left(C \frac{\omega}{3} \right)^2} \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{ここに } P = f_0 \left(-\frac{9}{8\omega^2} + \frac{1}{p_j^2 - \omega^2} \right) \quad (i, j=1, 2 \quad i \neq j)$$

(9) 式において $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, したがって f_1, f_4, f_6 は常に正となり, (9) 式と (10) 式の比較からわかるように, 1/3 次分数調波振動と和差調波振動の共振曲線は定性的には同傾向の曲線である。減衰係数 C のいろいろの大きさの場合に対する (9), (10) 式の数値計算によってえられた共振曲線群を第1図に示す。

第1図は対称性非線形項が正, すなわち $\beta_0 > 0$ の場合で, 和差調波振動, 1/3 次分数調波振動とも共振曲線は hard spring 形となる。図中鎖線で示したのは後述の安定, 不安定領域の境界線であり, 実線は安定な振動の, 点線は不安定な振動の共振曲線である。また和差調波振動の共振曲線では縦軸に二つの振動の振幅の和 $R_1 + R_2$ をとってある。この場合は減衰係数が零でなければ共振曲線は閉曲線となり, 上限と下限が存在する。第2図をみ

強制力の振幅 $f_0=0.432$, 三乗項係数 $\beta_0=0.1$, 固有振動数 $p_1=0.785$, $p_2=1.177$,
 $3p_1=2.355$, $2p_1+p_2=2.746$, $p_1+2p_2=3.139$, $3p_2=3.531$

第1図 $[2p_i + p_j]$ 様式の和差調波振動と 1/3 次分数調波振動の共振曲線 ($\beta_0 > 0$ の場合)

るとこのありさまがよくわかる。第2図は $[2p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動に対して示したものであるが、他の $[3p_1]$, $[3p_2]$, $[p_1+2p_2]$ の場合も同様の傾向となる。減衰係数 $C=0$ の場合には共振曲線が横軸に接し振幅が零となる点が存在するが、この点是不安定点である[第2図(a)のA点]。 $C=0$ のときでも安定な共振曲線は常に

$$\left. \begin{aligned} R_i^2 &\geq \frac{P^2}{2} \\ &\dots\dots(1/3\text{次分数調波振動の場合 } \omega \doteq p_i) \\ R_1^2 &\geq \left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1} \right) \left(\frac{3\gamma_1\gamma_2}{f_1} \right) P^2 \\ R_2^2 &\geq \left(\frac{3\gamma_1\gamma_2}{f_1} \right) P^2 \\ &\dots\dots([2p_1+p_2]\text{ 様式の和差調波振動の場合 } \omega \doteq 2p_1+p_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

の範囲に存在しているので、振動系に少なくとも(11)式で与えられる振幅より大きな変位をおこす衝撃を与えなければ振動は発生しない。(11)式の結論は共振曲線と安定、不安定領域の境界線との交点(たとえば第2図のB)を求めることによってえられる。

第2図(a)からわかるように共振曲線の上限と下限は減衰係数の増大とともに接近しついには一致してしまう。このときの減衰係数より大きな減衰係数では $[2p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動は発生しなくなる。これは1/3次分数調波振動についても同じである。したがってこのときの減衰係数を臨界減衰係数 C_c とよぶことにする。この C_c は

$$\left. \begin{aligned} D(\omega^2, C) &= 0 \\ \frac{\partial D(\omega^2, C)}{\partial \omega^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

から求める。ここに

$$\left. \begin{aligned} D &= \beta_0 P^2 \left\{ \left(\frac{\omega}{3} \right)^2 - p_i^2 \right\} - \frac{7}{4} \beta_0^2 P^2 - \left(C \frac{\omega}{3} \right)^2 \\ &\quad (1/3\text{次分数調波振動}) \\ D &= 4\gamma_2 f_1 \beta_0 P^2 \{ \omega^2 - (2p_1+p_2)^2 \} - f_4 \beta_0^2 P^4 \\ &\quad - f_1^2 C^2 \omega^2 \\ &\quad ([2p_1+p_2]\text{ 様式の和差調波振動}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)'$$

(12) 式を ω^2 , C の連立方程式とし、 C について解くと臨界減衰係数 C_c が求まる。 C_c は解析的には求めえないが数値的にはえられる。一例を第3図に示す。臨界減衰係数 C_c は固有振動数 p_1 , p_2 が一定なら $\beta_0 \cdot f_0^2$ のみの関数となり、 $\beta_0 \cdot f_0^2$ が大きいほど C_c は大きくなる。また1/3次分数調波振動 $[3p_1]$, $[3p_2]$ の

第2図 (a) $[2p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動の共振曲線,
(b) $[2p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動の位相遅れ曲線

第3図 臨界減衰係数 C_c

強制力の振幅 $f_0=0.432$, 三乗項係数 $\beta_0=-0.1$, 固有振動数 $p_1=0.785$, $p_2=1.177$, $3p_1=2.355$, $2p_1+p_2=2.746$, $p_1+2p_2=3.139$, $3p_2=3.531$

第4図 $[2p_i + p_j]$ 様式の和差調波振動と $1/3$ 次分数調波振動の共振曲線 ($\beta_0 < 0$ の場合)

第5図 $[3p_1]$ 分数調波振動の共振曲線 ($\beta_0 < 0$ の場合)

場合と $[2p_1 + p_2]$, $[p_1 + 2p_2]$ の場合を比較してわかるように、共振点が高い振動数領域にあるものほど C は小さく、振動が発生しにくい。

$\beta_0 < 0$ の場合は soft spring 形の共振曲線となり、下限が存在することは $\beta_0 > 0$ の場合と同様で、(11) 式で与えられる関係も成立するが、上限は $\beta_0 > 0$ の場合とかなりようすが異なっている。 $\beta_0 > 0$ の場合の $1/3$ 次分数調波振動の共振曲線を (10) 式を用いて形式的に計算すると第5図のような形をとるが、(10) 式の近

強制力の振動数 ω ($\beta_0=0.1$)

(a) $\beta_0 > 0$

強制力の振動数 ω ($\beta_0=-0.1$)

(b) $\beta_0 < 0$

強制力の振幅 $f_0=0.432$, 減衰係数 $C=0$

第6図 $[2p_i + p_j]$ 様式の和差調波振動の振動数 ω_1 , ω_2

似式の成立する範囲は共振点付近に限られている。したがって第4図はその意味で共振曲線が途中までしか求めてない。この間の事情は非線形系の他の振動の共振曲線におけると同じである。

$[2p_1+p_2]$, $[p_1+2p_2]$ 様式の和差調波振動の振動数 ω_1 , ω_2 と強制外力の振動数 ω との関係を与える (8) 式を図示すると第6図のようになる。第6図 (a) は $\beta_0 > 0$, 第6図 (b) は $\beta_0 < 0$ の場合である。(8) 式において ε の一乗以上の小さい量を無視すると, ω_1 , ω_2 の第零次近似として

$$\omega_{i0} = \gamma_i \omega \quad \dots\dots\dots (13)$$

をうる。これを図において点線で示してある。図からわかるように $\omega_1 - \omega$, $\omega_2 - \omega$ 曲線はほぼ直線的に変化し2本一組となっているが、後述の安定性の解析から明らかなように、 $\beta_0 > 0$ なら $\omega_1 - \omega$ 曲線では上側の曲線が安定な定常解に対応し、下側のは不安定解のものであり、 $\omega_2 - \omega$ 曲線では上が不安定、下が安定解に対応する。 $\beta_0 < 0$ ならこの関係は逆となる。 $\beta_0 > 0$, $C \neq 0$ のときの $\omega_i - \omega$ 曲線は閉曲線となる。また $\beta_0 > 0$ なら ω_1 は ω_{10} より小さく、 ω_2 は ω_{20} より大きい。 $\beta_0 < 0$ ならこの関係は逆になる。

$[2p_1+p_2]$, $[p_1+2p_2]$ 様式の和差調波振動の位相おくれの計算例として、 $[2p_1+p_2]$ の場合について (6) 式からもとめた位相遅れ $\phi = 2\theta_1 + \theta_2$ を第2図 (b) に示した。図で実線は安定解に、点線は不安定解に対応する位相遅れ曲線である。これは $\beta_0 > 0$ の場合で $C \neq 0$

であれば位相遅れ曲線は閉曲線となり、第2図 (a) における共振曲線の振幅最小の点Cは位相遅れ曲線のC'の点に対応し、位相遅れは $\pi/2$ よりわずかに小さい値をとる。また、共振曲線の頂点付近で、共振曲線と安定、不安定の境界線との交点Dは (b) 図のD'に対応し、この位相遅れは $\phi = \pi/2$ である。 $C=0$ の場合には安定解〔すなわち第2図 (a) の曲線I〕に対応する位相遅れは $\phi_s = 0$ で〔第2図 (b) のB'B'〕、不安定解に対しては (a) 図のAB間では $\phi = 0$ (第2図A'B'), A点より高い振動数領域〔第2図 (a) の曲線II〕に対しては $\phi_u = \pi$ (第2図 (b) のA''A'') となる。 $\beta_0 < 0$ の場合は図示しなかったが、閉曲線とはならず、安定な解に対応する位相遅れは $2\pi \geq \phi_s \geq (3/2)\pi$ に存在し、不安定解に対応する位相遅れは一部が $\phi_u \geq (3/2)\pi$ で大部分は $(3/2)\pi \geq \phi_u \geq \pi$ に存在する。

1/3 次分数調波振動の位相遅れ曲線は示さなかったが、 $[2p_1+p_2]$ 様式の振動と定性的に同傾向の曲線となる。

2.2 $[p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動 この場合は振動数 ω_1 , ω_2 と外力の振動数 ω の間には

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

の関係がある。 $[2p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動の場合と同じ方法によって次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} -2\omega_1 \frac{dR_1}{dt} &= C\omega_1 R_1 + \alpha_0 R_2 P \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -2\omega_2 \frac{dR_2}{dt} &= C\omega_2 R_2 + \alpha_0 R_1 P \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 2\omega_1 \frac{d\theta_1}{dt} &= \lambda_1 R_1 - \beta_0 R_1 (R_1^2 + 2R_2^2) - \alpha_0 R_2 P \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 2\omega_2 \frac{d\theta_2}{dt} &= \lambda_2 R_2 - \beta_0 R_2 (2R_1^2 + R_2^2) - \alpha_0 R_1 P \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \omega_i^2 - p_i^2 - 2\beta_0 P^2 \\ P &= f_1 + f_2 = f_0 \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(15) 式において

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = 0$$

と置いて定常解を求めると

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \gamma_1 \omega + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{2\omega(1 + 2\gamma_1\gamma_2)} [(1 + \gamma_1\gamma_2) \{\omega^2 - (p_1 + p_2)^2\} - 2\beta_0 P^2 \pm \sqrt{D}] \\ \omega_2 &= \gamma_2 \omega - \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{2\omega(1 + 2\gamma_1\gamma_2)} [(1 + \gamma_1\gamma_2) \{\omega^2 - (p_1 + p_2)^2\} - 2\beta_0 P^2 \pm \sqrt{D}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$R_{1,2}^2 = \frac{\gamma_{2,1}}{\beta_0(1 + 2\gamma_1\gamma_2)} [\gamma_1\gamma_2 \{\omega^2 - (p_1 + p_2)^2\} - 2\beta_0 P^2 \pm 2\gamma_1\gamma_2 \sqrt{D}] \dots\dots\dots (18)$$

ここに

$$D = \frac{1}{\gamma_1\gamma_2} (\alpha_0^2 P^2 - \gamma_1\gamma_2 C^2 \omega^2), \quad \gamma_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2} \dots\dots\dots (18)'$$

第7図 $[p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動と $1/2$ 次分数調波振動の共振曲線 ($\beta_0 > 0$ の場合)

第8図 (a) $[p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動の共振曲線
(b) $[p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動の位相遅れ曲線

同じ方法によって $1/2$ 次分数調波振動の共振曲線を求めると

$$R_i^2 = \frac{1}{\beta_0} \left[\left\{ \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 - p_i^2 \right\} - 2\beta_0 P^2 \pm \sqrt{\alpha_0^2 P^2 - \left(C \frac{\omega}{2} \right)^2} \right] \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$P = f_0 \left(-\frac{4}{3\omega^2} + \frac{1}{p_j^2 - \omega^2} \right) \quad (i, j=1, 2 \quad i \neq j)$$

となる。

$1/2$ 次分数調波振動, $[p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動の共振曲線は第7, 10図に示すように, やはり同傾向の曲線となる。第7図にはいろいろの減衰係数 C に対する $\beta_0 > 0$ の場合の共振曲線群が示してある。この図においても鎖線は安定, 不安定領域の境界線であり, 実線は安定な, 点線は不安定な振動に対する共振曲線である。また和差調波振動の共振曲線は縦軸に R_1+R_2 がとってある。減衰係数が小さいときには共振曲線の頂点付近で飛び移りをおこす不連続な共振曲線となるが, 減衰係数が大きくなると第8図の $C=0.125$ の場合を示すように飛び移りをおこなわない連続的な曲線となる。この種の共振曲線の頂点は減衰係数の増加とともにしだいに低くなり, ついに最大振幅は零となりそれより大きな減衰係数では $1/2$ 次分数調波振動, $[p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動は発生しなくなる。

このときの減衰係数をまえの $[2p_1+2p_2]$ 様式の場合にならって臨界減衰係数 C_c とよぶことにし, 次式から算出する。

$$\left. \begin{aligned} R^2(\omega^2, C) &= 0 \\ \frac{\partial R^2(\omega^2, C)}{\partial \omega^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで $R^2(\omega^2, C)$ は (18), (19) 式であらわされる共振曲線の式である。(20) 式からえられる臨界減衰係数 C_c は $|\alpha_0 P| \ll 1$ のときには近似的に

$$\left. \begin{aligned} C_c &\doteq \frac{\alpha_0 |P|}{p_1 p_2} \quad ([p_1 + p_2] \text{ 様式 の和差調波振動}) \\ C_c &\doteq \frac{\alpha_0 |P|}{p_i^2} \quad (1/2 \text{ 次分数調波振動}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

となる。 $\alpha_0 |P|$ が大きくなるにしたがって C_c は (21) 式からえられる値より大きくなる。第9図に (20) 式からえられる C_c の値を示す。この図からも $\alpha_0 |P|$ が小さいときには C_c は α_0 に対しほぼ直線的に変化し

第9図 臨界減衰係数

第10図 $[p_1 + p_2]$ 様式 の和差調波振動と 1/2 次分数調波振動の共振曲線 ($\beta_0 < 0$ の場合)

ている。また $[2p_1]$, $[2p_2]$, $[p_1 + p_2]$ に関する C_c 曲線を比較してわかるように振動数の高いものほど C_c は小さく、振動は発生しにくい。この点は前述の第3図の場合と同じである。

第10図の $\beta_0 < 0$ の場合は減衰係数が大きくなると共振曲線に下限が生じ振動を発生させるためには振動系に適当な衝撃を与えねばならない。減衰係数の小さい場合は $\beta_0 > 0$ の場合と同様、振動の発生点付近で連続な共振曲線となる。図中曲線が途中までしか示していないのは前述の $[2p_1 + p_2]$, $[p_1 + 2p_2]$ 様式の振動における $\beta_0 < 0$ の場合と同じ理由からである。

第11図には $[p_1 + p_2]$ 様式 の和差調波振動の振動数の間の関係を示してあり、この場合にも $\omega_1 - \omega$, $\omega_2 - \omega$ 曲線はほぼ直線的に変化していることがわかる。図において点線は ω_1 , ω_2 の第零次近似 $\omega_{10} = \gamma_1 \omega$, $\omega_{20} = \gamma_2 \omega$ の直線であり、 $\beta_0 > 0$ [第11図(a)] の場合は2本一組の実線のうち $\omega_2 - \omega$ 曲線では下のほうが安定な解に対応し、上のほうは不安定、 $\omega_1 - \omega$ 曲線では上が安定、下が不安定な解のものである。 $\beta_0 < 0$ [第11図(b)] ではこの関係は逆になる。

$[p_1 + p_2]$ 様式 の和差調波振動の位相遅れは (15) 式から力学的に意味のある $\phi = \theta_1 + \theta_2$ を求めることができ、第8図(b)のようになる。この図では一例として $\beta_0 > 0$ の場合を示してある。実線が安定解に、点線が不安定解に対応する位相遅れ曲線である。図中、曲線となっているのが $C \neq 0$ の場合で、安定、不安定の境界線は $\phi = \pi/2$ で、これより下部が安定、上部が不安定領域となっている。 $\beta_0 < 0$ の場合は $\phi = \pi/2$ を中心として安定、不安定の関係が逆転しており、位相遅れ曲線は $\beta_0 > 0$ の場合とほぼ同傾向の曲線となる。

ここで

$$\xi = \xi_0 e^{st}, \quad \zeta = \zeta_0 e^{st}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{st} \dots\dots\dots (24)$$

とおき, これを (23) 式に代入すると,

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_1 R_{10} S \xi - 2C\omega_2 R_{20} \zeta + \{\lambda_1 - \beta_0(R_{10}^2 + 2R_{20}^2)\} R_{10}^2 \varphi &= 0 \\ -2\omega_2 C R_{20} \xi + R_{10} \omega_2 (C + 2S) \zeta + \{\lambda_2 - \beta_0(2R_{10}^2 + R_{20}^2)\} R_{10} R_{20} \varphi &= 0 \\ \{\lambda_1 + \beta_0(R_{10}^2 + 2R_{20}^2)\} R_{10} \xi + \{\lambda_2 + \beta_0(2R_{10}^2 + R_{20}^2)\} R_{20} \zeta + \omega_2 R_{20}^2 (3C + 2S) \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ξ, ζ, φ に関する連立一次方程式となる。(25) 式が $\xi = \zeta = \varphi = 0$ 以外の解をもつためには (25) 式の係数からなる行列式が零でなくてはならない。すなわち,

$$\begin{aligned} 4\omega_1^2 \omega_2 R_{10}^4 S^3 + 16\omega_1 \omega_2^2 C R_{10}^2 R_{20}^2 S^2 + \frac{R_{10}^2 \omega_1}{(2\omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 - \omega_1^2)^2} [C\omega_1 \omega_2 (2\omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 - \omega_1^2) \\ - \{\lambda_1 \omega_2 (\omega_2^2 + 4\omega_1 \omega_2 - \omega_1^2) - \lambda_2 \omega_1 (2\omega_1^2 + 10\omega_1 \omega_2 + 2\omega_2^2)\} \{(2\omega_1 + 2\omega_2) \lambda_1 \\ - (\omega_1 + 4\omega_2) \lambda_2\}] S - \frac{C\omega_1 R_{10}^2}{(2\omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 - \omega_1^2)^2} [3C^2 \omega_1 \omega_2 (2\omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 - \omega_1^2) \\ + \{\lambda_1 \omega_2 (8\omega_2^2 + 4\omega_1 \omega_2 - \omega_1^2) - \lambda_2 \omega_1 (2\omega_1^2 + 10\omega_1 \omega_2 + 2\omega_2^2)\} \{(2\omega_1 + 2\omega_2) \lambda_2 \\ - (\omega_1 + 4\omega_2) \lambda_1\}] = 0 \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

Routh-Hurwitz の安定条件より,

$$\begin{aligned} -3C^2 \omega_1 \omega_2 (2\omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 - \omega_1^2) + \{\lambda_1 \omega_2 (8\omega_2^2 + 4\omega_1 \omega_2 - \omega_1^2) - \lambda_2 \omega_1 (2\omega_1^2 \\ + 10\omega_1 \omega_2 + 2\omega_2^2)\} \{(2\omega_1 + 2\omega_2) \lambda_2 - (\omega_1 + 4\omega_2) \lambda_1\} > 0 \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

であれば (27) 式の根 S の実数部が負となり, (6) 式の定常解 (9) が安定である。この不等式と共振曲線 (9) との関係を知りやすくするために (9), (9)' 式の関係をもちいて (27) 式を変形すると, 安定条件として (27) 式の代りに

$$-\left\{ \pm \beta_0 \frac{R_{10}^2 f_1 f_5^2}{2\gamma_2} \sqrt{D} \right\} < 0 \dots\dots\dots (28)$$

をうる。ここに

$$D = 4\gamma_2 f_1 \beta_0 P^2 \{\omega^2 - (2p_1 + p_2)^2\} - f_4 \beta_0^2 P^4 - f_1^2 C^2 \omega^2 \dots\dots\dots (28)'$$

3. 和差調波振動の安定性について

和差調波振動の振幅, 位相遅れの定常値 $R_{10}, R_{20}, \phi_0 = 2\theta_{10} + \theta_{20}$ からの微小なずれの時間的経過を調べることによって安定性の判別をおこなう。

3.1 $[2p_1+p_2]$ 様式の和差調波振動

$$R_1 = R_{10} + \xi, \quad R_2 = R_{20} + \zeta, \quad \phi = \phi_0 + \varphi \dots\dots\dots (22)$$

とおき, ξ, ζ, φ は振幅 R_1, R_2 , 位相 ϕ の定常値からのわずかなずれとする。(22) 式を (6) 式に代入し, ξ, ζ, φ に関する二次以上の微小量を無視すると, 次の式をうる。

$$\left. \begin{aligned} -2\omega_1 R_{10} \frac{d\xi}{dt} &= -2C\omega_2 R_{20} \zeta \\ &\quad + \{\lambda_1 - \beta_0(R_{10}^2 + 2R_{20}^2)\} \varphi \\ -2\omega_2 R_{20} \frac{d\zeta}{dt} &= -2C\omega_1 R_{10} \xi \\ &\quad + \{\lambda_2 - \beta_0(2R_{10}^2 + R_{20}^2)\} \varphi \\ \omega_1 R_{10}^2 \frac{d\varphi}{dt} &= -\{\lambda_1 + \beta_0(R_{10}^2 + 2R_{20}^2)\} R_{10} \xi \\ &\quad - \{\lambda_2 + \beta_0(2R_{10}^2 + R_{20}^2)\} R_{20} \zeta \\ &\quad - 3C\omega_2 R_{10}^2 \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

..... (23)

..... (24)

..... (25)

..... (26)

..... (27)

..... (28)

..... (28)'

であり, 共振曲線 (9) 式の平方根の D と同一であるので, (9), (28) 式から安定条件は

$$R_{1,2}^2 > \frac{2\gamma_2}{\beta_0 f_1^2} [\gamma_1 \gamma_2 f_1 \{\omega^2 - (2p_1 + p_2)^2\} - \beta_0 f_6 P^2] \dots\dots\dots (29)$$

とかきなおすことができる. (31) 式を零, すなわち $D=0$ とおけば安定と不安定の境界の条件が与えられる. したがって (29) 式の不等号を等号でおきかえてえられる曲線は, 共振曲線の安定領域と不安定領域の境界線となり, このとき $D=0$ となって (9) 式の平方根内が零になるところから, この曲線は共振曲線にひいた垂直接線の接点の軌跡となることがわかる. そしてこの曲線の上部にある共振曲線が安定解に対応し, 下部が不安定解に対応している. たとえば第1図の一点鎖線が安定, 不安定の境界線であり, 実線, 点線がそれぞれ安定な共振曲線, 不安定な共振曲線である.

$[p_1 + 2p_2]$ 様式の場合は添字が入れ代るのみで, 他は $[2p_1 + p_2]$ の場合と全く同じである.

3.2 $[p_1 + p_2]$ 様式の和差調波振動 $[p_1 + p_2]$ 様式の和差調波振動の安定性についても同様に計算できる. すなわち,

$$R_1 = R_{10} + \xi, \quad R_2 = R_{20} + \zeta, \quad \phi = \phi_0 + \varphi$$

を (15) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} -2\omega_1 \frac{d\xi}{dt} &= C\omega_1 \xi - \frac{R_{20}}{R_{10}} C\omega_2 \zeta + \{\lambda_1 - \beta_0(R_{10}^2 + 2R_{20}^2)\} R_{10} \varphi \\ -2\omega_2 \frac{d\zeta}{dt} &= -\frac{R_{10}}{R_{20}} C\omega_1 \xi + C\omega_2 \zeta + \{\lambda_2 - \beta_0(2R_{10}^2 + R_{20}^2)\} R_{20} \varphi \\ 2\omega_1 R_{10}^2 \frac{d\varphi}{dt} &= -2\beta_0 R_{10}(R_{10}^2 + 2R_{20}^2) \xi - 2\beta_0 R_{20}(2R_{10}^2 + R_{20}^2) \zeta - 2C\omega_1 R_{10}^2 \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

(30) 式に (24) 式を代入して

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 R_{10}(C + 2S) \xi - R_{20} C \omega_2 \zeta + \{\lambda_1 - \beta_0(R_{10}^2 + 2R_{20}^2)\} R_{10}^2 \varphi &= 0 \\ -R_{10} C \omega_1 \xi + \omega_2 R_{20}(C + 2S) \zeta + \{\lambda_2 - \beta_0(2R_{10}^2 + R_{20}^2)\} R_{20}^2 \varphi &= 0 \\ \beta_0 R_{10}(R_{10}^2 + 2R_{20}^2) \xi + \beta_0 R_{20}(2R_{10}^2 + R_{20}^2) \zeta + \omega_1 R_{10}^2(C + S) \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

となる. (31) 式からまえの (26) 式に相当する

$$\begin{aligned} 4\omega_1^2 \omega_2 R_{10}^2 S^3 + 8\omega_1^2 \omega_2 R_{10}^2 C S^2 + 4 \left[\omega_1^2 \omega_2 C^2 R_{10}^2 - \frac{\beta_0(\omega_1^2 + 4\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \{(2\omega_1 + \omega_2) \lambda_2 \right. \\ \left. - (\omega_1 + 2\omega_2) \lambda_1\} R_{10}^4 \right] S - \frac{2C\beta_0 \omega_1}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} (\omega_1^2 + 4\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) \{(2\omega_1 + \omega_2) \lambda_2 \\ \left. - (\omega_1 + 2\omega_2) \lambda_1\} = 0 \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

をうる.

$$-\beta_0 \{(2\omega_1 + \omega_2) \lambda_2 - (\omega_1 + 2\omega_2) \lambda_1\} > 0 \dots\dots\dots (33)$$

によって Routh-Hurwitz の安定条件がすべてみたされる. この条件は (18) 式をもちいて次のようにかきなおすことができる.

$$\pm \beta_0 (\gamma_2 - \gamma_1) \sqrt{\frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} (\alpha_0^2 P^2 - \gamma_1 \gamma_2 C^2 \omega^2)} > 0 \dots\dots\dots (34)$$

さらに (18) 式と (34) 式から

$$R_{1,2}^2 > \frac{\gamma_{2,1}}{\beta_0(1 + 2\gamma_1 \gamma_2)} [\gamma_1 \gamma_2 \{\omega^2 - (p_1 + p_2)^2\} - 2\beta_0 P^2] \dots\dots\dots (35)$$

をうる. (35) 式の不等号を等号でおきかえた式が安定, 不安定領域の境界線となり, 同時に共振曲線にひいた垂直接線の接点の軌跡であることは, $[2p_1 + p_2]$ 様式の和差調波振動の場合と同様である. そしてこのように和差調波振動の安定性に関しても1自由度非線形系における調和振動, 分数調波振動などの安定性に関してえられている結果⁽⁴⁾⁽⁵⁾と定性的に同一の結果がえられている.

4. む す び

以上の議論よりえられる結論は次のようである.

(1) $[2p_1 + p_2]$, $[p_1 + 2p_2]$ 様式の和差調波振動は共振曲線, 位相遅れ曲線とも定性的には 1/3 次分数調波振

動と同傾向になり、この種の振動は三乗の非線形係数 β_0 の正負にかかわらず振動を発生させるためには振動系にある程度以上の衝撃を最初に与えなければならない。

(2) $[p_1 + p_2]$ 様式の和差調波振動は共振曲線、位相遅れ曲線とも $1/2$ 次分数調波振動と定性的に同傾向となり、三乗の非線形項の係数が正のときは一般に共振曲線の頂点付近で飛び移りを行なう不連続な曲線となるが、ある程度以上減衰係数が大きくなると飛び移りをおこなわない連続な曲線となる。三乗の非線形係数 β_0 が負のときは減衰係数がある程度以上大きくなると、共振曲線に下限を生じ、したがって最初に衝撃を与えなくては振動は発生しない。

(3) $[p_1 + p_2]$, $[2p_i + p_j]$ 様式の和差調波振動の共振曲線は $p_1 : p_2$ の値 ($\gamma_1 : \gamma_2$ の値) いかんにかかわらず、定性的には同じ形の曲線となる。

(4) $[p_1 + p_2]$, $[2p_i + p_j]$ 様式の和差調波振動, $[3p_i]$, $[2p_i]$ の分数調波振動は減衰係数がある臨界値より小さいときのみ発生可能であり、この臨界減衰係数は共振点が高い振動数の振動ほど小さく、したがって振動は発生しにくくなる。

(5) $[p_1 + p_2]$, $[2p_i + p_j]$ 様式の和差調波振動においても他の非線形系の振動と同様、曲線にひいた垂直接線の接点の軌跡が安定、不安定の境界線となり、この曲線の上部が安定、下部が不安定な領域となる。

文 献

- (1) 山本, 機械学会論文集, 27-173 (昭 36-1), 146.
- (2) 山本, 機械学会論文集, 27-182 (昭 36-10), 1676.
- (3) A. Andronow & A. Witt, Arch. Elekt. tech., 24 (1930), 99.
- (4) K. Klotter & E. Pinney, J. Appl. Mech., 20-1 (1953), 9.
- (5) T.K. Caughey, J. Appl. Mech., 21-4 (1954), 327.

539.382

不 等 質 板 内 の 応 力*

大 久 保 肇**, 清 家 政 一 郎**

Stresses in Heterogeneous Plates

by Hajimu ŌKUBO and Masaichiro SEIKA

The stresses and strains are obtained by successive approximations for a heterogeneous plate whose elastic moduli vary periodically both in the x - and y -directions. Some numerical results are given for a plate pulled in the x -direction, when Young's modulus varies in the x - and y -directions with equal period.

1. は し が き

著者の 1 人は、先年イタリアのストレーザで開催された第 10 回国際応力会議に出席した帰途、スツットガルトの Max-Planck-Institute に Macherauch (先年わが国で開催された非破壊検査の国際会議にも出席した人) をたずねる機会を得た。同氏の最近の業績⁽¹⁾について説明を聞いているうちに、著者は一つの疑問を持ったのである。同氏は繰返し荷重を受ける金属材料のひずみが疲れの進行とともに変化する模様を調べ、材料の微視的弾性定数の変化と疲れ破損との関係を求めていたようである。弾性定数はその部分のひ

ずみを X 線で測定し、これをもとにして計算で求めているが、同氏の考え方が正しいとすれば、疲れが進行して弾性定数の微視的分布が変っても応力分布は変らぬことになる。

まず簡単な一例として、一様な引張りを受ける等質板を考えてみよう。もし縦弾性定数が引張りと垂直方向の層状をなして変るとすれば、ひずみは引張方向に変化するが応力分布は一様であって変化しない。これに反して弾性定数が引張方向の層状をなして変るとすれば、応力分布は垂直方向に変化するが引張方向のひずみは一様分布をして変らない。このようなことは、材料力学の初歩知識さえあれば直ちに推定できることがらである。結晶粒子の不規則な集合体である金属材料の場合は、前述の両極端の場合の中間に相当するであろうから、弾性定数に変化が起れば当然応力分

* 昭和 37 年 4 月 2 日 第 39 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 37 年 4 月 2 日。

** 正員、名古屋大学工学部 (名古屋市中区不老町)。