621-25 : 539.42 : 620.171.5

高過給送風機羽根車の強度*

木 下

勝**

Strength of the Blower with Straight Impeller for High-Supercharging

by Masaru KINOSHITA

For high-supercharging of diesel engines, we planned a blower with straight impeller of the radial type which we have never used before. The circumferential design speed of the impeller of this type is much higher than that of the ordinary impeller. Therefore, in order to confirm the strength of the impeller, we have theoretically analyzed the stress, using the digital computer and on the other hand we have experimentally analyzed the stress by stress freezing by revolution for the three dimensional photoelastic model. Thus, by clearly knowing the stress distribution in the blade and the disc, we could confirm the reliability of the impeller of the radial type. Also, from the view-point of the limit design, we could presume that the bursting-speed would be 30 000 rpm, which corresponds to 100 % over-speed.

1. 緒 言

内燃機関過給機の性能向上のための一つとして送風機の高速化が考えられる。高速化は性能的に望ましいものであるが、しかし強度的見地よりながめるとき、外力である遠心力は回転数の二乗に比例するので、最大どれだけ回転数を上げうるかを強度的に検討する必要がある。過給機系においても、排気タービンについては、計算実験ともに(過給機独自のものとなくとも)かなり多くの文献が見られるが^{(1)~(9)}、送風機羽根車の強度については、その構造の複雑性によるためか、これまでは推定破壊回転数より、はるかに低い回転数で使用していたためか、本質的な強度解析はほとんど行なわれていないようである。

本報告は送風機羽根車のうちで、今後多く使用されるであろう、ラジアル形のシュラウドのない羽根車の一例(第1図)につき強度解析を試みたもので、研究方法としては電子計算機(IBM 650)を使用して弾性理論計算を行ない、それと同時にほぼ実物大のエポキシ模型を製作して、回転凍結を行ない光弾性試験による応力解析をなし、応力分布を明確にはあきして、さらに平均応力説を適用して破壊回転数を推定した。

2. 理論計算

理論計算は外力に遠心力だけを考慮に入れた計算を

* 昭和 36 年 11 月 21 日 広島地方講演会において講演、原稿受付 昭和 37 年 3 月 12 日。

** 正員、三菱造船会社(長崎市飽ノ浦町)。

行なった。計算は使用しうる計算機の能力不足のため送風機羽根車を一体として取扱うことができず、翼およびディスクに分けてそれぞれ平面応力および曲げを受ける回転円板とし、まずディスクを剛として翼の応力分布およびディスクに加わる力を計算し、これを外力として、ディスクの変位、応力分布を計算する。このディスクの変位をもととして、あらためて翼の変位、応力分布、ディスクに加わる力を求め、以後同様の計算を繰返して接続部での変位、応力が等しくなるまで計算を行なった。

2.1 翼の応力解析 2.1.1 記号の説明

σ_r, σ_θ : 軸, 半径方向応力

τ_{xy} : せん断応力, $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$: 軸, 半径方向ひずみ,

γ_{xy} : せん断ひずみ, u, v : 軸, 半径方向変位,

h : 翼肉厚,

ω : 角速度,

ρ : 単位体積重量,

g : 重力の加速度,

$\bar{X}\bar{Y}$: 境界に働く力,

E : 縦弾性係数,

第1図 高過給ラジアル送風機羽根車

ν : ポアソン比

$C_1 : f_1(x, y) = 0$ 自由境界を表わす方程式

$C_2 : f_2(x, y) = 0$ ディスクの接続境界を表わす方程式

(l, m) : 境界における外向法線の単位ベクトルの成分

2.1.2 基礎方程式 翼の平衡方程式は肉厚の変化も考えに入れて、

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h\tau_{xy}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\sigma_y) + \frac{\rho\omega^2}{g}hy = 0 \quad (2)$$

応力とひずみ、ひずみと変位の関係は

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \quad (5)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

境界条件は

$$C_1 : l\sigma_x + m\tau_{xy} = 0, \quad m\sigma_y + l\tau_{xy} = 0 \quad (7)$$

$$C_2 : u = u_0, \quad v = v_0 \quad (8)$$

(1), (2)式を(3)~(6)式を使って変位で表わす

と

$$2h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\nu)h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\nu)h \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + (1+\nu) \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$2h \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1-\nu)h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1+\nu)h \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + (1+\nu) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\rho\omega^2}{g} hy = 0 \quad (10)$$

境界条件は $(l, m) = (\partial f_i / \partial x, \partial f_i / \partial y)$, $i = 1, 2$ を代入して

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ 2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

翼の応力解析に(8), (11)式の境界条件のもとに(9), (10)式の連立偏微分方程式を解くことに帰する。翼内の応力および接続部に加わる力はそれぞれ

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= 2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \bar{Y} &= 2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

にて求められる。

2.1.3 基礎方程式の差分化 基礎方程式(9), (10)は形状が複雑なので解析的に解くことはとうてい不可能に近く級数展開により解くことも望みうすであるので、差分化して積分を行なった。すなわち、翼を x 方向、 y 方向の直線群で分割し、その分割点の上での変位についての連立方程式になおしてしまふ。分割は形状が複雑なため、等間隔にきると境界が分割点上にのらぬため不等間隔に分割した。

差分は原則として2変数不等間隔の9点とったLagrangeの補間公式を用いて関数を近似する⁽¹⁰⁾。すなわち、ある2変数の関数 $\varphi(x, y)$ における

$$\varphi_{kl} = \varphi(x_k, y_l)$$

$$k = i-1, i, i+1, \quad l = j-1, j, j+1$$

が与えられた場合、これを各点を通る

第2図

第3図

Lagrange の補間式

$$\varphi(x, y) = \sum \varphi_{kl} f_{kl} \dots\dots\dots (14)$$

$$k = i-1, i, i+1, l = j-1, j, j+1$$

$$f_{kl} = \frac{(x-x_k')(x-x_{k''})(y-y_l')(y-y_{l'})}{(x_k-x_k')(y_k-x_{k''})(y_l-y_{l'})(y_l-y_{l''})} \dots\dots\dots (15)$$

$$k', k'' : i-1, i, i+1 \text{ のうち } k \text{ に等しくないもの}$$

$$l', l'' : j-1, j, j+1 \text{ のうち } l \text{ に等しくないもの}$$

で近似する。このときその導関数は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \bigg|_{ij} = -\frac{h_2}{h_1 h_3} \varphi_{i-1, j} - \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2} \varphi_{ij} + \frac{h_1}{h_2 h_3} \varphi_{i+1, j} \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \bigg|_{ij} = -\frac{k_2}{k_1 k_3} \varphi_{i, j-1} - \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} \varphi_{ij} + \frac{k_1}{k_2 k_3} \varphi_{i, j+1} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \bigg|_{ij} = \frac{2}{h_1 h_3} \varphi_{i-1, j} - \frac{2}{h_1 h_2} \varphi_{ij} + \frac{2}{h_2 h_3} \varphi_{i+1, j} \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \bigg|_{ij} = \frac{2}{k_1 k_3} \varphi_{i, j-1} - \frac{2}{k_1 k_2} \varphi_{ij} + \frac{2}{k_2 k_3} \varphi_{i, j+1} \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \bigg|_{ij} &= \frac{h_2 k_2}{h_1 h_3 k_1 k_3} \varphi_{i-1, j-1} + \frac{h_2 (k_1 - k_2)}{h_1 h_3 k_1 k_2} \varphi_{i-1, j} - \frac{h_2 k_1}{h_1 h_3 k_2 k_3} \varphi_{i-1, j+1} + \frac{(h_1 - h_2) k_2}{h_1 h_2 k_1 k_3} \varphi_{i, j-1} \\ &\quad + \frac{(h_1 - h_2) (k_1 - k_2)}{h_1 h_2 k_1 k_2} \varphi_{ij} - \frac{(h_1 - h_2) k_1}{h_1 h_2 k_2 k_3} \varphi_{i, j+1} - \frac{h_1 k_2}{h_2 h_3 k_1 k_3} \varphi_{i+1, j-1} - \frac{h_1 (k_1 - k_2)}{h_2 h_3 k_1 k_2} \varphi_{i+1, j} \\ &\quad + \frac{h_1 k_1}{h_2 h_3 k_2 k_3} \varphi_{i+1, j+1} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$h_1 = x_i - x_{i-1}, h_2 = x_{i+1} - x_i, h_3 = x_{i+1} - x_{i-1}$$

$$k_1 = y_j - y_{j-1}, k_2 = y_{j+1} - y_j, k_3 = y_{j+1} - y_{j-1}$$

で与えられる。

(16)～(20)式を使って基礎方程式(9)，(10)式を差分化すると u_{ij} ， v_{ij} に関する連立方程式が得られ，境界条件および応力の式も差分方程式に書き直すことができる。

2.1.4 差分方程式の解法 差分方程式をそのまま連立方程式として解くのは偏微分方程式の場合，次数が高くなるので通常用いられている Gramer の方法，もしくはガウスの掃出法を用いて解くのは，いたずらに係数の non-zero element が増えるばかりでなく，多くの時間を要し，また丸めの誤差が大きくなってきて実用にたえない。むしろ zero element の多いのに着目して逐次近似の解法が採られている。逐次近似の解法にもいろいろあるが，収束が早くて有利だといわれている方法に Successive Over-Relaxation Method^{(12)～(14)} と Althernating-Direction Implicit Method⁽¹⁴⁾ の二つがあげられているが，ここでは前者の方法を採った(付録参照)。

2.2 ディスクの応力解析 ディスクの応力を三次元弾性体として解析することは望ましいことであるが，差分方程式に直した場合，未知数が膨大な連立方程式となるので今回は見送り，同方向の応力変化を省略して曲げをうける回転円板⁽¹⁵⁾として問題を簡易化

した。ディスクの破壊は円周方向の平均値がおもな役割を演ずること，翼数が多いため応力の周方向分布は均等化され，後述の光弾性試験結果より明らかなごとく，翼接続部およびそれらの中間において差があり認められないことなどを考えれば，この簡易化によっても意義を失うことはないと思われる。

2.2.1 記号の説明 r : 半径， θ : 角度，

z : 軸方向長さ

T_r, T_θ : 半径および円周方向合力

M_r, M_θ : r および θ 一定の面に働くモーメント

Q_r : r 一定の面に働くモーメント

σ_r, σ_θ : 半径および円周方向応力

τ_{rz} : r 一定の面に働くせん断力

$\epsilon_r, \epsilon_\theta$: 半径および円周方向ひずみ

u, w : 中央面での半径および軸方向変位

第 4 図

$\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$: 半径および円周方向平均応力

$^\circ\sigma_r, ^\circ\sigma_\theta$: 曲げによる半径および円周方向応力

q_r, q_z : 単位面積に働く半径および軸方向外力

m_θ : 単位面積に働く曲げの外力

a, b : ディスクの内, 外半径

h : ディスクの肉厚

2.2.2 基礎方程式 解法としては翼の場合と同様平衡方程式, 境界条件等をいずれも変位を未知数とする式を導き, これを解いて変位を求め, これによりあらためて応力その他を決定する方法を採った。

まず平衡方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (T_r r) - \frac{T_\theta}{r} + q_r = 0 \quad (21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Q_r r) + q_z = 0 \quad (22)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (M_r r) - \frac{M_\theta}{r} - Q_r + m_\theta = 0 \quad (23)$$

合力と応力との関係は

$$\left. \begin{aligned} T_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz, & T_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz \\ M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, & M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz \\ Q_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

半径 r の中央面での変化を (u, w) とすると, 中央面から z だけはなれた点にかかる r 方向の変位は

$$U(r, z) = u - z \frac{dw}{dr} \quad (25)$$

この点でのひずみ, および応力は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{d}{dr} U(r, z) = \frac{du}{dr} - z \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} U(r, z) = \frac{u}{r} - z \frac{dw}{r dr} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{r dr} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r) \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{dw}{r dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(27)式を(24)式に代入して合成力が (u, v) の関数として表示できる。計算を行なえば

$$T_r = N \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \quad T_\theta = N \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{r dr} \right) \\ M_\theta &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} Q_r &= -D \left[w''' + \left(\frac{1}{r} + \frac{D'}{D} \right) w'' \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{r} + \nu \frac{D'}{r D} \right) w' \right] + m_\theta \quad (30) \end{aligned}$$

$$N = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (') \equiv \frac{d}{dr}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= T_r/h, \quad \bar{\sigma}_\theta = T_\theta/h, \quad \tau_{rz} = Q_r/h \\ ^\circ\sigma_r &= 6M_r/h^2, \quad ^\circ\sigma_\theta = 6M_\theta/h^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

さて, ここで(28)~(30)式を(21)~(23)式に代入すれば, 平衡方程式が変位の式として表わされるが, この連立方程式は u, w に関して分離することができる。

まず(21)式に(28)式を代入することにより u に関する式

$$u'' + A_1(r)u' + A_2(r)u + A_3(r) = 0 \quad (32)$$

$$\text{ただし} \quad \left. \begin{aligned} A_1(r) &= \frac{1}{r} + \frac{N'}{N}, \\ A_2(r) &= \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} + \nu \frac{N'}{N} \right) \\ A_3(r) &= q_r/N \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

が得られる。境界条件は内周, 外周における半径方向応力が零であるという条件を与えて(28)式より

$$\left(u' + \nu \frac{u}{r} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad \left(u' + \nu \frac{u}{r} \right) \Big|_{r=b} = 0 \quad (34)$$

が得られる。

また, (22), (23)式に(29)式を代入することにより

$$\begin{aligned} w^{(N)} + B_1(r)w''' + B_2(r)w'' \\ + B_3(r)w' + B_4(r) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} B_1(r) &= 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{D'}{D} \right) \\ B_2(r) &= \left[\frac{1}{r} \left\{ -\frac{1}{r} + (2+\nu) \frac{D'}{D} \right\} + \frac{D'}{D} \right] \\ B_3(r) &= \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{D'}{D} \right) + \nu \frac{D'}{D} \right] \\ B_4(r) &= -\frac{1}{D} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (m_\theta \cdot r) + q_z \right] \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

が得られ, 境界条件としては, 内周における変位, 傾斜が零であること, および外周における曲げモーメント, せん断力がそれぞれ零という条件から(29), (30)式を使って

$$\left. \begin{aligned} w|_{r=a} = 0, \quad w'|_{r=a} = 0, \quad (w'' + \nu \frac{w'}{r})|_{r=b} = 0 \\ \left[w''' + \left(\frac{1}{r} + \frac{D'}{D} \right) w'' \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{r^2} + \nu \frac{D'}{r D} \right) w' - \frac{m_\theta}{D} \right] \Big|_{r=b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

が得られる。

u, w に関する方程式(32), (35)式は一般に解析的には解き難いので差分方程式に直して数値解法を行な

った⁽¹⁶⁾.

2.2.3 u に関する (37) 式の解法 区間 $a \leq r \leq b$

を $a = r_1 < r_2 < \dots < r_{i-1} < r_i < r_{i+1} < \dots < r_N = b$ に分割し, 導関数を次に示す差分におきかえるとき

$$\begin{aligned} u_i' &= \frac{u_i - u_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \\ u_i'' &= \frac{u_{i+1}' - u_i'}{r_{i+1} - r_i} \\ &= \frac{u_{i+1}}{(r_{i+1} - r_i)^2} - \frac{u_i}{(r_{i+1} - r_i)^2} - \frac{u_i'}{r_{i+1} - r_i} \end{aligned}$$

(32)式から $i-1, i, i+1$ の 3 点での値に関する差分方程式が得られる. $i+1$ での値を $i, i+1$ で整理すると

$$u_{i+1} = u_i + \{u_i' - (A_1 u_i' + A_2 u_i + A_3) H_2\} H_2 \quad \dots\dots\dots (38)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= r_i - r_{i-1}, \quad H_2 = r_{i+1} - r_i \\ \frac{N_i'}{N_i} &= \frac{h_i - h_{i-1}}{h_i H_1}, \quad A_1 = \frac{1}{r_i} + \frac{N_i'}{N_i} \\ A_2 &= \frac{1}{r_i} \left(-\frac{1}{r_i} + \nu \frac{N_i'}{N_i} \right), \quad A_3 = \frac{q r_i (1 - \nu^2)}{E h_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

が得られる.

(38)式によると u_i, u_{i-1} が与えられれば u_{i+1} はきまってしまうことがわかる. したがって未知数 u_1, u_2 をきめてやれば他の点での未知変数 u_i は (38) 式により逐次計算できる.

2.2.4 w に関する (35) 式の解法 u の場合と同様に区間 $a \leq r \leq b$ を

$$a = r_1 < r_2 < \dots < r_{i-1} < r_i < r_{i+1} < \dots < r_N = b$$

に N 分割し, また w' を基準にして導関数を下記のごとき差分で代用することにする.

$$\begin{aligned} w_i'' &= \frac{w_i' - w_{i-1}'}{r_i - r_{i-1}} \\ w_i''' &= \frac{w_{i+1}'' - w_i''}{r_{i+1} - r_i} \\ &= \frac{w_{i+1}'}{(r_{i+1} - r_i)^2} - \frac{w_i'}{(r_{i+1} - r_i)^2} - \frac{w_i''}{r_{i+1} - r_i} \\ w_i^{(N)} &= \frac{w_{i+1}''' - w_i'''}{r_{i+1} - r_i} = \frac{w_{i+1}'}{(r_{i+1} - r_i)^3} \\ &\quad - \frac{w_i'}{(r_{i+1} - r_i)^3} - \frac{w_i''}{(r_{i+1} - r_i)^2} - \frac{w_i'''}{r_{i+1} - r_i} \end{aligned}$$

これを(35)式に代入して $i+1$ の値を $i, i-1, i-2$ での値で整理すると

$$\begin{aligned} w_{i+1}' &= w_i' + (w_i'' + w_i''' H_2) H_2 \\ &\quad - (B_1 w_i''' + B_2 w_i'' + B_3 w_i' + B_4) H_2^3 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (40)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_i'}{D_i} &= \frac{D_i - D_{i-1}}{D_i H_1} = \frac{h_i^3 - h_{i-1}^3}{h_i^3 H_1} \\ \frac{D_i''}{D_i} &= \frac{D_i' - D_{i-1}'}{D_i H_1} = \left\{ \frac{D_i'}{D_i} - \frac{D_{i-1}'}{D_{i-1}} \left(\frac{h_{i-1}}{h_i} \right)^3 \right\} / H_1 \\ B_1 &= 2 \left(\frac{1}{r_i} + \frac{D_i'}{D_i} \right) \\ B_2 &= \frac{1}{r_i} \left\{ -\frac{1}{r_i} + (2 + \nu) \frac{D_i'}{D_i} \right\} + \frac{D_i''}{D_i} \\ B_3 &= \frac{1}{r_i} \left\{ \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{D_i'}{D_i} \right) + \nu \frac{D_i''}{D_i} \right\} \\ B_4 &= -\frac{12(1 - \nu^2)}{E h_i^3} \left\{ \frac{1}{r_i H_1} (m_{\theta i} r_i - m_{\theta i-1} r_{i-1}) + q_{zi} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

(40)式は線形の差分方程式であるから u と同様の理論を用いることができる. すなわち最初の三つの関数値 w_1', w_2', w_3' をきめるとき (w' を基準にとると三階の差分方程式であるから 3 個の関数値をきめる必要がある), その他の w_i' は(45)式により逐次計算できる.

2.2.5 応力式の差分化 以上で半径方向変位 u , 軸方向傾き w' が計算されるが, このほかに軸方向変位および応力を知る必要がある. これは u, w' がすでに計算されているので, (28)~(31)式までを使って容易に求められる. ただ u, w' が解析的に表わされていないので, 微分を差分で近似し, その結果をまとめると

$$w_i = w_1 + \sum_{k=2}^i w_k' (r_k - r_{k-1}) \dots\dots\dots (42)$$

$$u_i \left(\frac{h_i}{2} \right) = u_i - \frac{h_i}{2} w_i' \dots\dots\dots (43)$$

$$\bar{\sigma}_{ri} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} + \nu \frac{u_i}{r_i} \right) \dots\dots\dots (44)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta i} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{u_i}{r_i} + \nu \frac{u_i - u_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \right) \dots\dots\dots (45)$$

$$^{\circ} \sigma_{ri} = -\frac{E h_i}{2(1 - \nu^2)} \left(\frac{w_i' - w_{i-1}'}{r_i - r_{i-1}} + \nu \frac{w_i'}{r_i} \right) \dots\dots\dots (46)$$

$$^{\circ} \sigma_{\theta i} = -\frac{E h_i}{2(1 - \nu^2)} \left(\frac{w_i'}{r_i} + \nu \frac{w_i' - w_{i-1}'}{r_i - r_{i-1}} \right) \dots\dots\dots (47)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= -\frac{E h_i^2}{12(1 - \nu^2)} \left\{ \frac{1}{r_i - r_{i-1}} \left(\frac{w_i' - w_{i-1}'}{r_i - r_{i-1}} - \frac{w_i' - w_{i-2}'}{r_i - r_{i-2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{r_i} + \frac{h_i^3 - h_{i-1}^3}{h_i^3 (r_i - r_{i-1})} \right) \frac{w_i' - w_{i-1}'}{r_i - r_{i-1}} + \left(-\frac{1}{r_i} + \nu \frac{h_i^3 - h_{i-1}^3}{h_i^3 (r_i - r_{i-1})} \right) \frac{w_i'}{r_i} \right\} + \frac{m_{\theta i}}{h_i} \end{aligned} \dots\dots\dots (48)$$

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r \pm ^{\circ} \sigma_r, \quad \sigma_{\theta} = \bar{\sigma}_{\theta} \pm ^{\circ} \sigma_{\theta} \dots\dots\dots (49)$$

である. ただし(43)式は(25)式において $z = h/2$ とし

たもの、すなわち表面での変位を表わしている。

2・2・6 計算 以上の計算法に基いて電子計算機 (IBM 650) により計算を行なった結果を次に示す。計算に際して使用した数値は下記のとおりである。

$$E = 2.03 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2, \nu = 0.3$$

$$\rho = 7.8 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3, g = 9800 \text{ mm/s}^2$$

$$\omega = 1.88 \times 10^3 \text{ rad/s}, (18000 \text{ rpm 常用の約 } 20\%, \text{ over-speed})$$

$$\alpha = 1.5, N = 43 \text{ 点}$$

計算結果を第5～13図に示している。結果をみると最大応力は遠心力をうけもつディスクの周方向応力であり

$$\sigma_{\theta \max} = 64 \text{ kg/mm}^2 \text{ (at } r = 57 \text{ mm)}$$

また半径方向応力 σ_r の最大は中央部で起り

$$\sigma_{r \max} = 28 \text{ kg/mm}^2 \text{ (at } r = 140 \text{ mm)}$$

程度である。翼によるディスクの曲げは翼が補強材の役割をもはたして、曲げ剛性が大きくなるので、オーダとしてはディスクの平均応力の20%程度である。

中心線

第5図 翼の変位
(u, v) の分布

中心線

第6図 翼の半径方向
応力 σ_y の分布
(18000 rpm)

中心線

第7図 翼内せん断応
力 τ_{xy} の分布
(18000 rpm)

第8図 翼内軸方向応
力 σ_x の分布
(18000 rpm)

第9図 ディスク各点の半径方向変位
 u および軸方向変位 w (18000 rpm)

第11図 翼によるディスク内の
曲げ応力 (18000 rpm)

第10図 遠心力および翼によるディスク
内平均応力ならびに等厚円板の応力

第12図 曲げも含めたディスク内
最大応力の分布 (18000 rpm)

翼内での応力は遠心力をまともにうけて、半径方向応力 σ_r が一番大きく

$$\sigma_{r \max} = 28 \text{ kg/mm}^2 \text{ (at } r = 140 \text{ mm)}$$

とディスクの半径方向応力 σ_r と一致し、次いでせん断力 τ_{xy} 、軸方向応力 σ_x の順になっている。力のうけ方としては先端では相当に軸方向へ曲げられ、また中間部では翼が補強材の役割をはたして、ディスクの曲げを防止していて、かなり複雑な分布をしているが、これは第 17 図の光弾性試験の結果にも照合している。翼に加わる遠心力は第 13 図にみられるように主としてせん断力で平均的にうけもたれることがわかるので、曲げを考慮に入れなければディスクの応力分布を求めるのに、従来行なわれてきた翼の質量を加えて見掛け上、ディスクの比重が増したとしてドナート法やグランメルスの図式解法を用いていたことの妥当性が立証される。

3. 光弾性試験による解析^{(17)~(19)}

光弾性試験による実験的強度解析は計算結果を検討する以外に翼根部の応力集中をはじめとし、各応力集中箇所の状況など理論計算のおよばぬところを究明する目的をもって、エポキシ樹脂模型を製作し、三次元回転凍結法によって試みた。

第 14 図は模型写真にして、ほぼ実物に近い寸法であり、全翼 18 枚のうち 15 枚は外形のみ実物と同様に仕上げて翼のこう配と底部とスカート部の R は取去って質量のみ同じものにした平板を使用した。他の 3 枚は実際の翼と同じ形状に加工を行ない測定用スライス切出しの部分にあてることとした。なおこの 3 枚の翼はディスク円周を三等分した位置に付けた。

第 13 図 翼とディスクの接続部に働く接続応力 (18 000 rpm)

3.1 回転凍結装置 回転装置は第 15 図に示す様式で行なった。すなわち恒温そうは理研計器製の大形光弾性応力凍結炉を使用し、中に回転体専用凍結装置を製作して組込んだ。

回転装置の概略は次のごとくである。すなわち電動機により V ベルトで変速機を駆動し、出力側より同じく V ベルトで駆動軸に回転を伝え、ここでこの駆動軸の回転をプーリにより回転計を駆動して、常時回転数を見ると同時に、軸端で精密ホーン式ハンドタコメータで回転数の確認ができるようにした。

駆動軸の片方は自在継手を通して歯車箱にはいっている。この歯車箱内には 1:1 のベベルヘリカルギヤの振動を防止し、凍結炉内の試験模型回転軸に動力を与えるが、ここで問題があったのは炉内中央部に炉内ファンが取付けてあるので改造を行ない、ファン軸はパイプを使用して中に回転軸を通し、炉内で軸受台を L 形鋼材で組立て、軸受で支持することとした。なお

第 14 図 エポキシ樹脂模型

第 15 図 回転凍結炉および付属装置

この軸受用グリースは耐熱用シリコングリースを使用した。図中凍結炉内にモデルそうとあるのは、モデルを大気中で回転させたとき翼が空気の抵抗により倒れるのを防ぐためにモデルのはいったそう自体も回転させ、そう内の空気も同時に追従させるようにしたものである。

第 16 図は回転凍結温度サイクルである。

3.2 試験結果およびその考察 全般的について凍結回転数が低く、応力しまの出かたも少ないので期待されたほど精密な結果は得られていない。

3.2.1 ディスクの応力 ディスクにおける応力しまの分布状況を第 17~19 図に示している。これらはそれぞれ第 1 図における AA', BB', CC' 断面に相当する。応力しまを 18000 rpm の回転時の応力になおし、比較のためそれぞれの理論計算値を括弧内に書く

内周における $\sigma_\theta = 66(54.0)$ kg/mm²

外周における $\sigma_\theta = 18(19.1)$ kg/mm²

半径方向の σ_r の最大は $r=140$ mm のところに起り、その値は

第 16 図 モデル凍結サイクル

第 17 図 ディスク断面 AA' での凍結応力しま

$$\sigma_{r \max} = 50(28.0) \text{ kg/mm}^2$$

$$\text{ボス部では } \sigma_r = 40 \text{ kg/mm}^2$$

が得られている。仮定に何らのへだたりもないと思われる外周では光弾性試験結果と理論計算値は実により一致を示しているが、内周にては第 17 図の写真にてもわかるごとく、ボス部全体が有効に働かないので、計算値がほぼ 20%ほど低く出ている。半径方向応力 $\sigma_{r \max}$ が異なっているのは、エポキシモデル製作に際して翼 18 枚中 15 枚に質量の同じ平板を用いたために、重心位置が外側にずれ、計算よりも大きな荷重が加わったこと、凍結の際、熱応力が働いたことなどが考えられる。ボス部の応力集中は光弾性試験結果の 40 kg/mm² と理論計算値 15 kg/mm² とより

$$\alpha = 40/15 = 2.7$$

程度となる。翼近傍としからざる部分の周方向応力の差異はしま次数が低すぎたため、詳細にはわからないが第 19 図によると、非常に大きくはないと思われる。

3.2.2 翼の応力 翼の応力はしま次数が低いので、全般的な応力分布の傾向を知ることができるが具

第 18 図 ディスク断面 BB' での凍結応力しま

第 19 図 ディスクの周方向凍結応力しま

体的な応力の値は求められていない。

第 17 図の写真は中央のディスクとの接続部に最も高いしま次数があり、ディスクの曲げモーメントをうけて、翼がディスクの補強材の役割をはたしていることがわかる。

4. 破壊回転数の推定

前述のとおりこの送風機羽根車の 18 000 rpm (常用回転数の約 20 % over-speed) における応力分布がかなり詳細にはあくされ、降伏点以下の応力状態であるので、安全に運転できることが確認されたが、それでは最大幾回転までの運転に耐えうるかということが、当然問題として起ってくるであろう。回転円板の破壊強度に関しては中実および中空の等厚円板に対し、すでに多くの実験がなされ、円板内の弾性最大応力の値が、材料の引張強さに達したときに破壊は起らず、破断面全体に関する垂直応力の平均値が、材料の引張強さに達するとき破断を生じ、破断面に平行方向の垂直応力は、これに関与しないといういわゆる平均応力説がある^{(4)~(10)}。

第 10 図に送風機羽根車と同じ内外径の等厚円板の弾性応力分布を付記しているが、図に見るごとく送風機羽根車の応力分布は、それよりいくぶん均等でしかも第 1 応力である円周方向の曲げ応力は比較的小さいことにより、本問題への上記平均応力説の適用は十分妥当であると考えられるので、ここでは以上の見地に立って破壊回転数を推定した。

4.1 記号の説明 r : 半径, h : ディスク肉厚,

H : 翼の高さ, h_0 : 翼の平均肉厚,

r_1, r_2 : 内, 外半径, r_3 : ボス半径,

第 20 図

N : 翼数, ρ : 換算単位重量,

ρ_0 : 単位重量, σ_B' : 修正引張強さ⁽⁴⁾,

p : r_3 に対応する分割点の番号,

n : r_2 に対応する分割点の番号,

$n_{B|A}$: 断面 $A A' A''$ で破壊するときの回転数,

$n_{B|B}$: 断面 $B B' B''$ で破壊するときの回転数.

4.2 計算法 この送風機のようにボス部のある

回転体では、破壊の様相として、断面 $A A' A''$ および $B B' B''$ の二つが考えられる⁽⁹⁾。

まず、断面 $A A' A''$ で破壊が起るものとするれば、前述のようにこの断面での応力は引張強さ σ_B になっているはずであり、したがって受けもちうる最大の力は (以下変形前の寸法を使うのが便利であるから σ_B' を使って表わして)⁽⁴⁾。

$$F_{\max} = 2\sigma_B' \int_{r_1}^{r_2} h dr \dots \dots \dots (50)$$

一方、外力としての力は

$$F = \frac{2\omega^2}{g} \int_{r_1}^{r_2} \rho h r^2 dr \dots \dots \dots (51)$$

したがって、破壊回転数は(50)、(51)式を等しいとおいて角速度を回転数になおせば、断面 $A A' A''$ でこわれる回転数 $n_{B|A}$ は

$$n_{B|A} = \frac{30}{\pi} \left[\frac{\sigma_B' \int_{r_1}^{r_2} h dr}{\frac{1}{g} \int_{r_1}^{r_2} \rho h r^2 dr} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (52)$$

で与えられる。

同様に断面 $B B' B''$ で破壊するとすれば

$$F_{\max} = 2\sigma_B' \left[\int_{r_3}^{r_2} h dr + r_3 h(r_3) \right] \dots \dots \dots (53)$$

$$F = \frac{2\omega^2}{g} \int_{r_3}^{r_2} \rho h r^2 dr \dots \dots \dots (54)$$

であるから(53)、(54)式を等値することにより、断面 $B B' B''$ で破壊する回転数 $n_{B|B}$ は

$$n_{B|B} = \frac{30}{\pi} \left[\frac{\sigma_B' \left\{ \int_{r_3}^{r_2} h dr + r_3 h(r_3) \right\}}{\frac{1}{g} \int_{r_3}^{r_2} \rho h r^2 dr} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (55)$$

で与えられる。

ただし、上記の計算中の単位重量は翼に加わる遠心力による分も考慮に入れ、一様に受けもつと考え、下記の換算した単位重量

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{N h_0 H}{2\pi r h} \right] \dots \dots \dots (56)$$

を使用するものとする。

実際の計算に当っては、肉厚 h および換算単位重量 ρ が解析的に表現されていないので、例によって積分区間 $[r_1, r_2]$ を分割して行なう。すなわち(52)、(55)、

(56)式の代りに

$$n_B|_A = \frac{30}{\pi} \left[\frac{\sigma_B' \sum_{i=1}^n h_i \Delta r_i}{\frac{1}{g} \sum_{i=1}^n \rho_i h_i r_i^2 \Delta r_i} \right] \dots\dots\dots (57)$$

$$n_B|_B = \frac{30}{\pi} \left[\frac{\sigma_B' \left\{ \sum_{i=p}^n h_i \Delta r_i + r_3 h(r_3) \right\}}{\frac{1}{g} \sum_{i=p}^n \rho_i h_i r_i^2 \Delta r_i} \right] \dots\dots\dots (58)$$

$$\rho_i = \rho_0 \left[1 + \frac{N h_0}{2\pi} \frac{H_i}{r_i h_i} \right] \dots\dots\dots (59)$$

を使用する。

4.3 数値計算および計算結果 実際に第1図に示した送風機について計算すると、下記のごとくである。すなわち

$$h_0 = 3 \text{ mm}, r_1 = 57.4 \text{ mm}, r_2 = 236 \text{ mm}$$

$$N = 18, \quad \rho_0 = 7.8 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

$$\sigma_B' = 95 \text{ kg/mm}^2, p = 5, n = 22$$

を使って

$$n_B|_A = \frac{30}{\pi} \left[\frac{95 \times 5.31 \times 10^8}{4.91 \times 10^2 / 9800} \right]^{1/2} = 30'400 \text{ rpm}$$

$$n_B|_B = \frac{30}{\pi} \left[\frac{95(2.17 \times 10^8 + 89.4 \times 40)}{3.72 \times 10^2 / 9800} \right]^{1/2} = 36'400 \text{ rpm}$$

計算結果によると破壊は断面 A A' A'' で行なわれるものと推定される。過去に行なわれた多数の等厚の円板についての実験結果⁽²⁾⁽⁵⁾⁽⁷⁾⁽¹⁰⁾によると、上記のように計算された値の $\pm 20\%$ ぐらいの範囲内にあるようである。

5. 結 言

内燃機関高過給送風機羽根車(ラジアル形)に対し、電子計算機 (IBM 650) を使用した理論計算および三次元回転凍結光弾性試験により遠心力による応力解析を行ない、さらに推定破壊回転数を求め、強度設計上貴重な資料をうる事ができた。

終りに本研究の遂行に当り、終始熱心なる御指導を賜った九州大学工学部教授 石橋 正、渡部信夫、平野富士夫の諸先生に深じんの感謝の意を表わすとともに、本研究に種々の御助言をいただいた理化学研究所 西田正孝博士、航空技術研究所 佐藤和郎博士、東京大学助教授 河田幸三先生に深く感謝いたします。

また、本研究に多大の御協力をいただいた三菱造船本社研究部 柳下小太郎、野口謙三、竜崎哲夫の3君に対し厚くお礼を申し上げます。

付録 Successive Over-Relaxation Method

Successive Over-Relaxation Method について略

述すると連立方程式

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} y_j + d_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (60)$$

が収束条件

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \dots\dots\dots (61)$$

を満たすとき逐次近似計算式

$$y_i^{(m+1)} = \alpha \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j^{(m+1)} + \sum_{j=i+1}^N b_{ij} y_j^{(m)} + c_i \right\} - (\alpha - 1) y_i^{(m)} \dots\dots\dots (62)$$

($m \geq 0, i=1, 2, \dots, N$)

ただし $y_i^{(0)} : (i=1, 2, \dots, N)$ は任意の第1近似値であり

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}/a_{ii} & (i \neq j) \\ 0 & (i = j) \end{cases} \dots\dots\dots (63)$$

$$c_i = -d_i/a_{ii}$$

α は over relaxation factor で適当にえらぶことにより収束性が左右されるが

$$\alpha = 1 + \left[\frac{\bar{\mu}}{1 + (1 - \bar{\mu}^2)^{1/2}} \right]^2 \leq 2 \dots\dots\dots (64)$$

$\bar{\mu}$: spectral norm of matrix $[b_{ij}]$, すなわち matrix $[b_{ij}]$ の固有値の絶対値のうち最大のものの

とえらべば収束性が最もよくなることが知られている⁽¹²⁾。

文 献

- (1) 鶴戸口, 機械学会誌, **55**-402 (昭 27-7), 474; 機械の研究, **5**-1 (昭 28-1), 11.
- (2) E.L. Robinson, *Trans. ASME*, **66**-5 (1944), 373.
- (3) 白鳥・佐々木, 機械学会論文集, **21**-103 (昭 30), 181; **21**-111 (昭 30), 780; **25**-151 (昭 34-3), 189.
- (4) 中西, 機械学会論文集, **18**-25 (昭 27), 44.
- (5) 佐藤・永井, 航空技術研究所報告, **9** (昭 35).
- (6) J. Heyman, *Proc. Inst. Mech. Engr.*, **172**-14 (1958), 531.
- (7) D.H. Winne & B.M. Wundt, *Trans. ASME*, **80** (1958), 1643.
- (8) A. Mendelson & S.S. Manson, *NASA TR-28* (1958).
- (9) 白鳥, 機械設計, **4**-1 (昭 35), 4.
- (10) R.G. Anderson, *Machine Design*, **29**-21 (1957-10), 148.
- (11) 三菱造船研究部, 材研報告, 1142 (昭 35).
- (12) S.P. Frankel, *Mathematical and Other Acid to Computation*, **4** (1950), 65.
- (13) D. Young, *Trans. Amer. Meth. Soc.*, **76** (1956), 92.
- (14) D.W. Peaceman & H.H. Rackford, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **3** (1955), 28.
- (15) 倉西, 応用弾性学.
- (16) 加藤, 現代応用数学, (昭 33) 11, 岩波書店.
- (17) 河田, 科研報告, **30**-2 (昭 29-3).
- (18) 応力測定技術研究会編, 応力測定法, (昭 30), 朝倉書店.
- (19) M.M. Frocht, *Photo-elasticity*, **II**, (1948), John Wiley & Sons, Inc.