621-501.2

二乗偏差積算値および二乗制御面積最小規範による 完全有限整定時間応答系のシンセシス*

榎 木 義 一**, 布 川 昊***

Synthesis of Complete Finite-Settling-Time Systems on the Basis of Integrated-Square Sampled Error and Quadratic Control Area Criterion

by Yoshikazu SAWARAGI and Hiroshi FUKAWA

Finite-settling-time systems which are nonminimal have constants which can be arbitrarily assigned. This opens up the possibility of selecting the extra system constants with a view of optimizing the system under some criterion. An approach to this problem is to minimize the integrated-square sampled error or the quadratic control area. This paper is concerned with the problem of synthesis of nonminimal finite-settling-time systems which have no ripples after a suitable transient period has elapsed under these two criteria. The treatment of these optimization problems makes use of the z transform and the modified z transform methods. By representing polynomials by vectors or matrices and making use of the linear algebraic techniques, the synthetic studies can be systematically carried out. The design equations of the optimum systems and the evaluating formulas of the minimum integrated-square sampled error and the minimum quadratic control area are derived.

1. 緒 言

有限整定時間応答系のシンセシスにあたっては、通常その系が安定でかつ最短時間に目標値に整定するように設計される。しかしながら、このように設計された系は他の規範の下では最適な系を形成しない。これに対して整定時間をいくぶん長くして nonminimal な系を作れば、この系は若干個の未定定数を含むことになり、この定数を他の規範の下に最適な系となるように決定することができる。筆者らは先にサンプリング時点においてのみ目標値に整定する系の二乗偏差積算値最小規範によるシンセシスの研究を発表したが⁽¹⁾、今回はサンプリング時点間においても完全に目標値に整定する系の二乗偏差積算値および二乗制御面積最小規範によるシンセシスについて報告する。一般に完全整定系の制御偏差の z 変換および拡張 z 変換はともに z^{-1} に関する多項式となる。いまそれらを

$$E(z) = e_0 + e_1 z^{-1} + \cdots + e_{N-1} z^{-N+1} \cdots \cdots (1)$$

$$E(z, m) = e_1(m) z^{-1} + e_2(m) z^{-2} + \cdots + e_N(m) z^{-N} \cdots \cdots (2)$$

とする。ここで m は $1 \geq m \geq 0$ なるパラメータである。さて (1) 式および (2) 式の係数を要素とするベクトル $\mathbf{e} = (e_i)$, $i=0, 1, \cdots, N-1$ および $\mathbf{e}(m) = (e_i(m))$, $i=1, 2, \cdots, N$ を考えれば、二乗偏差積算値および二乗制御面積はそれぞれこれらのベクトルの内積を用いて次のように表わすことができる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n^2 = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) \cdots \cdots (3)$$

$$\int_0^{\infty} \{e(t)\}^2 dt = \int_0^1 \{\mathbf{e}(m), \mathbf{e}(m)\} dm \cdots \cdots (4)$$

ここで $(\mathbf{e}, \mathbf{e})$ などはベクトル $\mathbf{e}$ の内積を表わすものとする。(3) 式および (4) 式の形式に着目して、線形代数学の手法を用い完全整定系の上記規範のもとにおけるシンセシスを行なう。

2. 数 学 的 準 備

2.1 多項式のベクトルあるいは行列による表現

以下に述べるように多項式 $f(z)$ にその係数を要素とするベクトル $\mathbf{f}$ あるいは行列 F を対応させると、多項式の四則演算に対してベクトルあるいは行列の演算

* 昭和37年4月4日 第39期通常総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和36年11月30日。

** 正員、京都大学工学部。

*** 正員、京都大学工学研究所（京都市左京区山端1丁目町）。

が次のように対応する。いまその対応関係を記号 $\leftrightarrow$ で示すことにする。

(i) 加法および減法

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \\ &\leftrightarrow f = (a_i), \quad i=0, 1, \dots, n \\ g(z) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m} \\ &\leftrightarrow g = (b_i), \quad i=0, 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

のように対応させると、多項式の和、差には次のようにベクトルの和、差が対応する。

$$f(z) + g(z) \leftrightarrow f + g = (a_i + b_i) \dots \dots \dots (6) \\ i=0, 1, \dots, \max(m, n)$$

(ii) 乗法 いま $f(z)$ と $g(z)$ との積として $n+m$ 次の多項式 $h(z)$ を得たものとする。

$$g(z) \cdot f(z) = h(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_{m+n} z^{-(m+n)} \dots \dots \dots (7)$$

いま (5) 式のように $h(z)$ にもベクトル $h = (c_i)$, $i=0, 1, \dots, (m+n)$ を対応させ (7) 式の関係性をベクトル f からベクトル h への変換とみなすと多項式 $g(z)$ には変換を表わす行列 G が対応する。また (7) 式をベクトル g からベクトル h への変換とみれば今度は多項式 $f(z)$ に行列 F が対応する。すなわち

$$h(z) = g(z) f(z) \leftrightarrow h = Gf \text{ または } h = Fg \dots \dots \dots (8)$$

ただし

$$G = \left(\begin{array}{cccc} b_0 & b_0 & & \\ & b_1 & b_1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & b_m & b_0 \\ & & & & b_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & b_m \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} m+n+1$$

(9)

$$F = \left(\begin{array}{cccc} a_0 & a_0 & & \\ & a_1 & a_1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a_n & a_0 \\ & & & & a_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & a_n \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} m+n+1$$

(10)

とする。

(iii) 除法 (a) 整除できる場合 $h(z)$ が $g(z)$ で割り切れて、その商が $f(z)$ となるものとする。すなわち $f(z) = h(z)/g(z)$ とする。このとき分母を払えば $h(z) = g(z) \cdot f(z)$ となるが、これは (8) 式と同じものであるから、たとえば $h = Gf$ と表現で

きる。いまここで、この G に対して

$$\tilde{G}G = E \quad (E \text{ は単位行列}) \dots \dots \dots (10)$$

となる行列 $\tilde{G}$ が存在するならば、 $h = Gf$ の両辺に $\tilde{G}$ を左から乗じて

$$f(z) = h(z)/g(z) \leftrightarrow f = \tilde{G}h \dots \dots \dots (11)$$

と表わすことができる。すなわち、整除可能の場合は $1/g(z) \leftrightarrow \tilde{G}$ となる。

(b) 整除できない場合 この場合 (11) 式の左辺の $f(z)$ は無限級数となるわけであるが、いま $1/g(z) = d_0 + c_1 z^{-1} + \cdots$ と無限級数に展開すれば、この無限級数に対して (9) 式と同様の行列が対応する。それを G^* とおくとその行数は ∞ で列数は $m+n+1$ ($h(z)$ の次数+1) である。すなわち $1/g(z) \leftrightarrow G^*$ である。 $\tilde{G}$ は G^* の $n+2$ 行以下を切捨てたものに等しい。

例 1.

$$\left. \begin{aligned} c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} &= (1 - \alpha z^{-1})(a_0 + a_1 z^{-1}), \\ a_0 + a_1 z^{-1} &= \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - \alpha z^{-1}} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

を例にとる。

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \leftrightarrow 1 - \alpha z^{-1}$$

となる。これに対して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \therefore \tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ をえる.}$$

一方これに対して (12) 式の右辺が整除できないときには $1/(1 - \alpha z^{-1}) = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \cdots$ と展開して G^* を作れば

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = G^* \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad G^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

を得る。明らかに G^* の上 2 行は $\tilde{G}$ に等しい。(12) 式の右辺が整除できる場合は $c_0 \alpha^2 + c_1 \alpha + c_2 = 0$ であるから $a_2 = a_3 = \cdots = 0$ となる。

2.2 変換行列の構造 (9) 式に示した変換行列 G の構造を明らかにし $\tilde{G}$ 等の求め方について述べる。いまつぎのような行列

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}_{n+m+1} \dots (13)$$

を用いれば(9)式の変換行列は次のように表現できる。

$$G = \begin{pmatrix} b_0 & & & \\ & b_0 & & \\ & b_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_m \end{pmatrix} = b_0 R_0 + b_1 R_1 + \dots + b_m R_m$$

さてここで $m+n+1$ 次のべき零行列

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^{m+n} \neq 0, \quad N^{m+n+1} = 0$$

を用いると $R_i = N^i R_0$ となるから

$$G = (b_0 E + b_1 N + \dots + b_m N^m) R_0 \dots (14)$$

(E は単位行列)

を得る。したがって、べき零行列 N に z^{-1} を対応させるならば、(14) 式はもとの多項式 (5) とまったく同じ構造をもっていることがわかる。いまもし (14) 式の右辺の R_0 を除いた部分を G' とすれば $\tilde{G} = {}^t R_0 \times G'^{-1}$ となる。ここで ${}^t R_0$ は R_0 の転置行列、 G'^{-1} は G' の逆行列である。しかるに G'^{-1} は N がべき零であることを利用して容易に求めることができる。

例 2.

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 - \alpha z^{-1} \leftrightarrow G' = E - \alpha N \\ 1/g(z) &= 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots \\ &\leftrightarrow G'^{-1} = E + \alpha N + \dots + \alpha^{m+n} N^{m+n} \\ \therefore G'^{-1} G' &= E - \alpha^{m+n+1} N^{m+n+1} = E \end{aligned}$$

最後の式は $N^{m+n+1} = 0$ を用いる。一般に N が n 次のべき零行列ならば、 $1/g(z)$ の展開の $z^{-(n-1)}$ の係数まで求め、 $N \leftrightarrow z^{-1}$ とおけば G'^{-1} 、したがって $\tilde{G}$ を求めることができる。

以上の準備の下に完全整定系のシンセシスの方法についてのべる。以下においてはステップ入力のみを考えるが、その他の入力に対しても同様に議論を進めることができる。

3. 二乗偏差積算値最小法によるシンセシス

3.1 偏差ベクトルの計算 第1図に示した直列補償系について考える。ステップ入力に対するこの系

の制御偏差の z 変換は

$$E(z) = \frac{1 - C(z)HG(z)}{1 - z^{-1}} \dots (15)$$

である。ここでこの系が目標値に対して Nt_0 (t_0 はサンプリング周期) 以後には完全に整定するためには、 $C(z)$ は z^{-1} に関する N 次の多項式で、かつその係数の間にはある一次の拘束条件が満たされねばならない⁽²⁾。その条件の内には $HG(z)$ の分母を $C(z)$ が因数として持たねばならないという事実が含まれている。それゆえ、

$$HG(z) = G_1(z)/G_2(z), \quad C(z) = D(z)G_2(z) \dots (16)$$

とおく。ここで $G_1(z)$ 、 $G_2(z)$ はともに z^{-1} に関して n 次の多項式である。よって $D(z)$ は $N-n$ 次の多項式である。(16) 式を (15) 式に代入すれば次のようになる。

$$E(z) = \frac{1 - G_1(z)D(z)}{1 - z^{-1}} \dots (17)$$

さて $D(z)$ および $G_1(z)$ を次のような多項式とし、これらに2章のようにベクトル α および行列 G を対応させる。すなわち

$$\begin{aligned} D(z) &= a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-n} z^{-N+n} \\ &\leftrightarrow \alpha = (a_i), \quad i=0, 1, \dots, N-n \end{aligned}$$

$$G_2(z) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_n z^{-n} \leftrightarrow \text{行列 } G$$

とおく。完全整定すれば $E(z)$ は当然多項式となり、したがって (17) 式の右辺は整除される。それゆえ $G_1(z)D(z)$ の次数が N 次であるから、 $E(z)$ の次数は $N-1$ 次となる。そこで $E(z)$ には N 次のベクトル e 、定数1には第一要素のみが1で他はすべて0なる $N+1$ 次のベクトル u を対応させる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} D(z) &\leftrightarrow \alpha, & (N-n+1) \text{ 次ベクトル} \\ 1 &\leftrightarrow u, & N+1 \text{ 次ベクトル} \\ E(z) &\leftrightarrow e, & N \text{ 次ベクトル} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

とし、また $G_1(z)$ 、 $1-z^{-1}$ 、 $1/(1-z^{-1})$ には次のような行列を対応させる。

$$\left. \begin{aligned} G_1(z) &\leftrightarrow G, & (N+1) \times (N-n+1) \text{ 行列} \\ 1-z^{-1} &\leftrightarrow V, & (N+1) \times N \text{ 行列} \\ 1/(1-z^{-1}) &\leftrightarrow \tilde{V}, & N \times (N-1) \text{ 行列} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

そうすれば (17) 式は次のように表現することができる。

第1図 サンプル値系

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{a}) = \tilde{\mathbf{v}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{G} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-n} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{a} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_0 & & & & \\ & g_0 & & & \\ & g_1 & & & \\ & g_1 & & & \\ & g_n & & & \\ & & g_n & & \\ & & & g_1 & \\ & & & & g_n \end{pmatrix} \quad N+1, \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N,$$

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{G}$$

とする。\$\mathbf{v}\$ はすべての要素が1であるような \$N\$ 次のベクトルである。

3.2 設計方程式の誘導 二乗偏差積算値は1章(3)式に示したようにベクトル \$\mathbf{e}\$ の内積で与えられる。そこで(20)式の内積を作ると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n^2 = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{a}) = |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{v}) + ({}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{a}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。ここで \${}^t\mathbf{B}\$ は \$\mathbf{B}\$ の転置行列である。また \$\mathbf{v}\$ は要素が1のみの \$N\$ 次ベクトルであるから \$|\mathbf{v}|^2 = N\$ となる。一方完全整定するという条件のうち、コントローラ \$C(z)\$ が \$HG(z)\$ の分母を含むという条件以外のものは、\$D(z)\$ の係数 \$a_i\$ 間の条件に書き改められるので、それをベクトル形式で次のように表わす。

$$\mathbf{F}\mathbf{a} - \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ステップ入力の場合は(23)式はただ1個の一次方程式であるが、一般に \$l\$ 次の積分性入力に対しては \$l\$ 個の連立一次方程式である。ここで問題は(23)式の条件のもとに(22)式を最小にするベクトル \$\mathbf{a}\$ を求めることである。\$\mathbf{a}\$ が求まれば \$D(z)\$ したがってコントローラのパルス伝達関数 \$C(z) = G_2(z)D(z)\$ が定まるからである。いまラグランジュの未定乗数 \$2\lambda = (2\lambda_i)\$, \$i=1, 2, \dots, l\$ を(23)式にベクトル的に乗じて(22)式に加える。

$$|\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{v}) + ({}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{F}\mathbf{a} - \mathbf{d}, 2\lambda)$$

これを \$\mathbf{a}\$ および \$\lambda\$ で微分して零とおけば

$${}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{a} + {}^t\mathbf{F}\lambda = {}^t\mathbf{B}\mathbf{v} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = \mathbf{d} \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。あるいはこれを一つにまとめて

$$\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{B}\mathbf{B} & {}^t\mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (26)$$

を得る。これが求める設計の基礎となる方程式である。

3.3 設計方程式の解について (26)式の係数から作った行列式が零とならないこと、したがって(26)式が一意的に解きうることは次のようにして示される。行列 \$\mathbf{A}\$ から作られる行列式を \$\det. \mathbf{A}\$ と表わす。まず

$$\det. \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{B}\mathbf{B} & {}^t\mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

は \${}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\$ が正値二次形式の行列であり、かつ行列 \$\mathbf{F}\$ の位数が \$l\$ であれば零とはならない⁽⁸⁾。まず \$\mathbf{F}\$ の位数が \$l\$ ということは条件 \$\mathbf{F}\mathbf{a} - \mathbf{d} = \mathbf{0}\$ が互に一次独立な条件のみから成り立っているということであるから当然満たされている。次に \${}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\$ は明らかに非負二次形式の行列である。

$$({}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{B}\mathbf{a}) = |\mathbf{B}\mathbf{a}|^2 \geq 0$$

だからである。次に \${}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\$ から行列式を作ると

$$\det. ({}^t\mathbf{B}\mathbf{B}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{N-n+1}} D^2(i_1, i_2, \dots, i_{N-n+1})$$

となる。この式の右辺の \$D^2(i_1, \dots, i_{N-n+1})\$ は \$\mathbf{B}\$ の第 \$i_1, i_2, \dots, i_{N-n+1}\$ 行を抜き出して作った \$N-n+1\$ 次の行列であり、和は \$\binom{N}{N-n+1}\$ 個のすべての組合せにわたる。(21)式より \$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{G}\$ であるから上式は \$g_i\$ がことごとく零、いい代えれば \$G_1(z)\$ が恒等的に零とならない限り零とはならない。よって \${}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\$ は正値二次形式の行列である。

3.4 二乗偏差積算値の最小値の計算 (26)式を解いて最適なコントローラ \$C(z) = G_2(z)(a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N-n}z^{-N+n})\$ を作れば、そのときこの系の二乗偏差積算値は最小となる。次にこの最小値を求める公式を導く。まず(24)式と解ベクトル \$\mathbf{a}\$ との内積を作り整理すれば

$$\begin{aligned} ({}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= ({}^t\mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{a}) - ({}^t\mathbf{F}\lambda, \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{v}) - (\mathbf{F}\mathbf{a}, \lambda) = (\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{v}) - (\mathbf{d}, \lambda) \end{aligned} \quad (\leftarrow (25) \text{ 式})$$

を得る。よって \$(\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\min}\$ はこの結果を(22)式に代入、整理することにより

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\min} &= |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{v}) + ({}^t\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{a}, \mathbf{a}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - ({}^t\mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{a}) - (\mathbf{d}, \lambda) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - ({}^t\mathbf{v}\mathbf{B}{}^t\mathbf{d})^* \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \end{pmatrix} \\ &= |\mathbf{v}|^2 - ({}^t\mathbf{v}\mathbf{B}{}^t\mathbf{d})^* \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{B}\mathbf{B} & {}^t\mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。ここで \$({}^t\mathbf{v}\mathbf{B}{}^t\mathbf{d})^*\$ は内積ではなく単なる列

ベクトルを表わす。これはさらに行列式を用いて

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n^2 \right)_{\min} = N + \frac{\begin{vmatrix} {}^tBB & {}^tF & {}^tBv \\ F & 0 & d \\ {}^tvB & {}^td & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} {}^tBB & {}^tF \\ F & 0 \end{vmatrix}} \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。これが求める公式である。(27) 式の右辺の分子の行列式は分母の行列式を設計方程式 (26) の定数項で縁取りしたものである。

3.5 例題 上に述べた一般論を制御対象の伝達関数が

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} \quad \dots\dots\dots (28)$$

なる系に應用する。この系の零次ホールド要素を含めたパルス伝達関数は次のようになる。

$$HG(z) = \frac{\alpha z^{-1}(z^{-1}-q)}{(1-z^{-1})(1-dz^{-1})} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ただし、ここで

$$\alpha = T(1-d-\mu d), \quad q = \frac{1-d-\mu}{1-d-\mu d}$$

$$d = \exp(-\mu), \quad \mu = t_0/T$$

とする。一方第 1 図の系からステップ入力に対して N サンプルング時点以後において完全整定するものとするれば、コントローラのパルス伝達関数は次のような N 次の多項式

$$C(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}$$

となり、各係数 b 's 間には次の条件が満足されねばならない⁽²⁾。

$$b_0 + b_1 + \dots + b_N = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$b_0 d^N + b_1 d^{N-1} + \dots + b_N = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$b_1 + 2b_2 + \dots + N b_N = -1/t_0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで (30) 式と (31) 式とは $C(z)$ が (29) 式の分母を因数として含むことを示しているので、

$$C(z) = (1-z^{-1})(1-dz^{-1})(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-2} z^{-N+2}) \quad \dots\dots\dots (33)$$

とおく。条件 (32) を (33) 式の a 's に関する条件に書き換えると

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{N-2} = \frac{1}{t_0(1-d)} = \frac{1}{\alpha(1-q)} \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。さて設計にあたって (29) 式の定数 α は $\alpha = 1$ において議論しても一般性を失わない。 $\alpha \neq 1$ のときは $\alpha = 1$ として求めた $C(z)$ の値を α で割ったものを新たにコントローラのパルス伝達関数とすればよいからである。さて (29) 式の分子は $G_1(z) = -qz^{-1} + z^{-2}$ であるから、一般論にしたがって、これに $(N+1) \times (N-1)$ 行列 G を対応させる。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -q & \ddots & & & \\ & \ddots & 0 & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & -q & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

一方 $\tilde{V}$ は (21) 式と同じものでよいから

$$B = \tilde{V}G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ -q & \ddots & \\ 1-q & \ddots & \\ \vdots & & \\ 1-q & \dots & 1-q & -q \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 1-q \\ \vdots \\ 1-q \end{pmatrix}} \right\} N$$

を得る。よって設計方程式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^tBB & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-2} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q + (N-2)(1-q) \\ -q + (N-3)(1-q) \\ \vdots \\ -q \\ \frac{1}{(1-q)} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (35)$$

ただし ${}^tBB =$

$$\begin{pmatrix} q^2 + (N-2) \times (1-q)^2 & -q(1-q) + (N-3)(1-q)^2 \dots -q(1-q) \\ -q(1-q) + (N-3)(1-q)^2 & q^2 + (N-3) \times (1-q)^2 \dots -q(1-q) \\ \vdots & \vdots \\ -q(1-q) & -q(1-q) \dots \dots q^2 \end{pmatrix}$$

とする。(35) 式より a 's を解き出せば

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{q^{2N-n-1} + q^{n+2}}{q^2 - q^{2N}}, \quad (n=0, 1, \dots, N-3) \\ a_{N-2} &= \frac{(1+q)q^N}{q^2 - q^{2N}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

を得る。 $\alpha \neq 1$ のときは (36) 式の右辺を α で割っておけばよい。また (27) 式を用いて二乗偏差積算値の最小値を計算すれば

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n^2 \right)_{\min} = 1 + \frac{1+q}{1-q} \frac{1}{1-q^{2N-2}} \quad \dots\dots\dots (37)$$

となる。第 2 図は $\mu = t_0/T = 0.5$ のときの (37) 式の値を図示したものである。当然ながら N の増大とともに二乗偏差積算値は単調に減少する。第 3 図は上のよう設計した系の目標値に整定するまでの過渡応答を描いたものである。ここで採用した規範がサンプルング時点における信号の値のみに注目したものである。

第2図 二乗偏差積算値 ($\mu=0.5$, $T=1$)

第3図 本文3.5の例題の系の過渡応答

ため、かげの応答が現われて、特性が必ずしも改善されているとはいえない。さらにこれを改めるためにはサンプリング時点間の状態をも考慮した規範を採用しなければならない。

4. 二乗制御面積最小法によるシンセシス

4.1 偏差ベクトルの計算 設計の規範として二乗制御面積を採用すれば、すでに緒言で述べたように今度は拡張された(遅延) z 変換を用いねばならない。第1図の系の制御偏差の遅延 z 変換は

$$E(z, m) = \frac{z^{-1} - C(z)HG(z, m)}{1 - z^{-1}} \quad (38)$$

である。ここで $HG(z, m)$ はホールド要素を含めた制御対象の拡張されたパルス伝達関数である。これは一般に分子にのみパラメータ m を含む z^{-1} の有理式

$$HG(z, m) = \frac{G_1(z, m)}{G_2(z)} \quad (39)$$

である。いま $G_2(z)$ を n 次の多項式とすれば $G_1(z, m)$ は z^{-1} から始まる $n+1$ 次の多項式で

$$G_1(z, m) = \sum_{k=1}^{n+1} g_k(m)z^{-k} \quad (40)$$

とする。いま3章と同様に $C(z) = G_2(z)D(z)$, $D(z) = a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N-n}z^{-N+n}$ とおき、これと(39)式とを(38)式に代入すれば次のようになる。

$$E(z, m) = \frac{z^{-1} - G_1(z, m)D(z)}{1 - z^{-1}} \quad (41)$$

$E(z, m)$ は(2)式に示したように定数項を欠いた N 次の多項式である。よって(20)式を導いたときと同様にして偏差ベクトル $e(m)$ が得られる。

$$\begin{pmatrix} e_1(m) \\ e_2(m) \\ \vdots \\ e_N(m) \end{pmatrix} = \tilde{V} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - G_m \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-n} \end{pmatrix}$$

これを簡単に次のようにおく。

$$\begin{aligned} e(m) &= \tilde{V}(u - G_m a) = v - B_m a \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - B_m \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-n} \end{pmatrix} \quad (42) \end{aligned}$$

ここで $B_m = \tilde{V}G_m$, $\tilde{V}$ は(21)式と同じ行列、また G_m は(40)式より作った次のような行列である。

$$G_m = \begin{pmatrix} g_1(m) & & & \\ & \ddots & & \\ & & g_1(m) & \\ & & & \ddots \\ & & & & g_n(m) \end{pmatrix}, \quad \{(N+1) \text{ 行 } (N-n+1) \text{ 列}\}$$

4.2 設計方程式の誘導 (4)式に示したように二乗制御面積は、 $e(m)$ の内積を m について0から1まで積分して求めることができる。(42)式を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{e(t)\}^2 dt &= \int_0^1 \{e(m), e(m)\} dm \\ &= \int_0^1 (v - B_m a, v - B_m a) dm \\ &= \int_0^1 \{ |v|^2 - 2(B_m a, v) + {}^t B_m B_m a, a \} dm \end{aligned}$$

ここでパラメータ m を含むものは B_m のみであるから上式は

$$\begin{aligned} &= |v|^2 - 2 \left(\int_0^1 B_m dm \cdot a, v \right) \\ &\quad + \left(\int_0^1 {}^t B_m B_m dm \cdot a, a \right) \end{aligned}$$

となる。行列の積分は個々の行列要素を積分すればよいのであるから結局

$$\int_0^\infty \{e(t)\}^2 dt = |v|^2 - 2(\bar{B}a, a) + ({}^t \bar{B}B a, a) \quad (43)$$

を得る。ここで $\bar{B}$ および ${}^t \bar{B}B$ は B_m および ${}^t B_m B_m$ の個々の行列要素を m について0から1まで積分したものを、新たに対応する要素としてできた行列である。

一方完全有限整定時間応答を得るためにベクトル a

第4図 2種類の規範による最適系の過渡応答の比較 (N=3)

第5図 2種類の規範によって設計した最適系の過渡応答の比較 (N=5)

に課せられる条件は3章の場合とまったく同じものである。それを(23)式と同じく $Fa - d = 0$ とすれば、この拘束条件の下に(43)式を最小にするベクトル a を求める方程式として前と同様の手続により

$$\begin{pmatrix} {}^t\overline{B}\overline{B} & {}^tF \\ F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\overline{B}v \\ d \end{pmatrix} \quad (44)$$

を得る。ここで λ はラグランジュの未定乗数である。

4.3 (44) 式の解の一意性について (44) 式が一意的に解きうることを示すには3.3の場合と同様に ${}^t\overline{B}\overline{B}$ が正値二次形式の行列であることを示せばよい。それは次のようにして証明することができる。

$$\int_0^1 |B_m a|^2 dm = \int_0^1 ({}^tB_m B_m a, a) dm = ({}^t\overline{B}\overline{B} a, a) > 0 \quad (45)$$

ここで $|B_m a|$ が m , $1 \geq m \geq 0$ に関して恒等的に零となり得ないことから、(45)式が決して零とならないことがわかる。よって ${}^t\overline{B}\overline{B}$ が正値二次形式の行列であることが証明された。

4.4 二乗制御面積の最小値 3.4 とまったく同様にして次の公式を得る。

$$\left[\int_0^\infty \{e(t)\}^2 dt \right]_{\min} = N + \frac{{}^t\overline{B}\overline{B} {}^tF {}^t\overline{B}v}{\begin{vmatrix} {}^t\overline{B}\overline{B} & {}^tF \\ F & 0 \end{vmatrix}} \left| \frac{{}^t\overline{B}\overline{B} {}^tF}{F} \right| \quad (46)$$

4.5 例題 3.5 と同じ系を取上げる。 $1/s(Ts+1)$ の拡張されたパルス伝達関数は

$$HG(z, m) = \frac{g_1(m)z^{-1} + g_2(m)z^{-2} + g_3(m)z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-dz^{-1})} \quad (47)$$

ただし

$$\begin{aligned} g_1(m) &= m\mu - 1 + d^m \\ g_2(m) &= -m\mu(1+d) + (\mu+d+1) - 2d^m \\ g_3(m) &= m\mu d - d(\mu+1) + d^m \end{aligned}$$

である。ただし、ここで μ , d などとは前と同じ記号とする。完全整定するためにコントローラが満たさねばならぬ条件は3.5の場合と同じである。上の一般論に

第6図 最適系の二乗制御面積 ($\mu=0.5$, $T=1$)

したがって a を求め最適系を設計し、そのステップ入力に対する過渡応答を調べたのが第4図 (N=3) および第5図 (N=5) の実線である。点線は第3図の N=3, 5 を比較のため記入したものである。これらの図より今回のほうが以前に比べて改善されていることがはっきりと読みとれる。第6図は二乗制御面積の最小値を整定時間の関数としてプロットしたものである。N=2 から3に移るとき大きく減少している。N=2 はここで述べた調整を行わない場合のもので、N=3 は、整定時間を1サンプリング周期だけ延ばしたものである。第6図からたかだか N=3 あるいは4程度、すなわち1ないし2程度の自由度を持たせて調整するだけで十分であることがわかる。

5. 結 言

多項式をベクトルあるいは行列によって表現し、線形代数的手法を適用することにより完全有限整定時間応答系の二乗偏差積算値および二乗制御面積最小規範によるシンセシスの問題が統一的かつ一般的に解決され、設計の基礎方程式、二乗偏差積算値および二乗制御面積の最小値を求める公式を導くことができた。なお第4図および第5図からわかるように設計の規範としては二乗制御面積最小法のほうがすぐれていることが明らかとなった。本論文では入力はステップと仮定してシンセシスの理論を展開してきたが、その他の

高次入力に対してもまったく同様に理論が構成されうることは明らかである。

終りに臨み、本研究を遂行するにあたり数値計算に献身的な助力を惜しまなかった京都大学工学部航空工学教室学生 津田順司君に謝意を表する。

文 献

- (1) 榎木・布川, 機械学会論文集, 27-182 (昭 36-10), 1664.
- (2) Y. Sawaragi & H. Fukawa, *Proc. 10th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* 1960, (1961), 353.
- (3) 浅野, 行列と行列式, (昭 30), 198, 共立社.

特殊鋼材規格実態調査

特殊鋼の複雑, 多岐にわたっている規格を整理統合するため, 産業構造調査会においてはこのほど, その特殊鋼熱間圧延鋼材規格の実態調査をしていたがまとまった。

これは特殊鋼メーカー 24 社について 36 年 7~9 月期をとり, SC 材, 構造用合金鋼, ばね鋼, 軸受鋼, ステンレス鋼の 5 鋼種の熱間圧延鋼材を対象に調査したものである。

特殊鋼業界にある規格としては JIS 規格, JIS 類似規格, 自動車工業会規格, ユーザ規格, 社内規格, 外国規格などがあり, その複雑さは他業種にはみられない現状である。

調査の結果の概要つぎのとおり。

▽鋼種別規格別受注構成

(1) 5 鋼種のうち, JIS の受注量の比重が最も大きいのは軸受鋼, 最も小さいのは構造用合金鋼である。

(2) SC 材および構造用合金鋼は JIS による受注が全受注に対し, それぞれ 70.5% および 50.9% と 5 鋼種の中では比重が低い。そして自工会規格とユーザ規格との比重が大きいのが特色で, 両規格を合わせて SC 材が 25.4%, 構造用合金鋼が 29.2% に達している。

(3) ばね鋼およびステンレス鋼は社内規格の比重が大きく, それぞれ全受注量の 11.6% および 21.7% に達し, この社内規格にはステンレス鋼の場合には自社で開発した新製品が含まれている。

(4) 軸受鋼は JIS とユーザ規格をあわせて全受注の 99.4% を占め, また JIS の比重も 5 鋼種中最高である。

化学成分の点では軸受鋼が最も規格の単純化がなされている。なお, ユーザ規格で納入しているメーカーは 2 社のみで, しかも特定の軸受メーカー向けのものであり, これを除けばほとんど JIS によって取引がなさ

れている。

(5) 外国規格の比重の高いのはばね鋼 (10.7%), ステンレス鋼 (8.1%) および構造用合金鋼 (9.4%) であるが, このうちばね鋼, ステンレス鋼はともに輸出比率が高いことが原因している。

一方構造用合金鋼は SAE 規格でシャシメーカーから発注される場合がかなりあるので, これが影響しているものとみられる。

▽平均ロットの大きさ

鋼種別の平均ロットを 1 鋼種当り受注トン数と 1 件当り発注トン数からみると, 次のような結果が出る。

(1) 量産 5 鋼種を平均すると 1 鋼種当り平均発注トン数は約 100 t, 1 件当り受注トン数は 5 t である。

(2) 1 鋼種当り受注トン数が最も大きいのは軸受鋼の 968 t であり, ばね鋼の 530 t がこれについている。最小はステンレス鋼の 53 t である。

(3) 1 件当り受注トン数ではばね鋼の 15.4 t が最大であり, 軸受鋼の 10.3 t がこれについている。量産特殊鋼の中でもばね鋼および軸受鋼はとくに受注単位が大きく, その理由としてはメーカー, 需要家とも企業数が比較的少なく, しかも需給両業者間の取引関係が他の鋼種に比べ安定していることがあげられる。

(4) ステンレス鋼は 5 鋼種のうちで平均ロットが最も小さいが, これは鋼種, 形状などが最も多岐にわたっているからである。

なお, 以上の調査は特殊鋼各鋼種の規格が非常に複雑多岐にわたっているもので, 生産ロットが小さく, これがコスト引下げを阻害する大きな要因となっていることから, 整理統合をのぞむ声が高まり, これに対応する準備として行なわれたものである。

(服部 敏夫)