621-501.22

ランダムパラメータを有する非線形制御系の非定常応答*

榎木義一**, 砂原善文**, 添田 喬***

Non-Stationary Responses of Nonlinear Control Systems with Randomly Time-Varying Characteristics Subjected to a Suddenly Applied Stationary Gaussian Random Input

by Yoshikazu SAWARAGI, Yoshifumi SUNAHARA, and Takashi SOEDA

Recent trends in automatic control systems have required much attention to the nature of the circuit parameters of controlled systems. This paper is devoted to the statistical evaluation of the response of nonlinear control systems with randomly time-varying characteristics subjected to a suddenly applied stationary Gaussian random input.

The linearization technique is applied and the mean-squared value of the response is obtained by solving the integral equation of Volterra's type. As a typical example of the application of general procedure, the responses of the system containing a saturated element are statistically evaluated.

1. 緒 言

実在の制御系に対して、従来までは、その回路特性値は時間に対して変化しないものと考えて、種々の研究をすすめて来た^{(1)~(3)}。しかし特に、制御対象の特性値、たとえば時定数、平衡定数、あるいは減衰係数等が時間とともに不規則に変化することはここに改めて実例を述べるまでもなく、しばしば我々の経験するところである。このような制御系の応答は、たとえその入力信号が定常不規則確率過程であっても、回路を通過した信号は、不規則に変化する回路定数の影響によって、一般に非定常確率過程となる。

本研究では、一つの特珠な場合として、正規性突変定常不規則入力⁽⁴⁾時刻 $t=t_0$ において非線形制御系に印加されたときの非定常応答を、その二乗平均値に注目して評価する手法について記述する。

2. おもな記号の説明

 t : 時間 $v(t)$: 制御系目標値信号 $u(t)$: 正規性定常不規則外乱 $x(t)$: 制御量 $z(t), y(t)$: 非線形要素に対する入力および出力

* 昭和36年11月16日 第4回自動制御連合講演会において講演, 原稿受付 昭和37年8月17日.

** 正員, 京都大学工学部.

*** 正員, 徳島大学工学部(徳島市南常三島町2の1).

 $f[z(t)]$: Zero-memory 形非線形伝達特性 $y_0(t)$: 操作量 A_i, k, T : 制御系の回路特性値 $A_0(t)$: 制御系に含まれるランダムパラメータ

$R_u(t_1-t_2)$: 時間間隔 t_1-t_2 に依存する $u(t)$ の自己相関関数

$R_z(t_1, t_2)$: 時間 t_1 および t_2 に依存する $z(t)$ の自己相関関数

 $\psi_z(t)$: t における応答 $z(t)$ の二乗平均値 ψ_u : $u(t)$ の分散

3. 応答の二乗平均値

第1図に示すような, Zero-memory 形非線形要素を含む自動制御系を考察する. 制御対象の入力 $y_0(t)$ (操作量)と出力 $x(t)$ (制御量)との間には

$$\sum_{i=1}^N A_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} + A_0(t)x(t) = ky_0(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

という関係があるものとする. ただし, (1)式にお

第1図 Zero-memory 形非線形要素を含む制御系のブロック線図

いて, $A_i (i=1, 2, \dots, N)$, および k は定数であり, $A_0(t)$ は平均値が零で, その自己相関関数が

$$R_{A_0}(t_1, t_2) = D^2 \delta(t_1 - t_2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

によって与えられる正規性定常確率過程とする。ただし, (2)式において, D^2 は定数であり, δ は Dirac の Delta 関数である。また, Zero-memory 形非線形要素⁽²⁾の入力 $z(t)$ と出力 $y(t)$ との関係は

$$y(t) = f[z(t)] \quad \dots\dots\dots (3)$$

によって与えられるものとする。このとき, 外乱 $u(t)$ と応答 $z(t)$ との間には

$$\sum_{i=1}^N A_i \frac{d^i z(t)}{dt^i} + A_0(t)z(t) + kf[z(t)] = ku(t) \quad \dots\dots\dots (4)$$

という関係の成立することがわかる。非線形制御系応答の解析を容易ならしめるため, この制御系に含まれる非線形要素を, それと等価なゲイン κ を有する線形要素で置換するならば⁽¹⁾, (4)式は

$$\sum_{i=1}^N A_i \frac{d^i z(t)}{dt^i} + k\kappa z(t) = ku(t) - A_0(t)z(t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここに, κ は

$$\begin{aligned} \langle z(t)^2 \rangle_{av.} = & \langle F(t)^2 \rangle_{av.} - 2 \int_{t_0}^t \langle W_1(t, \tau_1) F(t) A_0(\tau_1) z(\tau_1) \rangle_{av.} d\tau_1 \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \langle W_1(t, \tau_1) W_1(t, \tau_2) A_0(\tau_1) A_0(\tau_2) z(\tau_1) z(\tau_2) \rangle_{av.} d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。上式において, 記号 $\langle \rangle_{av.}$ は集合平均をあらわすものである。また(11)式の第1項は

$$\langle F(t) \rangle_{av.} = k^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \langle W_1(t, \tau_1) W_1(t, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \rangle_{av.} d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

のように表わされる。いま, (11)式において

$$\langle W_1(t, \tau_1) A_0(\tau_1) F(t) z(\tau_1) \rangle_{av.} = \langle W_1(t, \tau_1) A_0(\tau_1) \rangle_{av.} \langle F(t) z(\tau_1) \rangle_{av.} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} & \langle W_1(t, \tau_1) W_1(t, \tau_2) A_0(\tau_1) A_0(\tau_2) z(\tau_1) z(\tau_2) \rangle_{av.} \\ & = \langle W_1(t, \tau_1) W_1(t, \tau_2) A_0(\tau_1) A_0(\tau_2) \rangle_{av.} \langle z(\tau_1) z(\tau_2) \rangle_{av.} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

と仮定すれば⁽⁴⁾, 応答 $z(t)$ の時刻 t における二乗平均値 $\psi_z(t) \equiv \langle z(t)^2 \rangle_{av.}$ は

$$\psi_z(t) = \psi_F(t) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t W_1(t, \tau_1) W_1(t, \tau_2) R_{A_0}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。ただし

$$\psi_F(t) \equiv \langle F(t)^2 \rangle_{av.} = k^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t W_1(t, \tau_1) W_1(t, \tau_2) R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

である。(2)式を(15)式に代入することによって

$$\psi_z(t) = \psi_F(t) + D^2 \int_{t_0}^t W_1(t, \tau_1)^2 \psi_z(\tau_1) d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

第2図 等価線形化された制御方程式
(5)式のブロック線図による表現

$$\kappa[\psi_z(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) f_p(z, t) dz / \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_p(z, t) dz \quad \dots\dots\dots (6)$$

によってあらわされ, $f_p(z, t)$ は時刻 t における応答 $z(t)$ の正規性確率密度関数

$$f_p(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_z(t)}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\psi_z(t)} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。第2図に示すように, (5)式の右辺を一つの合成された入力 $V(t)$ と考え, これが単位インパルスであるとき, (5)式で入・出力の関係があらわされる制御系の応答を $W_1(t, \tau_1)$ (τ_1 は単位インパルスの印加された時刻)とすれば, 時刻 t における応答 $z(t)$ は

$$z(t) = \int_{t_0}^t W_1(t, \tau_1) V(\tau_1) d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ただし, $t=t_0$ は突変定常不規則入力の印加された時刻である。したがって

$$z(t) = F(t) - \int_{t_0}^t W_1(t, \tau_1) A_0(\tau_1) z(\tau_1) d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (9)$$

という関係をうる。ただし

$$F(t) = k \int_{t_0}^t W_1(t, \tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。(9)式の両辺の二乗平均値を計算すれば

となる。

しかるに(16)式および(17)式において, $W_1(t, \tau_1)$, $W_1(t, \tau_2)$ は時間 t に関する未知関数 κ を含むので, 直接 $\psi_z(t)$ を評価することはできない⁽¹⁾。したがって著者らがしばしば適用したように, 経過時間を $t_{j+1} - t_j = \Delta_j$ ($j=0, 1, 2, \dots$) のように微小分割し, その微小区間 Δ_j においては, κ は一定値 κ_j をとるものと

し、各時点 t_j における $\psi_z(t)$ を初期値より逐次評価するものとする。まず、第1区間 Δ_0 における値を計算する。(16)式および(17)式より

$$\psi_z(t_1) = \psi_F(t_1) + D^2 \int_{t_0}^{t_1} W_1(t_1 - \tau_1)^2 \Big|_{\kappa = \kappa_0} \psi_z(\tau_1) d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

および

$$\psi_F(t_1) = k^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} W_1(t_1 - \tau_1) W_1(t_1 - \tau_2) \Big|_{\kappa = \kappa_0} R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

という関係を得るから*、 $\psi_z(t_1)$ を積分方程式(18)式の解として求めることができる。

ただし

$$\kappa_0 = \kappa[\psi_z(t_0)] \quad \dots\dots\dots (20)$$

であり、この値は、考察している制御系が Zero-memory 形であることから容易に求められる。したがって、 $\psi_z(t_1)$ を(6)式に代入することによって、時刻 $t=t_1$ における等価ゲイン κ の値を

$$\kappa_1 = \kappa[\psi_z(t_1)] \quad \dots\dots\dots (21)$$

のように定めることができる。つぎに、時刻 $t=t_2$ における $\psi_z(t_2)$ を計算する。(17)式より

$$\psi_z(t_2) = \psi_F(t_2) + D^2 \int_{t_0}^{t_2} W_1(t_2, \tau_1)^2 \psi_z(\tau_1) d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (22)$$

という関係を得るから、等価ゲイン κ の値として、区間 Δ_0 、および Δ_1 においてそれぞれ κ_0 および κ_1 を用いて、(22)式を変形すれば

$$\psi_z(t_2) = \psi_F(t_2) + D^2 \left\{ \int_{t_0}^{t_1} W_1(t_2 - \tau_1)^2 \Big|_{\kappa = \kappa_0} \psi_z(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_1}^{t_2} W_1(t_2 - \tau_1)^2 \Big|_{\kappa = \kappa_1} \psi_z(\tau_1) d\tau_1 \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

という結果をうる。ただし

$$\psi_F(t_2) = k^2 \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_0}^{t_2} W_1(t_2, \tau_1) W_1(t_2, \tau_2) R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

であり、次式のように変形される。

$$\begin{aligned} \psi_F(t_2) = & k^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} W_1(t_2 - \tau_1) W_1(t_2 - \tau_2) \Big|_{\kappa = \kappa_0} R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + 2k^2 \int_{t_0}^{t_1} W_1(t_2 - \tau_1) \Big|_{\kappa = \kappa_0} d\tau_1 \int_{t_1}^{t_2} W_1(t_2 - \tau_2) \Big|_{\kappa = \kappa_1} R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + k^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} W_1(t_2 - \tau_1) W_1(t_2 - \tau_2) \Big|_{\kappa = \kappa_1} R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

(23)式より $\psi_z(t_2)$ を求め、これを(6)式に代入することによって $\kappa_2 = \kappa[\psi_z(t_2)]$ を計算することができる。

逐次、この手法を踏襲することによって、一般に時刻 $t=t_n$ における $\psi_z(t_n)$ は

$$\psi_z(t_n) = \psi_F(t_n) + D^2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} W_1(t_n - \tau_1)^2 \Big|_{\kappa = \kappa_j} \psi_z(\tau_1) d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (26)$$

によって計算すればよい。ただし

$$\psi_F(t_n) = k^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} W_1(t_n - \tau_1) \Big|_{\kappa = \kappa_i} d\tau_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} W_1(t_n - \tau_2) \Big|_{\kappa = \kappa_j} R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (27)$$

かつ

$$\kappa_j = \kappa[\psi_z(t_j)] \quad (j=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (28)$$

である。

さて、等価ゲイン κ の時間の経過にともなう変化がその分割区間に比べ微小であるときは、(26)式および(27)式のかわりに、以下に示す近似計算を実行してもさしつかえない。すなわち、 $\psi_z(t_n)$ の満足すべき積分方程式は

* この場合において、荷重関数は一般に、単位インパルスの印加された時刻 τ_1 、および時間 t の関数となり、 $W_1(t, \tau_1)$ のようにあらわされ、さらにこれは非線形要素の非定常等価ゲイン $\kappa[\psi_z(t)]$ にも依存する。しかし、すでに述べたような κ_j ($j=1, 2, \dots$) という等価ゲインの時間分割を考慮すれば、 $W_1(t, \tau_1)$ の中に含まれるすべての係数は、この時間区間 Δ_j の間は一定値となり、荷重関数 $W_1(t, \tau_1)$ は、 Δ_j の間は $(t - \tau_1)$ のみに依存することになる。この見地から、 Δ_0 においては

$$W_1(t, \tau_1) \Big|_{\text{at } t=t_1} \equiv W_1(t_1, \tau_1) = W_1(t_1 - \tau_1) \Big|_{\kappa = \kappa_0}$$

の表現を用いることにする。

$$\psi_z(t_n) = \psi_F(t_n) + D^2 \int_{t_0}^{t_n} W_1(t_n - \tau_1)^2 \Big|_{\kappa = \kappa_{n-1}} \psi_z(\tau_1) d\tau_1 \dots \dots \dots (29)$$

となる。ただし、上式第1項は

$$\psi_F(t_n) = k^2 \int_{t_0}^{t_n} \int_{t_0}^{t_n} W_1(t_n - \tau_1) W_1(t_n - \tau_2) \Big|_{\kappa = \kappa_{n-1}} R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \dots \dots \dots (30)$$

によって与えられ、かつ

$$\kappa_{n-1} = \kappa[\psi_z(t_{n-1})] \dots \dots \dots (31)$$

である。この場合は、(26)式および(27)式による計算手法にくらべ、時間の経過とともに誤差の蓄積はまぬがれない。したがって、制御系が、その入力信号に対して定位性のあるときは、その定常値を基準にして時間の経過に逆行して逐次その応答の計算を実行すればよい⁽¹⁾⁽²⁾。すなわち、時間の十分経過した後の二乗平均値 $\psi_z(t) \Big|_{t=\infty} \equiv \psi_z$ は、(15)式より

$$\psi_z = \psi_F + \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} W_1(t, \tau_1) W_1(t, \tau_2) \langle A_0(\tau_1) A_0(\tau_2) \rangle_{av} \cdot \langle z(\tau_1) z(\tau_2) \rangle_{av} d\tau_1 d\tau_2 \dots \dots \dots (32)$$

によって計算される。ただし

$$\psi_F(t) \Big|_{t=\infty} \equiv \psi_F = k^2 \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} W_1(t, \tau_1) W_1(t, \tau_2) \langle u(\tau_1) u(\tau_2) \rangle_{av} d\tau_1 d\tau_2 \dots \dots \dots (33)$$

となる。したがって(32)式に(2)式の関係を用い、かつ、 $R_z(0) = \psi_z$ であることに注意すれば

$$\psi_z = \psi_F + D^2 \psi_z \int_{t_0}^{\infty} W_1(t, \tau_1)^2 d\tau_1 \dots \dots \dots (34)$$

となる。したがって等価ゲイン κ の値として

$$\kappa = \kappa[\psi_z(t) \Big|_{t=\infty}] \equiv \kappa_{\infty} \dots \dots \dots (35)$$

を用い、

$$W_1(t, \tau_1) \equiv W_1(t - \tau_1) \Big|_{\kappa = \kappa_{\infty}}^{(1)} \dots \dots \dots (36)$$

という関係を(34)式へ適用することによって

$$\psi_z = \psi_F / [1 - D^2 \int_{t_0}^{\infty} W_1(t - \tau_1)^2 \Big|_{\kappa = \kappa_{\infty}} d\tau_1] \dots \dots \dots (37)$$

という結果をうる。ただし $1 - D^2 \int_{t_0}^{\infty} W_1(t - \tau_1)^2 \Big|_{\kappa = \kappa_{\infty}} d\tau_1 \neq 0$ とする。(35)式および(37)式を連立させて、 $(\kappa_{\infty}, \psi_z)$ を計算することができる。第3図に示したように、時間とともに変化する等価ゲイン κ の値が、その時間の経過に対してほとんど変化を示さないようになる上限時刻、換言すれば、二乗平均値 $\psi_z(t)$ が定常状態へ移行するとみなされる時刻 $t = t_s$ を求め⁽¹⁾⁽²⁾、 $t_0 \sim t_s$ の区間を $t_{s-j} - t_{s-j-1} = \Delta_{s-j}$ ($j=0, 1, 2, \dots$) のように微小分割し、各時点 $t_s, t_{s-1}, t_{s-2}, \dots$ における値を逐次評価することにする。すなわち、 $t = t_s$ の値は

$$\psi_z(t_s) = \psi_F(t_s) + D^2 \int_{t_0}^{t_s} W_1(t_s - \tau_1)^2 \Big|_{\kappa = \kappa_{\infty}} \psi_z(\tau_1) d\tau_1 \dots \dots \dots (38)$$

を用いて計算すればよい。ただし、第1項は

$$\psi_F(t_s) = k^2 \int_{t_0}^{t_s} \int_{t_0}^{t_s} W_1(t_s - \tau_1) W_1(t_s - \tau_2) \Big|_{\kappa = \kappa_{\infty}} R_u(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \dots \dots \dots (39)$$

であり、等価ゲイン κ の値として

$$\kappa_{\infty} = \kappa[\psi_z(t) \Big|_{t=\infty}] \equiv \kappa[\psi_z] \dots \dots \dots (40)$$

を用いる。したがって、上述の手法を繰返すことによって、逐次、 $\kappa[\psi_z(t_s)] \equiv \kappa_s$ 、 $\psi_z(t_{s-1})$ 、 $\kappa[\psi_z(t_{s-1})] \equiv \kappa_{s-1}$ 、 $\psi_z(t_{s-2}), \dots$ を計算することができる。

4. 具 体 例

例 1. 計算の便宜上、(1)式において、 $N=1$ 、 $A_1 = T$ とする。また、時刻 $t=0$ で制御系に印加される外乱 $u(t)$ の統計学的性質としては、平均値が零

第3図 経過時間の分割と等価ゲインの値との関係

で、その自己相関関数は

$$R_u(t_1, t_2) = \psi_u \delta(t_1 - t_2) \quad (\psi_u > 0) \dots\dots\dots (41)$$

によって与えられる正規性定常確率過程とする。ただし、 ψ_u は定数である。(5)式に対応する等価線形制御系の制御方程式は

$$T \frac{dz(t)}{dt} + k\kappa z(t) = ku(t) - A_0(t)z(t) \dots\dots\dots (42)$$

となる。経過時間 t を $t_{j+1} - t_j = \Delta$ のように等間隔に分割し、各時点 $t = t_j$ における応答 $z(t)$ の二乗平均値を計算する。(42)式において、右辺を一つの合成された入力 $V(t)$ と考えたとき、このような方程式であらわされる系の荷重関数は

$$W_1(t - \tau_1) = \frac{1}{T} \exp\left\{-\frac{k\kappa}{T}(t - \tau_1)\right\}, \quad (t > \tau_1) \dots\dots\dots (43)$$

となる。ただし、 κ は $t_j < \tau < t_{j+1}$ においては κ_j を用いるものとする。(43)式を(18)式および(19)式へ適用することによって、時刻 $t = t_1$ において、

$$\begin{aligned} \psi_z(t_1) &= \psi_F(t_1) \\ &+ \frac{D^2}{T^2} \int_0^{t_1} \exp\left\{-\frac{2k\kappa_0}{T}(t_1 - \tau_1)\right\} \psi_z(\tau_1) d\tau_1 \end{aligned} \dots\dots\dots (44)$$

および

$$\psi_F(t_1) = \frac{k\psi_u}{2T\kappa_0} \left\{1 - \exp\left(-\frac{2k\kappa_0}{T}t_1\right)\right\} \dots\dots\dots (45)$$

という結果をうるから、(44)式を t_1 について微分し、(45)式を用いることによって、つぎの微分方程式を得る。

$$T^2 \dot{\psi}_z(t_1) + (2T\kappa_0 - D^2)\psi_z(t_1) = k^2\psi_u \dots\dots\dots (46)$$

ただし $\dot{\psi}_z(t_1)$ は $\psi_z(t_1)$ の t_1 に関する導関数である。したがって $\psi_z(t_1)|_{t_1=0} = 0$ という初期条件のもとに(46)式の解は

$$\psi_z(t_1) = \frac{k^2\psi_u}{2k\kappa_0 - D^2} \left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{2k\kappa_0}{T} - \frac{D^2}{T^2}\right)t_1\right\}\right] \dots\dots\dots (47)$$

となる。つぎに、時刻 $t = t_2$ における $\psi_z(t_2)$ を計算する。(23)式より

$$\begin{aligned} \psi_z(t_2) &\cong \psi_F(t_2) \\ &+ \frac{D^2}{T^2} \left[\exp\left\{-2\frac{k\kappa_0}{T}\left(t_2 - \frac{t_1}{2}\right)\right\} \psi_z\left(\frac{t_1}{2}\right) t_1 \right. \\ &\quad \left. + \exp\left\{-2\frac{k\kappa_1}{T}\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)\right\} \psi_z\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)(t_2 - t_1) \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (48)$$

という近似式を得るから

$$\psi_z\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \cong \{\psi_z(t_2) + \psi_z(t_1)\} / 2 \dots\dots\dots (49)$$

という関係式を用いて計算することができる。一般

に、 $\psi_z(t_n)$ は

$$\begin{aligned} \psi_z(t_n) &\cong \psi_F(t_n) \\ &+ \frac{D^2}{T^2} \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left\{-2\frac{k\kappa_j}{T}\left(t_n - \frac{t_{j+1} + t_j}{2}\right)\right\} \\ &\quad \times \psi_z\left(\frac{t_{j+1} + t_j}{2}\right) (t_{j+1} - t_j) \end{aligned} \dots\dots\dots (50)$$

によって計算される(付録A参照)。ただし

$$\psi_z\left(\frac{t_{j+1} + t_j}{2}\right) = \frac{1}{2} \{\psi_z(t_{j+1}) + \psi_z(t_j)\} \dots\dots\dots (51)$$

および

$$\kappa_j = \kappa[\psi_z(t_j)] \quad (j=0, 1, 2, \dots, n-1) \dots\dots\dots (52)$$

である。等価ゲイン κ の時間の経過にともなう変化が、その分割区間にくらべ微小であるときは、(29)式を用いてえられる

$$\begin{aligned} \psi_z(t_n) &= \frac{k^2\psi_u}{2kT\kappa_{n-1} - D^2} \left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{2k\kappa_{n-1}}{T} - \frac{D^2}{T^2}\right)t_n\right\}\right] \end{aligned} \dots\dots\dots (53)$$

より計算すればよい。

いま、非線形伝達特性が、第4図に示すように、

$$f(z) = \begin{cases} -a & (z < -a) \\ z & (|z| < a) \\ a & (z > a) \end{cases} \dots\dots\dots (54)$$

によって与えられたときの応答の二乗平均値を計算する。このとき、(54)式の等価ゲイン κ は

$$\kappa = 2\Phi\{a/\sqrt{\psi_z(t)}\} \dots\dots\dots (55)$$

となる。ただし

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\zeta \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \dots\dots\dots (56)$$

第4図 飽和形非線形伝達特性

第5図 具体例1の応答 $z(t)$ の二乗平均値

である。したがって、二乗平均値 $\psi_z(t)$ は、 $\kappa_0=1$ であることを考慮することによって、(50)式または(53)式より逐次評価される。第5図は

$$T=1.0, k=1.0, \psi_u=1.0, a=1.0, \Delta=0.05 \dots\dots\dots (57)$$

としたときの $\psi_z(t)$ の計算結果を示したものである。同図上、点線は(53)式を用いて計算したものである。

例2. 考察する制御系ならびにその制御系に含まれる非線形伝達特性は、具体例1と同様とする。時刻 $t=0$ において、この制御系に印加される正規性定常不規則外乱 $u(t)$ の自己相関関数は

$$R_u(t_1, t_2) = \psi_u \exp(-\beta|t_1 - t_2|), \quad (\beta > 0) \dots\dots\dots (58)$$

によって与えられるものとする。ここでは、(29)式および(30)式にしたがって $\psi_z(t)$ を計算してみる。このときの荷重関数は、前例と同様に(43)式によって与えられるから、時刻 $t=t_n$ における二乗平均値 $\psi_z(t_n)$ は、積分方程式

$$\psi_z(t_n) = \psi_F(t_n) + \frac{D^2}{T^2} \int_0^{t_n} \exp\left\{-2\frac{k\kappa_{n-1}}{T}(t_n - \tau_1)\right\} \psi_z(\tau_1) d\tau_1, \quad (t_n > \tau_1) \dots\dots\dots (59)$$

の解として与えられる。ただし

$$\begin{aligned} \psi_F(t_n) = & \frac{k\psi_u}{\kappa_{n-1}} \left[\frac{1}{\beta T + k\kappa_{n-1}} + \frac{2k\kappa_{n-1}}{(\beta T + k\kappa_{n-1})(\beta T - k\kappa_{n-1})} \right. \\ & \times \exp\left\{-\left(\beta + \frac{k\kappa_{n-1}}{T}\right)t_n\right\} - \frac{1}{\beta T - k\kappa_{n-1}} \exp\left(-2\frac{k\kappa_{n-1}}{T}t_n\right) \Big] \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

である(付録B参照)。(59)式および(60)式より

$$T^2 \dot{\psi}_z(t_n) + (2Tk\kappa_{n-1} - D^2) \psi_z(t_n) = U(t_n) \dots\dots\dots (61)$$

という微分方程式を得る。ただし

$$U(t_n) = \frac{2k^2\psi_u T}{(\beta T + k\kappa_{n-1})} \left[1 - \exp\left\{-\left(\beta + \frac{k\kappa_{n-1}}{T}\right)t_n\right\} \right] \dots\dots\dots (62)$$

である。したがって、初期条件 $\psi_z(t_n)|_{t_n=0} = 0$ を満足する(61)式の解を求めると

$$\psi_z(t_n) = \frac{2k^2\psi_u}{\beta T + k\kappa_{n-1}} \left[\frac{1}{2k\kappa_{n-1}T - D^2} - \frac{1}{k\kappa_{n-1}T - \beta T - D^2} \exp\left\{-\left(\beta + \frac{k\kappa_{n-1}}{T}\right)t_{n-1}\right\} \right] \dots\dots\dots (63)$$

となる。これより、定常解は

$$\psi_z = \frac{2k^2\psi_u}{(\beta T + k\kappa_{n-1})(2k\kappa_{n-1}T - D^2)} \dots\dots\dots (64)$$

となることが容易にわかる。ただし

$$\kappa_{n-1} = \kappa[\psi_z(t_{n-1})] \dots\dots\dots (65)$$

である。したがって(63)、(64)および(65)式を用いて逐次その応答を評価することができる。第6図は、非線形要素の伝達特性が(54)式によって与えられた時の $\psi_z(t)$ を計算した結果を示したものである。

5. 結 言

ここでは、時間に対して不規則に変化する回路特性

第6図 具体例2の応答 $z(t)$ の二乗平均値

値の統計学的性質として、その自己相関関数が(2)式で与えられるような非線形制御系に、正規性定常不規則信号が突発的に印加された時の応答を、その二乗平均値 $\psi_z(t)$ に注目して評価する手法について述べた。この解析にあたっては、 $\psi_z(t)$ を、(13)および(14)式の仮定のもとに、(5)式に示した等価線形化制御方程式から導かれる積分方程式の解として求めている。しかし、回路特性値が白色雑音以外の確率的变化をする場合、この仮定の妥当性については、さらに検討の必要がある。

なお、非線形伝達特性の応答に及ぼす影響が比較的小さい場合には、(29)式に示したような Faltung 形の積分方程式の解として簡単にその形状を定め、しかるのち逐次各時点における値を評価すればよいことを、具体例をもって示してある。また、回路特性が不規則に変化することに起因する制御系の安定性に関する吟味については稿を改めて述べることにする。

本研究実施にあたり、御協力いただいた京都大学大学院学生 中溝高好君に対して感謝の意を表する次第である。

付 録 A

積分方程式 (26) 式の評価 積分方程式 (26) 式を数値計算するにあたっては、つぎの近似公式を用いる。 n を微小区間とすれば

$$\int_0^h F_2(\zeta) d\zeta = F_2\left(\frac{1}{2}h\right)h \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$\int_0^{2h} F_2(\zeta) d\zeta = \left\{ \frac{1}{2}F_2\left(\frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}F_2\left(h + \frac{1}{2}h\right) \right\} 2h, \quad \dots\dots\dots (67)$$

$$\int_0^{3h} F_2(\zeta) d\zeta = \left\{ \frac{3}{8}F_2\left(\frac{1}{2}h\right) + \frac{2}{8}F_2\left(h + \frac{1}{2}h\right) + \frac{3}{8}F_2\left(2h + \frac{1}{2}h\right) \right\} 3h \quad \dots\dots\dots (68)$$

および

$$\int_0^{4h} F_2(\zeta) d\zeta = \left\{ \frac{13}{48}F_2\left(\frac{1}{2}h\right) + \frac{11}{48}F_2\left(h + \frac{1}{2}h\right) + \frac{11}{48}F_2\left(2h + \frac{1}{2}h\right) + \frac{13}{48}F_2\left(3h + \frac{1}{2}h\right) \right\} 4h \quad \dots\dots\dots (69)$$

という関係が存在する。したがってたとえば (66) 式を用いると、(26) 式は

$$\psi_s(t_n) = \psi_F(t_n) + D^2 \sum_{j=0}^{n-1} W_1\left(t_n - \frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)^2 \Big|_{\kappa=\kappa_j} \psi_s\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right) \Delta \quad \dots\dots\dots (70)$$

となるから (51) 式を用いて $\psi_s(t_n)$ を計算すれば

$$\psi_s(t_n) = \frac{\psi_F(t_n) + K}{1 - D^2 W_1\{(t_n - t_{n-1})/2\}^2 \Big|_{\kappa=\kappa_{j-1}}} \Delta/2 \quad \dots\dots\dots (71)$$

となる。ただし

$$K = D^2 \sum_{j=0}^{n-2} W_1\{t_n - (t_j + t_{j+1})/2\}^2 \Big|_{\kappa=\kappa_j} \{\psi_s(t_j) + \psi_s(t_{j+1})\} \Delta/2 + D^2 W_1\{(t_n - t_{n-1})/2\}^2 \Big|_{\kappa=\kappa_{n-1}} \psi_s(t_{n-1}) \Delta/2 \quad \dots\dots\dots (72)$$

であり、かつ

$$1 - D^2 W_1\{(t_n - t_{n-1})/2\}^2 \Big|_{\kappa=\kappa_{n-1}} \Delta/2 \neq 0, \quad t_{j+1} - t_j = \Delta \quad \dots\dots\dots (73)$$

とする。

付 録 B

$\psi_F(t)$ の評価 制御系入力信号の統計学的性質として、その自己相関関数が (58) 式のように与えられる場合には、 $\psi_F(t)$ の評価は以下にのべるようにおこなえばよい。

$\tau_1 - \tau_2 = \tau$ ($\tau > 0$) と置換すれば、一般に

$$\int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^t \int_0^{t-\tau} d\tau d\tau_2 + \int_{-t}^0 \int_0^{t+\tau} d\tau d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (74)$$

という関係があるから、この関係を (30) 式に適用すれば

$$\begin{aligned} \psi_F(t_n) &= k^2 \int_0^{t_n} \int_0^{t_n-\tau} W_1(t_n, \tau_2 + \tau) W_1(t, \tau_2) R_u(\tau) d\tau d\tau_2 \\ &\quad + k^2 \int_{-t_n}^0 \int_0^{t_n+\tau} W_1(t_n, \tau_1) W_1(t_n, \tau_1 - \tau) R_u(\tau) d\tau d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (75) \end{aligned}$$

となる。したがって右辺第 2 項の積分記号を変更して

$$\begin{aligned} \psi_F(t_n) &= k^2 \int_0^{t_n} \int_0^{t_n-\tau} W_1(t_n, \tau_2 + \tau) W_1(t_n, \tau_2) R_u(\tau) d\tau d\tau_2 \\ &\quad + k^2 \int_0^{t_n} \int_0^{t_n-\tau} W_1(t_n, \tau_1) W_1(t_n, \tau_1 + \tau) R_u(-\tau) d\tau d\tau_1 \quad \dots\dots\dots (76) \end{aligned}$$

という結果をうる。しかるに

$$R_u(\tau) = R_u(-\tau) \quad \dots\dots\dots (77)$$

であるから、(76) 式は

$$\psi_F(t_n) = 2k^2 \int_0^{t_n} R_u(\tau) d\tau \int_0^{t_n-\tau} W_1(t_n, \tau_2 + \tau) W_1(t_n, \tau_2) d\tau_2 \dots \dots \dots (78)$$

となる。(78)式において

$$\int_0^{t_n-\tau} W_1(t_n, \tau_2 + \tau) W_1(t_n, \tau_2) d\tau_2 \dots \dots \dots (79)$$

は, 入力 u の性質に依存しないから, 制御系の形状が定まれば直ちに計算される. なお(60)式を計算するにあたっては,

$$\psi_F(t_n) = k^2 \int_0^{t_n} R_u(\tau) d\tau \int_0^{t_n-\tau} W_1(t_n - \tau_2 - \tau) W_1(t_n - \tau_2) |_{\tau = \tau_{n-1}} d\tau_2 \dots \dots \dots (80)$$

を用いればよい.

文 献

- (1) Y. Sawaragi, Y. Sunahara, & T. Soeda, *Tech. Reps. of the Engng. Res. Inst., Kyoto Univ.*, 12, Report No. 91 (1962-2), 1.
- (2) 榎木・砂原・添田, 機械学会論文集, 27-182 (昭 36-10), 1 670.
- (3) 榎木・砂原・添田, 機械学会論文集, 28-188 (昭 37-4), 515. および 522.
- (4) J.S. Samuels, *IRE Trans. on Information Theory*, IT-5, (1959-5), 271.

621-501.22

平均値をもつ突変不規則入力をうける非線形制御系の応答*

(回路特性が時間に対して変化しない場合)

榎木 義一**, 砂原 善文**, 添田 喬***

On the Response of Nonlinear Control Systems Subjected to a Suddenly Applied Stationary Gaussian Random Input with the Mean Value

(Response of Nonlinear Control Systems with Time-Invariant Characteristics)

by Yoshikazu SAWARAGI, Yoshifumi SUNAHARA, and Takashi SOEDA

In this paper, a method of evaluating the response of nonlinear control systems subjected to a suddenly applied stationary Gaussian random input with the mean value is described. Taking the d.c. component of the random input signal to the nonlinear element in the system into account, the nonlinear element is replaced by two equivalent linear ones as we already showed in our earlier paper. By using this linearization technique the response is evaluated by the so-called partition method.

1. 緒 言

著者らは,すでに非線形制御系にあらわれる非定常確率過程に関する解析的研究として,平均値が零である正規性定常不規則信号が,制御系に突発的に印加されたときの応答を,(1)回路特性が時間に対して変化しない場合,(2)回路特性が時間に対して規則的に,

または不規則に変化する場合について,統計学的に評価する手法を述べてきた⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾.しかしながら,制御系に印加される入力としては,上述の信号のほかに,平均値をもつ不規則信号が突発的に制御系に印加される場合が非常に多い.このような場合には,著者らがすでに発表した方法⁽¹⁾⁽²⁾を若干拡張し,制御系入力信号の平均値に相当する直流成分を考慮した統計学的等価線形化法を導入する必要がある.以下に制御回路特性値が変化しないものとして考察をすすめる.

* 昭和 37 年 4 月 4 日 第 39 期通常総会講演会において講演,原稿受付 昭和 37 年 8 月 17 日.

** 正員,京都大学工学部.

*** 正員,徳島大学工学部(徳島市南常三島町 2 の 1).