539.385 : 539.374

軸方向に6個の半円切欠きを有する丸棒の

弾塑性ねじりについて*

(第2報, 断面のゆがみ)

中山 孝 之**

On the Elastic-Plastic Torsion of a Shaft with
Six Semi-Circular Longitudinal Grooves

(2nd Report, The Warping of the Cross-Section)

by Takashi NAKAYAMA

The forms of the elastic-plastic boundary were described in the 1st report which concerns with the elastic-plastic torsion of a shaft with six semi-circular longitudinal grooves. Within the author's knowledge, for the shaft with complicated contour such as in the report, the warping of the cross-section has not yet been determined except the egg-shaped contour shaft. In this 2nd report the warping of the cross-section of the shaft is calculated on the basis of the results obtained in the 1st report. First, to determine the warping z in the elastic region, the relation between the value of z at each nodal point and the value of ϕ obtained in the 1st report is determined by placing the triangular net over the cross-section as in the 1st report; the value of z are obtained by relaxational method. After the warping in the elastic region is determined, the warping in the plastic region can easily be computed by the equation already established analytically.

1. 緒 言

第1報⁽¹⁾において、軸方向に6個の半円切欠きを有する丸棒を弾性限度をこえてねじったときの弾塑性境界の形状を求めた。このように断面に塑性域のある場合の断面のゆがみすなわち軸方向の変位は、卵形断面の場合⁽²⁾は解析的に解かれているが他の断面についてはほとんどない。それで第1報で得た結果をもとにして、本報は断面のゆがみを近似計算したものである。

2. 理 論

2.1 弾性領域の断面のゆがみ 断面上に x, y 軸をとって原点を軸の中心にとると、弾性領域における軸方向の変位 z は次の2式を満足せねばならない⁽³⁾。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \theta y + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\theta x + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 G はせん断弾性係数、 θ は棒の単位長さ当りのねじれ角、 ϕ は応力関数である。(1), (2) 式より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

次に第1図に示すように x, y 軸をとれば図形の対称性から塑性域が存在するときでも第1報の結果より $y = \sqrt{3}x$ の直線、 $y = -\sqrt{3}x$ の直線および断面外形に囲まれた全断面の1/6の図形のみ考えれば十分である。

(i) 直線 $y = \sqrt{3}x$ 上では(第2図)、断面上の直

第 1 図

* 昭和37年6月29日 九州支部熊本地方講演会において講演、原稿受付 昭和37年10月18日。

** 正員、九州大学工業教員養成所(福岡市箱崎町)。

線 $y=\sqrt{3}x$ 上の任意点において図示のように直線方向に ν , それに直角方向に s と名付ければ

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5)$$

しかるに図形の対称性から直線 $y=\sqrt{3}x$ 上の任意点では $\partial \phi / \partial s = 0$ である。よって (4) 式より

$$\sqrt{3} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6)$$

また,
$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial z}{\partial y}$$

なるゆえ (1), (2) 式を上式に代入して (6) 式を用いると

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \left(\theta y + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\theta x + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \theta (y - \sqrt{3}x) + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \sqrt{3} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right\} = 0$$

よって原点で $z=0$ とすれば,

$$y=\sqrt{3}x \text{ 上では } z=0 \quad (7)$$

同様に (1), (2), (5) 式を用いて

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2x\theta + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \frac{2}{\sqrt{3}} y\theta + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad (8)$$

(ii) y 軸 ($x=0$) 上では, 図形の対称性より $\partial \phi / \partial x = 0$, ゆえに (2) 式より, $\partial z / \partial y = 0$, よって原点の z を 0 にとれば,

$$y \text{ 軸上では } z=0 \quad (9)$$

$\partial z / \partial x$ は (1) 式そのものである。

(iii) 直線 $y=-\sqrt{3}x$ 上では (第 3 図) (i) の場合と同様に計算して

$$z=0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -2x\theta + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \frac{2}{\sqrt{3}} y\theta + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad (11)$$

以上 (i), (ii), (iii) の計算より明らかのごとく弾性領域内の断面の変位 z は直線 $y=\sqrt{3}x$, $x=0$, $y=-\sqrt{3}x$ 上では $z=0$ かつそれぞれの直線上ではそれぞれ (8), (1), (11) 式で表わされる境界条件を満足し,

断面上の任意点で (3) 式を満足する z を求めればよい。ここで (8), (11) 式は全く同じ値をとるから, 第 1 図に示すように y 軸に関して対称な輪郭 Γ_1, Γ_2 内の対称点 M_1, M_2 における z の値は絶対値等しく符号相反する。したがって輪郭 Γ_1 のみについて境界条件 (7), (8), (9), (1) 式を満足し断面上すべての点で (3) 式を満足する z を求めれば十分である。

2.2 塑性領域内の断面のゆがみ 材料のせん断応力とひずみとの関係が第 1 報第 4 図に示されるものであるとき, 塑性領域の断面の軸方向の変位 z について考える。今第 4 図のように P を断面の塑性領域内の任意点とし PQ を P から断面の外形 C への最短の法線*とする。さらに R を PQ と弾塑性境界 Γ との P に最も近い交点とし, 直線 RQ に原点から下した垂線の長さを d とする。 d は RQ にそって弾塑性境界から棒外形輪郭線 C に向かって移動するときに原点が右側にあれば正と考える。また PR の距離を n とすると, z は次式で表わされる⁽⁴⁾。

$$z(P) = z(R) + n\theta d \quad (12)$$

ここで, $z(P), z(R)$ はそれぞれ点 P および R におけ

第 2 図

第 3 図

第 4 図

* 塑性領域内の任意点 P から断面の外形 C への法線は全断面においては何本も引くことができますが, そのうち最も短い法線を意味する。

る軸方向の変位 z の値である。 z は弾塑性境界において連続でなければならないから、弾性領域内の軸方向の変位が決定されれば (12) 式より 塑性領域内の断面の軸方向の変位は定まる。

3. 計算および結果

3.1 弾性領域内の z の値 この領域内の変位 z を求めるため第1報で使用した一辺の長さが $a (=R/9\sqrt{3})$ である正三角形網目を用いかつ第1報で得た ϕ の値 (これに相應する χ の値) をもとにして計算を行なう。 z の値は領域内どの結節点においても (3) 式に相当する次の差分方程式を満足せねばならぬ。

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 - 6z_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで添字 0 は中央の結節点, 1, 2, ..., 6 は 0 のまわりの結節点を意味する。

(i) $y = \sqrt{3}x$ の結節点において (第5図)

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\text{上の2式より} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s_1} \right)$$

$$\text{今近似的に} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \doteq \frac{z_1 - z_4}{2a}, \quad \frac{\partial z}{\partial s_1} \doteq \frac{z_6 - z_3}{2a} \text{とおき,}$$

かつ対称図形であるため前述のように $z_3 = -z_1, z_4 = -z_6$ となしう。ゆえに

$$\frac{\partial z}{\partial s} \doteq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(-z_3) + (-z_4)}{a}$$

よって (8) 式より

$$(-z_3) + (-z_4) \doteq \sqrt{3}a \left(2x\theta + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) \quad \dots\dots\dots(14)$$

(ii) y 軸 ($x=0$) 上の結節点において (第6図)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu_2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

ゆえに, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \nu_2} \right)$, よって (1) 式より

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \theta y + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$= \theta y + \frac{1}{\sqrt{3}G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \nu_2} \right) \quad \dots\dots\dots(15)$$

今近似的に $\frac{\partial z}{\partial x} \doteq \frac{z_1 - z_4}{2a}$ とおき, $z_4 = -z_1$ なるため (15) 式より近似的に

$$z_1 \doteq a \left\{ \theta y + \frac{1}{\sqrt{3}G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \nu_2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

(iii) 領域内の任意の結節点において (第7図)

(ii) の場合と同様に

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \theta y + \frac{1}{\sqrt{3}G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \nu_2} \right)$$

今近似的に

$$\frac{\partial z}{\partial x} \doteq \frac{z_1 - z_4}{2a}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu_1} \doteq \frac{\phi_2 - \phi_5}{2a}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu_2} \doteq \frac{\phi_3 - \phi_6}{2a}$$

とおき, かつ $y = \sqrt{3}ay'$ (y' : 無次元) とおくと

$$z_1 - z_4 \doteq \left\{ \frac{100}{3\sqrt{3}} \times 2y' + \frac{1}{\sqrt{3}} \right. \\ \left. \times (\chi_2 - \chi_5 + \chi_3 - \chi_6) \right\} \frac{R^2 \theta}{2700} \quad \dots\dots\dots(17)$$

を得る。ここで $\chi = \phi \times \frac{2700}{R^2 G \theta}$, $a = R/9\sqrt{3}$ である。

以上のことから実際の計算に当って次の順序で計算を進める。

(1) $y = \sqrt{3}x$ 上の各結節点において (8) 式より得られる傾き $\partial z / \partial s$ を計算する。 $\partial \phi / \partial \nu$ の計算は

第 5 図

第 6 図

第 7 図

W. G. Bickley によって作られた表⁽⁵⁾を利用する。

(2) y 軸上の各結節点において (15) 式で与えられる傾き $\partial z/\partial x$ を計算する。式中の $\partial\phi/\partial\nu_1$, $\partial\phi/\partial\nu_2$

第 8 図

の計算は W. G. Bickley の表を利用する。

(3) $y = \sqrt{3}x$ 上および y 軸上の各結節点は $z=0$ であるから (14), (16) 式を利用して第 8 図に示すよう境界より一列内側にある u 直線, v 直線 (点線) 上の結節点のおおよその z の値が定められる。

(4) 上記 u , v 直線上の結節点以外の結節点の z の値は (17) 式よりおおよその値を求め得る。

(5) 以上のようにして弾性域内のすべての結節点のおおよその z の値がわかればこれを出発値としてし緩法を用いる。すなわち (13) 式の左辺を F とおく

第 1 表

		基礎にした λ の値		z の 値
弾 性 限 度 内		第 1 報における第 8 図		第 9 図
弾性限度をこえて	$\lambda = 0.75 \times \sqrt{3}$	"	第 11 図	第 10 図
	$\lambda = 0.5 \times \sqrt{3}$	"	第 12 図	第 11 図
	$\lambda = 0.25 \times \sqrt{3}$	"	第 13 図	第 12 図

第 9 図

第 10 図

$$F = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 - 6z_0 \dots\dots\dots (18)$$

この残留値 F をすべての結節点で計算し、点し緩 (point relaxation) あるいは領域し緩 (block relaxation) を用いて清算する。この場合得られた z の値から $y = \sqrt{3}x$ 上の結節点における傾き $\partial z / \partial s = (1/\sqrt{3})(\partial z / \partial x + \partial z / \partial s_1)$ (第5図参照), および y 軸上の結節点の傾き $\partial z / \partial x$ は W. G. Bickley の表から計算できるから、この値が上記 (1), (2) で得られた値とできる限り一致するようにくふうする。

以上の順序に従い第1表に示すごとく、第1報でたいろいろの場合の ϕ の値 (それに相応した χ の値) をもとにして z の値を求めその等高線を描いた。いずれの場合も θ を正と考えれば z の値は負の符号をもつから得られた図中の各結節点に付した数は $(-z) \times \frac{2700}{R^2\theta}$ を表す。

3.2 塑性域内の z の値 第13図に示すごとく弾性域内のある z の値の等高線を RS とし、これが弾塑

性境界 I' と交わる点を R とする。R と切欠き円の中心 O_1 と結べば RO_1 は切欠き円外形の法線となる。よって (12) 式より塑性域内の任意点の z の値は求められる。この場合 d は負の符号をもつ。かくして得られた値より等高線を描けば第10~12図の塑性域内の等高線を得る。これによれば塑性域が広がるにつれて、 $(-z)$ の値は増加し等高線は y 軸のほうに接近することがわかる。

3.3 変位 z とねじりモーメント T との関係

切欠き円外形上のある特定点の z とねじりモーメント T との関係を求めるために第9~12図に示すごとく $\beta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ になるような K, L, M, N 点および切欠き円外形の先端の点 W のそれぞれの $(-z)$ の値を表にすると第2表のようになる。ここで W 点の z の値は推定値である。表中 θ_0, T_0 はそれぞれ切欠き底 K 点が弾性限度に達したときの θ および T の値である。また各場合の $\theta/\theta_0, T/T_0$ の値は第1報で得

第11図

第12図

第 2 表

	切欠き底が 弾性限度に 達したとき	弾性限度をこえて		
		(a)	(b)	(c)
	$\lambda=1.881$	$\lambda=0.75 \times \sqrt{3}$	$\lambda=0.5 \times \sqrt{3}$	$\lambda=0.25 \times \sqrt{3}$
θ/θ_0	1	1.448	2.173	4.345
T/T_0	1	1.395	1.744	2.023
$-z$	K 点 $0 \times \frac{R^2 \theta_0}{2700}$	$0 \times \frac{R^2 \theta}{2700}$	$0 \times \frac{R^2 \theta}{2700}$	$0 \times \frac{R^2 \theta}{2700}$
	L 点 $190 \times "$	$262 \times "$	$357 \times "$	$500 \times "$
	M 点 $377 \times "$	$446 \times "$	$562 \times "$	$714 \times "$
	N 点 $546 \times "$	$577 \times "$	$678 \times "$	$819 \times "$
	W 点 $840 \times "$	$840 \times "$	$850 \times "$	$940 \times "$

第 13 図

られた値である。次に第 1 報より

$$\tau_Y = 1.881 G \theta_0 R,$$

$$T_0 = \frac{\sqrt{3}}{2700} \frac{R}{1.881} \tau_Y a^2 \sum (\chi)_0 = 1.330 \tau_Y R^3$$

と得られるからこの二つの式を用いて第 2 表の z の値をかき直すと第 3 表を得る。第 3 表より第 14 図が得られる。ここで $T^*/T_0 = 2.173$ は第 1 報より得たもので、 T^* は断面が純塑性状態になったときの限界ねじりモーメントを表わす。第 14 図からわかるように K 点の z の値は常に 0 であって、L, M, N, W 点のいずれの曲線も T が増すとともに急激に増加し、直線 $T^*/T_0 = 2.173$ に漸近することがわかる。また T が増すとともに $(-z)$ の値は K 点を除いたいずれの点でも増加するが、その増加の割合は y 軸に近い L 点が一番大きいことがわかった。

第 3 表

	切欠き底が 弾性限度に 達したとき	弾性限度をこえて		
		(a)	(b)	(c)
T/T_0	1	1.395	1.744	2.023
$-z$	K 点 $0 \times \frac{R \tau_Y}{2700 G}$	$0 \times \frac{R \tau_Y}{2700 G}$	$0 \times \frac{R \tau_Y}{2700 G}$	$0 \times \frac{R \tau_Y}{2700 G}$
	L 点 $101 \times "$	$202 \times "$	$412 \times "$	$1155 \times "$
	M 点 $200 \times "$	$343 \times "$	$649 \times "$	$1649 \times "$
	N 点 $290 \times "$	$444 \times "$	$783 \times "$	$1892 \times "$
	W 点 $446 \times "$	$646 \times "$	$982 \times "$	$2170 \times "$

第 14 図

4. 結 言

本報告のように、複雑な形をした断面をもつ棒の弾塑性ねじりの場合の断面のゆがみ z は断面上の各点の ϕ の値がわかっておれば、まず弾性領域内の z の値が求められ、次いで塑性領域内の z の値が求められる。

著者の方法と別に、弾性領域内の断面のゆがみ z はせん断応力線が既知であればこれに直交する曲線 C にそって次式を積分すれば z が計算できる⁽⁶⁾。

$$\frac{dz}{dc} + \theta p_c = 0$$

ここで dc はせん断応力線に直交する曲線 C にそう微小長さを表わし、 p_c は原点 O から dc に下した垂線の長さであって、 dc が原点に関して反時計まわりのモーメントをもつとき正と約束する。

この方法は実際にせん断応力線図およびこれに直交する曲線 C の作図の誤差、 p_c の長さの測定の誤差、近

似積分の誤差等を考慮すると、とくに計算の精度をあげる方法を考えない限り著者の方法に比べて解の精度が劣ると思われる。

最後に種々御指導をいただいた九州大学工学部 石橋 正教授に深く感謝いたします。

文 献

- (1) 中山, 機械学会論文集, 29-197 (昭 38-1), 125.
- (2) W. Prager & P.G. Hodge, 安部・宮本共訳 塑性学 (昭 29), 70, 丸善.
- (3) 同上 67 ページ
- (4) 同上 69 ページ
- (5) R.V. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, (1946), 229, Oxford University.
- (6) 山田・中原, 塑性学, (昭 35), 126, 日本機械学会.

621.9.015:539.431.3.016.2

機械仕上された鋼材の加工変質層の研究*

(第3報, 回転曲げ疲れ強さに及ぼす加工変質層の影響)

渡 辺 十 郎**, 荒 木 田 豊**

Studies on the Surface Layer of Machined Steel

(3rd Report, The Influence of the Machined Surface Layer on the Rotary Bending Fatigue Strength)

by Jūro WATANABE and Yutaka ARAKIDA

When a steel specimen is finished by some mechanical procedures viz. turning, grinding, mechanical polishing etc., the surface of the specimen is coated by an affected layer due to local strain hardening action in these finishing procedures. It is said that the influence of this layer on mechanical strength of a steel specimen is, in often case, not quite negligible. But many questions are still left open yet to be solved with respect to its quantitative consequence.

In this study, thickness of this layer and degree of strain hardening in this layer of rotary bending fatigue specimens are decided from distribution of hardness value and X-ray diffraction line width within the surface layer. Local strain hardening in such layer is mitigated by a vacuum low temperature annealing of specimen. By comparison of two kind of endurance limit values obtained before and after vacuum annealing, it has been shown that the rotary bending fatigue strength depends on a hardness of the zone which is extremely near the specimen surface.

For some experimental purpose, these results will arouse our caution due to the existence of the "machined surface layer"

1. 緒 言

鋼材を、たとえば切削、研削、たく摩など、機械的な方法で仕上げるかぎり、その鋼材の仕上表面の近くに加工変質層が残留するものであることについてはすでに前報⁽¹⁾⁽²⁾において述べた。この層には、塑性変形と弾性変形とが混在しているために、当然、母材とその機械的性質を異にするものと考えられ、実際、一般に材料の表面層が局部的にかたくなること、あるいはオーステナイト材については、引張性質に対して無視しがたい影響をこの層がおよぼすことなどが、実験的にたしかめられることについても、すでに報告し

た⁽¹⁾⁽²⁾。

材料の疲れ強さは、主としてその表面の性質に支配されると考えられている。したがって、加工変質層の性状が材料の疲れ強さに大きな影響をもつことは十分予想されることであり、この点に関してはこれまでもいくつかの実験結果が報告されている⁽³⁾。しかし、実験結果の統一的解釈の問題におよぶと、まだ不明の点が多く残されているといわなければならない。

この報告においては、まず小野式回転曲げ疲れ試験片に残留する加工変質層の性状をしらべ、さらにその結果に基づいて、回転曲げ疲れ強さが試験片の表面層におけるある深さのかたさの値によっていちおう整理されることを考察する。

* 昭和 36 年 4 月 4 日 第 38 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 37 年 11 月 20 日。

** 正員、日本製鋼所室蘭製作所研究所(室蘭市茶津町 4)。