最後に多大の御指導をいただいた東京工業大学 中原一郎先生、東京大学 川股重也先生に深く感謝いたします。

文 献

(1) 坪井・角野, 第9回応用力学連合講演会前刷, 第1部, (昭

34), 47.

(2) A. Haver, *Ing.-Arch.*, 5 (1935).

(3) W. Flügge, *Stresses in Shells*, (1960), 380 Springer-Verlag O.H.G.

(4) P.P. Bijaaor, *Welding Research Council Bulletin*, No.34 (1957).

(5) E. Reissner, *J. Math. Phys.*, 25-80, 85 (1946).

(6) E. Reissner, *J.Math. Phys.*, 38-1 (1959).

539.382:624.043.7

回転だ円体空か列を有する弾性体の引張り*

西 谷 弘 信**

On the Tension of an Elastic Body Having an Infinite Row of Spheroidal Cavities

by Hironobu NISITANI

Utilizing the physical meaning of interference of notch effects in three dimensional elasticity, the author caluculated the stress concentration factors (s.c.f.) of an infinite body having an infinite row of spheroidal cavities subjected to tensile load. If the ratio p/t (p : pitch of spheroids, t : major-semiaxis of spheroid) is constant, the interference of notch effects decreases with the sharpness of notch ρ/t (ρ : notch radius at the end of major-axis).

He also caluculated the s.c.f. of an infinite body having two spherical cavities under tension by the same method. The results are in close agreement with the exact values obtained by Miyamoto.

1. 緒 言

球か の干渉については, E. Sternberg⁽¹⁾ らの2球か を有する無限体の引張り, 宮本⁽²⁾ の2個以上の空か を有する無限体の引張り, 渥美⁽³⁾ の球か列を有する円柱の引張り, などの研究がある。

この論文では, さきに⁽⁴⁾二次元問題で用いたのと同様な方法で, 干渉効果の物理的意味をもとにして, 回転だ円体空か列を有する無限弾性体を, 列の方向に引張る場合の干渉効果を計算する。

2球かの干渉についても計算し, 宮本の厳密解と比較した。結果は第3表に示すとおりきわめて良く一致している。以下に述べる方法は, 計算方法の原理からわかるとおり, 各空か に対し対称性を有する, たとえば本問題のように等間隔にならんだ等大の空か列に対しては, さらに精度がよいはずである。

2. 1 個の回転だ円体空か による応力場の変化

2 個以上の空か が存在するとき, 単独にある場合と

応力集中係数が異なるのは, お互が他の空か によって, 応力場の変化を受ける範囲に存在しているからである。したがって, まず1空か を有する弾性体が

- 1 軸引張りをうける場合, および
- 3 軸引張りをうける場合

について, その空か の存在によって付加される応力場, σ_r^* , σ_z^* (座標軸については第1図参照) をそれぞれ計算する(3 軸引張りの場合が必要なことは, 計

第 1 図

* 昭和 35 年 9 月 1 日 第 10 回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 37 年 10 月 8 日。

** 正員, 九州大学工学部 (福岡市箱崎町)。

算方法の項で明らかとなる). a) の場合については Neuber⁽⁵⁾ の計算結果がある. b) の場合については計算された例はないようであるが, Neuber が用いた応力関数において, 係数を適当にとれば求めることができる.

問題は軸対称であるから 2 変数で取扱うことができる.

$$\left. \begin{aligned} z &= \sinh u \cos v \\ r &= \cosh u \sin v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

とおいて変数を z, r から u, v に変換すれば, 回転した円体を表わす曲面の式は $u = u_0$ (一定) となる. そのとき付加応力 $\sigma_u^*, \sigma_v^*, \tau_{uv}^*$ は a), b) いずれの場合も次の形に表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u^* &= A \left[-\frac{s}{h^2 c^2} - \frac{s}{h^4} \right] + B \left[12 \frac{c^2 T - s}{h^2} - 4 \frac{s}{h^2 c^2} - 18 \frac{(c^2 T - s) \sin^2 v}{h^2} + 6 \frac{T \sin^2 v}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + 6 \frac{s \sin^2 v}{h^2 c^2} - 4 \frac{s}{h^4} \right] + C \left[\alpha \frac{c^2 T - s}{h^2} + \left(\frac{s \cos^2 v}{h^4} \right) + \frac{s}{h^2 c^2} + (2 - 2\alpha) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(c^2 T - s) \sin^2 v}{h^2} + (-2 + \alpha) \frac{T \sin^2 v}{h^2} - \frac{s \sin^2 v}{h^2 c^2} \right] \\ \sigma_v^* &= A \left[\frac{s}{h^4} \right] + B \left[-6 \frac{c^2 T - s}{h^2} + 18 \frac{(c^2 T - s) \sin^2 v}{h^2} - 12 \frac{T \sin^2 v}{h^2} + 4 \frac{s}{h^4} \right] \\ &\quad + C \left[(2 - \alpha) \frac{c^2 T - s}{h^2} - \frac{s \cos^2 v}{h^4} + (-2 + 2\alpha) \frac{(c^2 T - s) \sin^2 v}{h^2} - \alpha \frac{T \sin^2 v}{h^2} \right] \\ \tau_{uv}^* &= A \left[\frac{\sin v \cos v}{h^4 c} \right] + B \left[-18 \frac{c(sT - 1) \sin v \cos v}{h^2} - 6 \frac{\sin v \cos v}{h^2 c} + 4 \frac{\sin v \cos v}{h^4 c} \right] \\ &\quad + C \left[(2 - 2\alpha) \frac{c(sT - 1) \sin v \cos v}{h^2} + (1 - \alpha) \frac{\sin v \cos v}{h^2 c} + \frac{s^2 \sin v \cos v}{h^4 c} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし $s = \sinh u, \quad c = \cosh u, \quad T = \cot^{-1}(\sinh u),$
 $h^2 = \sinh^2 u + \cos^2 v, \quad \alpha = 2(1 - \nu) \quad (\nu: \text{ポアソン比})$

A, B, C は無限遠の条件により決まる定数で,

a) の場合 ($\sigma_{z\infty} = 1, \sigma_{x\infty} = \sigma_{y\infty} = \tau_{xy\infty} = \tau_{yz\infty} = \tau_{zx\infty} = 0$)

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{t^4 \sinh v_0}{N} [-6gt^2 + (4\alpha - 2)g + 4t^4 - 4\alpha t] \\ B &= \frac{t^4 \sinh u_0}{N} [(2 - \alpha)g + 2t^4 + (\alpha - 3)t^2] \\ C &= \frac{t^4 \sinh u_0}{N} [6g - 12t^2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

b) の場合 ($\sigma_{x\infty} = \sigma_{y\infty} = \sigma_{z\infty} = 1, \tau_{xy\infty} = \tau_{yz\infty} = \tau_{zx\infty} = 0$)

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{t^4 \sinh u_0}{N} [-18gt^2 + (10 + 8\alpha)g + 12t^4 - (8 + 4\alpha)t^2] \\ B &= \frac{t^4 \sinh u_0}{N} [2(1 - \alpha)g - (1 - \alpha)t^2] \\ C &= \frac{t^4 \sinh u_0}{N} [18g - 12t^2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} N &= 6 [(-4 + \alpha)g^2 - 6gt^4 + 8gt^2 + 4t^6 - 4t^4] \\ t &= \cosh u_0 \\ g &= \cosh^4 u_0 \sinh u_0 \cot^{-1}(\sinh u_0) - \cosh^2 u_0 \sinh^2 u_0 \\ \alpha &= 2(1 - \nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

u_0 は空かの形をきめるパラメータである. σ_r^*, σ_z^* は u の正方向と z の正方向とのなす角を θ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \sigma_u^* \sin^2 \theta + \sigma_v^* \cos^2 \theta + \tau_{uv}^* \sin 2\theta \\ \sigma_z^* &= \sigma_u^* \cos^2 \theta + \sigma_v^* \sin^2 \theta - \tau_{uv}^* \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで $\tan \theta = \coth u \tan v$

となる.

以下の計算では、第 1 図の Γ における付加応力 σ_r^* , σ_z^* が必要となる (その理由は計算方法の項で述べる)。すなわち、 $z = t/\lambda$, $r = t$ なる点の付加応力が必要となる。

λ^7 以上の項を省略して、 Γ における付加応力 σ_r^* , σ_z^* を求めれば (λ^7 以上の項も容易に求めることはできるが、 $\lambda \leq 0.25$ の範囲ではその必要はない)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \left[\frac{1}{t^3} A + \frac{1}{t^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \alpha \right) C \right] \lambda^3 + \left[-\frac{1}{t^3} \left(\frac{9}{2} + \frac{2}{t^2} \right) A - \frac{16}{5t^5} B + \frac{1}{t^3} \left\{ \frac{7}{2} + \frac{2}{5t^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(2 + \frac{4}{5t^2} \right) \alpha \right\} C \right] \lambda^5 \\ \sigma_z^* &= \left[-\frac{2}{t^3} A + \frac{1}{t^3} \left(2 + \frac{2}{3} \alpha \right) C \right] \lambda^3 + \left[\frac{1}{t^3} \left(6 + \frac{4}{t^2} \right) A + \frac{32}{5t^5} B \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{t^3} \left\{ 10 + \frac{4}{t^2} + \left(2 + \frac{4}{5t^2} \right) \alpha \right\} C \right] \lambda^5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。この関係は(2)式を(6)式に代入し、さらに次の諸関係をその式に代入して、 λ^7 以上の項を省略すれば得られる。

$$\begin{aligned} \frac{s}{h^2 c^2} &= \frac{\lambda^3}{t^3} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{t^2} \right) \lambda^2 + \dots\dots \right\} \\ \frac{c^2 T - s}{h^2} &= \frac{2\lambda^3}{3t^3} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{5t^2} \right) \lambda^2 + \dots\dots \right\} \\ \frac{(c^2 T - s) \sin^2 v}{h^2} &= \frac{2\lambda^3}{3t^3} \left\{ \lambda^2 + \dots\dots \right\} \\ \frac{s \sin^2 v}{h^2 c^2} &= \frac{\lambda^3}{t^3} \left\{ \lambda^2 + \dots\dots \right\} \\ \frac{T \sin^2 v}{h^2} &= \frac{\lambda^3}{t^3} \left\{ \lambda^2 + \dots\dots \right\} \\ \frac{s}{h^4} &= \frac{\lambda^3}{t^3} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{t^2} \right) \lambda^2 + \dots\dots \right\} \\ \frac{c(sT - 1) \sin v \cos v}{h^2} &= -\frac{\lambda^3}{3t^3} \left\{ \lambda + \dots\dots \right\} \\ \frac{\sin v \cos v}{h^2 c} &= \frac{\lambda^3}{t^3} \left\{ \lambda + \dots\dots \right\} \\ \frac{\sin v \cos v}{h^4 c} &= 0 + \dots\dots \\ \frac{s^2 \sin v \cos v}{h^4 c} &= \frac{\lambda^3}{t^3} \left\{ \lambda + \dots\dots \right\} \\ \frac{s \cos^2 v}{h^4} &= \frac{\lambda^3}{t^3} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{t^2} \right) \lambda^2 + \dots\dots \right\} \\ \sin^2 \theta &= \lambda^2 + \dots\dots \\ \cos^2 \theta &= 1 - \lambda^2 + \dots\dots \\ \sin 2\theta &= 2\lambda + \dots\dots \end{aligned}$$

またこれらの諸関係は(1)式において $z = t/\lambda$, $r = t$ とおき、 $\sinh u$, $\cosh u$, $\sin v$, $\cos v$ を t と λ で表わせれば容易に求めることができる。

A , B , C は(3)式および(4)式によって計算する。

3. 干渉効果の計算方法

引張方向に等間隔に等大の回転た円体空か が、無限にならんでいる場合 (第 1 図) について計算方法を説

明する。無限遠での引張応力を $\sigma_{z\infty} = 1$ とし、最大応力の生ずる円周を Γ とする。任意の空かの Γ 付近の応力状態は、他の空かのために、あたかも $\sigma_r = T$, $\sigma_z = T + Z$ なる一様な応力場に、その空か が単独に存在している場合とほぼ等しくなる。この考えのもとに干渉効果を計算する。実際は他の空か による影響は、空か縁にそって一様ではないので、以下の操作では、 Γ 付近は完全に自由縁にしうが、 Γ から離れた点ではわずかながら空か縁に応力が残ることになる (Γ に最大応力が生ずるので、 Γ 付近で自由表面の条件が完全にみたされるようにするわけである)。しかし、その量を、 $\lambda = 0.1$ なる場合について求めれば、 Γ から最も離れた z 軸上の点でさえ、第 1 表に示すとおりきわめてわずかである。

またその影響の少ないことは、2 球か に対する解を、宮本の厳密解と比較すれば明らかであろう (第 3 表参照)。

今 0 の空か (第 1 図) について考えるとき、他の空か による影響は、3 軸引張り ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = T$) および 1 軸引張り ($\sigma_z = Z$) を各空か縁で打消すための応力場によるものである (等間隔等大の無限空か列に対しては、各空かとも条件は全く等しくなる。有限個であれば、 T および Z は一般に各空か ごとに異なる)。 i 番めの孔縁で T, Z を打消したために、0 の空か の Γ に付加される応力をそれぞれ $\sigma_{ri}^*(T)$, $\sigma_{zi}^*(T)$ および $\sigma_{ri}^*(Z)$, $\sigma_{zi}^*(Z)$ とすれば、 Z および T は次の関係をみたさなければならない。

第 1 表 z 軸上の空か縁に残る応力 ($\lambda = 0.1$ の場合)

t/P	$\sigma_{\text{residual}}/\sigma_{z\infty}$
1	-0.000 70
2	-0.000 44
8	-0.000 25
∞	-0.000 16

$$\left. \begin{aligned} 1 + \sum_{i \neq 0}^{\infty} \sigma_{zi}^*(Z) + \sum_{i \neq 0}^{\infty} \sigma_{zi}^*(T) &= Z + T \\ \sum_{i \neq 0}^{\infty} \sigma_{ri}^*(Z) + \sum_{i \neq 0}^{\infty} \sigma_{ri}^*(T) &= T \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

$\sigma_{ri}^*(T)$, $\sigma_{zi}^*(T)$, $\sigma_{ri}^*(Z)$, $\sigma_{zi}^*(Z)$ は(7)式より求めることができる。それらは、ともに λ の関数で、 $\sigma_{ri}^*(Z)$, $\sigma_{zi}^*(Z)$ は Z に $\sigma_{ri}^*(T)$, $\sigma_{zi}^*(T)$ は T に比例する式である。(8)式をとりて Z , T を求めれば最大応力 $\sigma_{\max}$ は

$$\sigma_{\max} = \alpha_0 Z + \alpha_1 T \dots (9)$$

となる。今の場合 $\sigma_{\infty} = 1$ であるから $\sigma_{\max}$ がそのまま空か列の応力集中係数 α となり、したがって応力集中係数の減少率を表わす比 α/α_0 は

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = Z + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} T \dots (10)$$

ここで

α : 空か列1軸引張りの応力集中係数

α_0 : 1空か1軸引張りの応力集中係数

α_1 : 1空か3軸引張りの応力集中係数

となる。

α_0 はNeuberの結果からまた α_1 は(2)式と(4)式からそれぞれ計算することができる。

α の絶対値が必要な場合は、(10)式と α_0 の式

$$\alpha_0 = \frac{1}{N} \left\{ 2 \left(\frac{t}{\rho} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} - \nu \right) \frac{t}{\rho} + (1 - \nu) + \left[- \left(\frac{3}{2} + \nu \right) \frac{t}{\rho} + \nu \right] \frac{t}{\rho} c \right\}$$

ここで

$$c = \frac{\tan^{-1} \sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}}{\sqrt{\frac{t}{\rho} - 1}} \quad \left(\frac{t}{\rho} > 1 \right)$$

$$N = \frac{t}{\rho} + (1 - \nu) + \left(\frac{t}{\rho} - 2 + \nu \right) \frac{t}{\rho} c$$

$$- (1 + \nu) \left(\frac{t}{\rho} \right)^2 c^2$$

ρ : 切欠き底の曲率半径

t : 回転だ円体の長半径

とから容易に求めることができる。

4. 計算結果および考察

応力集中係数の軽減効果を表わす比 α/α_0 の値を第2表および第2図に示す。回転だ円体の偏平度 t/ρ は(t :長半径, ρ :切欠き底の曲率半径)1, 2, 8, ∞ の4とおりにかえて計算した。

ポアソン比 ν は0.3とした。ただし宮本の厳密解は $\nu=0.25$ なので2球かについては、 $\nu=0.25$ として

第2表 応力集中係数の軽減効果を表わす比 α/α_0 の値

λ	1	2	8	∞
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.05	0.9990	0.9992	0.9993	0.9995
0.10	0.9925	0.9936	0.9948	0.9962
0.15	0.9769	0.9801	0.9840	0.9881
0.20	0.9520	0.9590	0.9670	0.9751
0.25	0.9220	0.9343	0.9473	0.9596

第3表 引張方向に並んだ2球かの応力集中係数($\nu=0.25$)

λ	宮本(厳密解)	著 者
0	2.022	2.022
0.05	2.021	2.021
0.10	2.016	2.016
0.15	2.002	2.003
0.20	1.986	1.983
0.25	1.969	1.959

第2図

計算した。2球かの結果を第3表に示す。

回転だ円体の長半径 t と切欠きのピッチ p との比 $\lambda = t/p$ が一定ならば、切欠きが鋭いほど干渉効果は小さくなっている。この傾向は二次元問題⁽⁴⁾(引張方向に並んだ円孔列を有する無限板の引張り)でも認められた。

二次元問題では付加応力の式が λ^2 に比例する項で始まるが、三次元問題では(7)式から明らかなように、それが λ^3 に比例する項で始まる。したがって λ の小さいところでは、干渉効果は、二次元問題では λ^2 にまた三次元問題では λ^3 にそれぞれ比例することになる。

最後に絶えず御激励いただいた石橋 正先生に厚く謝意を表します。

文 献

- (1) E. Sternberg & M. A. Sadowsky, *J. Appl. Mech.*, **19**, (1953), 19.
- (2) 宮本, 機械学会論文集, **23**-131 (昭32-7), 437
- (3) A. Atumi, *Trans. ASME, Ser. E*, **27** (1960), 87.
- (4) 西谷, 第37期通常総会講演会前刷集, No.18 (昭35-4), 61.
- (5) H. Neuber, *Kerbspannungslehre*, (1937), 94, Julius Springer.