533.691.011.5

曲面入口部をもった二次元超音速翼列の流入場について*

山口 誉 起**

On the Inlet-Flow Field for a Two-Dimensional Supersonic Cascade with Curved Entrance Regions

by Shigeki YAMAGUCHI

This paper deals with an analytical study of the inlet-flow field for a two-dimensional cascade, where the axial flow is subsonic and the relative flow is supersonic. The flow model accounts for the case where the suction surface of a blade is a convexed line in the entrance region. Using the analysis, the complete inlet-flow field can be constructed, the losses due to shock waves being estimated.

Two numerical examples for the different circular entrance regions are given in the case where either Mach number is 1.6 at the end in the entrance region. The results in either case indicate that the pressure amplitude decreases below about 4 % of the dynamic pressure at infinite distance upstream and the losses due to shock waves are negligibly small.

1. 緒 言

入口の軸流速度が亜音速で相対速度が超音速である二次元翼列の定常流を考えると、第1図(a)に示すように各翼形の入口部 $\widehat{Le}$ が直線であれば、この部分からじょう乱が発生しないので、翼列の上流の流れの方向は入口部の面と一致する。しかし、入口部が曲面をなしている場合には、その部分から発生するじょう乱は上流へ伝ばし、上流の流れの場は乱される。たとえば、第1図(b)に示すように、翼形の入口部 $\widehat{Le}$ がとつ曲面をしているときは、前縁Lから斜め衝撃波が、また入口部の各部からは膨張波が発生する。この場合、前縁Lからの斜め衝撃波は図のように膨張波と交わり、上流へ行くにしたがってしだいにその強さが弱

まり、理論上は無限上流においてマッハ波になってしまふものと考えられる。このようにして無限上流では一様な流れの場が得られる。

超音速軸流圧縮機の翼形では、強度上の理由から翼を厚くしたり、また流れの転向角を増したりするための一手段として、入口部をとつ曲面にする方法が考えられる。この場合、入口部より発生するじょう乱が上流へ進むにつれてどんな割合で減衰していくかを知ることが、上流に置かれた翼列との干渉の程度を推定する上に重要であるばかりでなく、無限上流の流れの速度ならびに方向を決定したり、流入場における全圧損失を求める上にも重要な問題である。ここでは、このような流入場を解析的に取扱ってみる。

(a) 直線入口部の場合

(b) 曲面入口部の場合

第1図 二次元超音速翼列の流入場

* 昭和35年4月1日 第37期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和38年1月21日。

** 正員、名古屋大学工学部(名古屋市中種区不老町)。

2. 流入場を求める解析的方法

第 2 図に示すように、翼形の入口部 $\widehat{Le}$ が任意の形をしたなめらかなつ曲面からなっている翼間隔 s の翼列を考え、一つの翼形の前縁 L が原点翼列面が x 軸と一致するように、座標 x, y をえらぶ。

前縁 L から出る斜め衝撃波の強さがあまり強くないとし、流入場における流れの変化は等エントロピであると仮定する。したがって、いま入口部の後端 e におけるマッハ数が与えられると、入口部 $\widehat{Le}$ 上の任意の位置におけるマッハ数を知ることができる。

原点を通る入口部の幾何学的形状を座標 $Q(X, Y)$ によって表わす。原点より出る斜め衝撃波上の点 $P(x, y)$ にちょうど交わるマッハ波が、相隣る翼形の入口部上の点 $Q_1(X_1, Y_1)$, $Q_2(X_2, Y_2)$ から出ているものとすれば、翼間隔 $s=1$ とえらぶとき各点の座標は

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = X - 1, \quad Y_1 = Y \\ X_2 = X, \quad Y_2 = Y \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

と表わされる。

第 3 図に示すように、マッハ線上の AB 間を通るマッハ数 M の超音速一様流の流量 W は、紙面に垂直に単位幅を考えれば、マッハ角 μ は

$$\mu = \sin^{-1}(1/M) \dots\dots\dots (2)$$

と表わされるから

$$W = \rho U D \sin \mu = \rho U D / M \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 ρ : 密度, U : 速度, D : 距離 AB を表わす。

ρ, U をそれぞれよどみ点密度 ρ_0 , 臨界音速 a^* によって無次元化すれば、比熱比を κ として

$$\rho / \rho_0 = \{1 + (\kappa - 1) M^2 / 2\}^{-1/(\kappa - 1)}$$

$$U / a^* = \sqrt{\{(\kappa + 1) M^2 / 2\} / \{1 + (\kappa - 1) M^2 / 2\}}$$

となるから、(3)式は

$$\begin{aligned} & \sqrt{2/(\kappa + 1)} W / (\rho_0 a^*) \\ &= \{1 + (\kappa - 1) M^2 / 2\}^{-(1/2)(\kappa + 1)/(\kappa - 1)} D \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

第 2 図 流入場と座標の関係

となる。(4)式の左辺を無次元化された流量として W^* と書けば

$$W^* = E(M) D \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$E(M) = \{1 + (\kappa - 1) M^2 / 2\}^{-(1/2)(\kappa + 1)/(\kappa - 1)} \dots\dots\dots (6)$$

を得る。すなわち、マッハ数 M のマッハ線上の距離 D を通過する流量は(5)式によって簡単に表わされる。

いま、翼形の前縁 L から衝撃波上の一点 P まで衝撃波に沿って測られた距離を r , 点 P を通り衝撃波前後のマッハ線に沿って翼面まで測られた距離をそれぞれ D_1, D_2 とする(第 2 図)。衝撃波を通る流れの変化は等エントロピと仮定し、点 P 近傍の衝撃波の微小部分について連続の式をたてると、(5)式より

$$d(E_1 D_1) / dr - d(E_2 D_2) / dr = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 E_1, E_2 は(6)式において M に M_1, M_2 を代入した値を示す。入口部の後端 e から相隣る翼形の前縁 L までの距離を D_e , この線上のマッハ数を M_e , 関数 E の値を E_e とすれば、 $r=0$ になるとき $E_1 D_1 = E_e D_e$, $D_2 = 0$ となるから、(7)式を積分して

$$E_1 D_1 - E_2 D_2 = E_e D_e \dots\dots\dots (8)$$

を得る。

ここでは、衝撃波を通る流れの変化は等エントロピであると考えているので、衝撃波を通る流れの偏角 δ および衝撃波角 ζ (第 4 図) は次の関係を満足する。

$$M_1 \sin \zeta / M_2 \sin (\zeta - \delta) = E_2 / E_1 \dots\dots\dots (9)$$

$$\delta = \nu_1 - \nu_2 \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 ν は膨張角でマッハ数の関数として

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{(\kappa + 1) / (\kappa - 1)} \\ &\times \tan^{-1} \sqrt{\{(\kappa - 1) / (\kappa + 1)\} (M^2 - 1)} \\ &- \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

第 3 図 マッハ線を通る流れ

第 4 図 衝撃波を通る流れ

で表わされ、添字 1, 2 はそれぞれ衝撃波前後を示す。衝撃波の強さが十分弱ければ、これらの関係式はよい近似を与えるであろう。

第 2 図におけるマッハ線 PQ_1 , PQ_2 のこう配をそれぞれ m_1 , m_2 とすれば、点 P の座標は

$$x = \{(Y_1 - m_1 X_1) - (Y_2 - m_2 X_2)\} / (m_2 - m_1), \quad y = \{m_2(Y_1 - m_1 X_1) - m_1(Y_2 - m_2 X_2)\} / (m_2 - m_1) \quad (12)$$

距離 D_1 , D_2 は

$$D_1 = \sqrt{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2}, \quad D_2 = \sqrt{(x - X_2)^2 + (y - Y_2)^2} \quad (13)$$

(13) 式に (12) 式を代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \{\sqrt{1+m_1^2}/(m_2-m_1)\} |\vartheta(M_1, M_2) - m_2\tau(M_1, M_2)| \\ D_2 &= \{\sqrt{1+m_2^2}/(m_2-m_1)\} |\vartheta(M_1, M_2) - m_1\tau(M_1, M_2)| \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ただし、

$$\vartheta(M_1, M_2) = Y_1 - Y_2, \quad \tau(M_1, M_2) = X_1 - X_2 \quad (15)$$

前縁 L および入口部の後端 e におけるマッハ数をそれぞれ M_L , M_e とすると、入口部の形 X , Y およびマッハ線のこう配 m はマッハ数 M ($M_L \leq M \leq M_e$) の関数として与えられるので、(14) 式により D_1 , D_2 はともに M_1 と M_2 の関数として表わされる。したがって、(8) 式は M_1 , M_2 について陰関数の式となり、この式を満足するような M_1 と M_2 の値を得ることができる。斜め衝撃波の形は (12) 式より求められる。

無限上流のマッハ数 M_∞ は、 $M_1 = M_2 = M_\infty$ として求められるべきであるが、この場合、 $m_1 = m_2$ となり (14) 式より D_1 , D_2 の値が無限大となるので、計算上不都合が生ずる。しかし、いまは等エントロピー変化を考えているので、無限上流と入口部の後端 e を通るマッハ線上の位置との間の連続の関係から、次式により M_∞ の値を求めることができる。

$$A_\infty/A_e = (M_e E_e) / (M_\infty E_\infty) \quad (16)$$

ただし、 A : 流れに直角な流路面積、添字 ∞ , e はそれぞれ無限上流および入口部の後端 e を通るマッハ線を表わす。

マッハ数 M に対する圧力を p とすれば、等エントロピーの関係から、圧力係数は次式によって表わされるので、流入場における圧力分布を知ることができる。

$$(p - p_\infty) / \{(1/2)\rho_\infty U_\infty^2\} = \{2/(\kappa M_\infty^2)\} \left[\{2 + (\kappa - 1)M_\infty^2\} / \{2 + (\kappa - 1)M^2\} \right]^{\kappa/(\kappa-1)} - 1 \quad (17)$$

3. 衝撃波による損失

前項において流入場の解が求められ、衝撃波前後のマッハ数 M_1 , M_2 がわかったので、衝撃波による損失(全圧比で表わす)を求める。

衝撃波角 ζ になるとき、衝撃波前後のマッハ数 M_1 と M_2 の間に次の関係が成立する。

$$F = \{2\kappa\varepsilon/(\kappa+1) - (\kappa-1)/(\kappa+1)\} \{(\kappa-1)/(\kappa+1) + (2/\varepsilon)/(\kappa+1)\} \quad (18)$$

ただし、

$$\varepsilon = M_1^2 \sin^2 \zeta, \quad F = \{1 + (\kappa-1)M_1^2/2\} / \{1 + (\kappa-1)M_2^2/2\} \quad (19)$$

(18) 式を ε について解けば、 $\varepsilon > 0$ であるから

$$\varepsilon = G + \sqrt{G^2 + (1/\kappa)} \quad (20)$$

ただし、

$$G = [(\kappa+1)^2 F - \{4\kappa - (\kappa-1)^2\}] / \{4\kappa(\kappa-1)\} \quad (21)$$

したがって、衝撃波前後の全圧をそれぞれ P_1 , P_2 とすれば、全圧比は

$$P_2/P_1 = \{2\kappa\varepsilon/(\kappa+1) - (\kappa-1)/(\kappa+1)\} F^{-\kappa/(\kappa-1)} \quad (22)$$

(22) 式は一つの衝撃波を通過する際の全圧比を表わしているが、第 1 図(b)からわかるように、無限上流から翼形の入口部に至るまで、各流線は無数の衝撃波を通過することになる。翼列内の一翼間隔を通る各流線に対し、衝撃波を通過するたびごとに起るエントロピー上昇を加算し、その流量平均を求めれば平均損失が得られるが、計算上では、一つの衝撃波に沿って前縁から無限上流までの平均損失を求めればよいことがわかる。すなわち、平均全圧比 $(P_2/P_1)_{av}$ は

$$(P_2/P_1)_{av} = \exp \left[\int_0^\infty \log (P_2/P_1) dW_2^* / (E_e D_e) \right] \quad \dots\dots\dots (23)$$

によって求められる。

4. 数 値 例

翼形の入口部 $\widehat{Le}$ が第 5 図に示すような円弧の場合⁽⁴⁾について計算例を示す。

記 号

R : 入口部の曲率半径

β_L : 翼形背面の前縁における接線と翼列面のなす角

θ : 翼形背面に沿って前縁より測られた角

添字 1, 2 : それぞれ衝撃波の前後, e : 入口部の後端, を表わす。

この場合, 翼形の入口部 X, Y は

$$\left. \begin{aligned} X &= R (\sin \nu - \sin \beta_L) \\ Y &= R (\cos \nu - \cos \beta_L) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

マッハ線のこう配 m は

$$m = \tan u \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \nu - \lambda_e \\ u &= \mu - \nu + \lambda_e \\ \lambda_e &= \nu_e - \theta_e - \beta_L \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

マッハ角 μ および膨張角 ν は (2), (11) 式によりマッハ数 M_1, M_2 の関数として表わされるから, 入口部の形 X, Y および衝撃波前後のマッハ線のこう配 m_1, m_2 はマッハ数 M_1, M_2 のみの関数となり, 第 2 項で述べたように, (8) 式を満足するような M_1 と M_2 の値を決定することができる。

無限上流および入口部の後端 e を通るマッハ線

上における流れに直角な流路面積 A_∞, A_e は, この場合

$$A_\infty = \sin \beta_\infty = \sin (\nu_\infty - \lambda_e) \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$A_e = \{ \cos \beta_L - \cos (\beta_L + \theta_e) \} / \{ \sin \theta_e - (1 - \cos \theta_e) \sqrt{M_e^2 - 1} \} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となり, これらを (16) 式に代入すれば, 入口部の後端 e における量が与えられたとき, M_∞ の値を求めることができる。

数値例として, $M_e = 1.6, \beta_L = 20^\circ, \kappa = 1.40$ とし, 次の二つの場合について計算した。

Case 1 : $\theta_e = 5^\circ, R/s = 4.593, M_\infty = 1.523$

Case 2 : $\theta_e = 10^\circ, R/s = 1.562, M_\infty = 1.468$

第 6 図には, 二つの場合の流入場における衝撃波と膨張波の模様を示す。第 7 図は翼列面に直角に, 翼列面より上流へ測られた距離 y における一翼間隔内の圧力変化を圧力係数で表わしたもので, x は翼列面に平

第 5 図 円弧入口部のパラメータ

第 6 図 流入場の波の関係

(a) Case 1

(b) Case 2

第7図 一翼間隔内の圧力変化

行に衝撃波から測られた距離を示す。また、第8図は、この一翼間隔内における最高、最低両圧力の差 $p_{\max} - p_{\min}$ 、すなわち圧力振幅が翼列面からの距離 y とともに減衰する模様を示したものである。

以上の結果、円弧の入口部をもった翼形を超音速軸流圧縮機の動翼または後置静翼として用いた場合、一翼間隔につき第7図に示されたような圧力変化が生ずるので、翼列ではこの変化が直列に連なって、結局のこ歯状の圧力変動をもたらすことになる。第8図よ

第8図 圧力振幅の減衰模様

り、この圧力変動の振幅は翼列面に近いところでは、 θ_e が大きいほど大きい、 θ_e が大きい場合にはその減衰が急で、翼列面より約1.5倍の翼間隔へだたった上流では、Case 1 も Case 2 もだいたい等しくなり、無限上流の動圧の約4%に減少する。したがって、このような翼列に近接して、相対的に運動する他の翼列が上流に置かれた場合には、単に空気力学的な立場からばかりでなく、翼の強度の上からも十分な考慮が払われなければならない。

衝撃波の損失による全圧比は

$$\text{Case 1 : } (P_2/P_1)_{av} = 0.9976$$

$$\text{Case 2 : } (P_2/P_1)_{av} = 0.9936$$

で、流入場では等エントロピ変化を仮定できる。

5. 結 言

入口の軸流速度が亜音速で相対速度が超音速である二次元翼列において、翼形の入口部がとつ曲面である場合、翼形の前縁より発生する斜め衝撃波と入口部より発生する膨張波によって影響を受ける流入場を求める解析的方法について述べ、入口部が円弧で入口部の後端のマッハ数が1.6の場合について二つの数値計算例を示した。その結果、翼列の上流では翼列面に沿ってのこ歯状の圧力変動が生ずるが、この変動の振幅は翼列面より遠ざかるにしたがい急速に減衰し、その距離が翼間隔の約1.5倍以上では無限上流の動圧の約4%以下になることがわかった。したがって、このような翼列に近接して、相対的に運動する他の翼列が上流に置かれる場合には、単に空気力学的立場からばかりでなく、翼の強度上からも十分な考慮が払われなければならない。また、流入場における衝撃波による損失はきわめて小さく、平均全圧比で約0.995であり、流入場における変化は等エントロピとみなされる。

おわりに、本研究に御指導賜った東京大学 白倉教授、河村教授に衷心より感謝の意を表する。

文 献

- (1) P. Levine, *J. Appl. Mech.*, 24-2 (1957), 165.