サンドイッチ板の縦振動および波動*

斎藤 秀雄**, 永井 常男***

Longitudinal Wave Propagations and Vibrations of Sandwich Plates

by Hideo SAITO and Tsuneo NAGAI

In this paper a solution is given two-dimensionally for the problem of extensional stress wave propagations and vibrations of sandwich plates. Both the sandwich core and the facings are assumed elastic and homogeneous, and the facings are identical with each other. The solution satisfies exactly the elasticity equations and the boundary conditions. Wave velocity-wavelength curves are then obtained from frequency equations for an infinite plate in plane strain. Using these results the vibrations of finite sandwich plates are also discussed. Numerical examples are given for the plates composed of aluminum and plastics.

1. 緒 言

一様材質弾性平板の平面ひずみあるいは平面応力状態の縦振動および波動については、多くの研究があり、その結果縦波の速度は波長の関数であって、板の厚さに比し波長が非常に大の場合は、その速度は初等解によって得られる値と一致し、また厚さに比し波長が非常に小になると、その速度は Rayleigh 波および横波の速度に近づくことは一般によく知られている事実である⁽¹⁾。しかるに、近時盛んに用いられるようになったサンドイッチ板の場合は、これらの関係は内部材と外部材の弾性定数、密度、厚さなどの関数として考えられ、一様材の場合ほど明らかではない。これらの問題に関しては最近 Chu⁽²⁾の近時解法が発表されているが、本論文においてはサンドイッチ棒の横振動について用いた方法⁽³⁾と同じく、二次元弾性運動方程式を用いてサンドイッチ板を伝ばする縦波の波長と波動速度の関係を求め、その波動特性を明らかにし、その結果を用いて有限長板の縦振動をも考察した。サンドイッチ板に対して取扱われる以下の理論および結果は、その一部定数をかえることにより当然サンドイッチ棒に対しても適用できるものである。

2. 基礎方程式

第1図のように、内部材の両面を厚さの等しい異種材料で接着された無限に長いサンドイッチ板を考え

る。問題を二次元として取扱い、板の中央平面に原点をおき、波の進行方向にそい x 軸を、これに垂直に y 軸をとる。この時板内に成立する運動方程式は平面ひずみ状態で次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに u, v は板内の x, y 方向の変位、 t は時間、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比、 ρ は単位体積当りの質量であり、また

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を表わす。

いま

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots (2)$$

とおけば、(1)式から ϕ, ψ に関する次式を得る。

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \dots\dots (3)$$

第 1 図

* 昭和 37 年 9 月 7 日 第 12 回応用力学連合講演会において講演、原稿受付 昭和 38 年 1 月 30 日。

** 正員、東北大学工学部(仙台市桜小路)。

*** 正員、茨城大学工学部。

さらに

$$\phi = \Phi e^{ipt}, \quad \psi = \Psi e^{ipt} \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおき,

$$h^2 = \frac{\rho(1-2\nu)}{G2(1-\nu)} p^2, \quad k^2 = \frac{\rho}{G} p^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

の記号を用いると, (3)式から

$$(p^2 + h^2)\Phi = 0, \quad (p^2 + k^2)\Psi = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

を得る. 一方, 応力と変位の関係は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

以上の関係は ν を $\frac{\nu}{1+\nu}$ と書きかえることにより, サンドイッチ棒の場合にそのまま適用できる.

3. 波 動 解

厚さ $2c_1$ の内部材質 1 の部分を領域 1, 厚さ c_2 の外部材質 2 の部分を領域 2 とし, 各領域を表わすのに 1, 2 の接尾字をもってすれば, (6)式を満たし, 中央平面 ($y=0$) に対称な変形を与える Φ, Ψ の形は, 各領域において次のようになる.

$$\Phi_1 = A_1 \cosh \alpha_1 y \sin \xi x, \quad \Psi_1 = C_1 \sinh \beta_1 y \cos \xi x \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2 &= [A_2 \sinh \alpha_2 (c-y) + B_2 \cosh \alpha_2 (c-y)] \sin \xi x \\ \Psi_2 &= [C_2 \cosh \beta_2 (c-y) + D_2 \sinh \beta_2 (c-y)] \cos \xi x \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに $2c$ はサンドイッチ板の厚さ, $A_1, C_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ は未定定数, また

$$\alpha_j^2 = \xi^2 - h_j^2, \quad \beta_j^2 = \xi^2 - k_j^2, \quad j=1, 2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

である. (2)式を用いて板内の変位を計算すると

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (A_1 \xi \cosh \alpha_1 y + C_1 \beta_1 \cosh \beta_1 y) \cos \xi x e^{ipt} \\ v_1 &= (A_1 \alpha_1 \sinh \alpha_1 y + C_1 \xi \sinh \beta_1 y) \sin \xi x e^{ipt} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= [A_2 \xi \cosh \alpha_2 (c-y) + B_2 \xi \sinh \alpha_2 (c-y) + C_2 \beta_2 \cosh \beta_2 (c-y) + D_2 \beta_2 \sinh \beta_2 (c-y)] \cos \xi x e^{ipt} \\ v_2 &= -[A_2 \alpha_2 \sinh \alpha_2 (c-y) + B_2 \alpha_2 \cosh \alpha_2 (c-y) + C_2 \xi \sinh \beta_2 (c-y) + D_2 \xi \cosh \beta_2 (c-y)] \sin \xi x e^{ipt} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(11), (12) 式をみて明らかのように, この場合の縦波の波長は

$$2l = \frac{2\pi}{\xi} \quad \dots\dots\dots (13)$$

で与えられ, かつ波動速度 V は

$$V = \frac{p}{\xi} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる.

さて振動中, 板の表面にはなんら外力は作用しないと仮定する. したがって

$$y = \pm c; \quad \sigma_{y2} = \tau_{xy2} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

この条件を(12)式に適用すれば, (7)式を用いて

$$A_2(\xi^2 + \beta_2^2) + C_2 2\xi \beta_2 = 0, \quad B_2 2\xi \alpha_2 + D_2(\xi^2 + \beta_2^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

一方, 両材の接着面 $y = \pm c_1$ において両材は固着されているとする. すなわち

$$\left. \begin{aligned} y &= \pm c_1; \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \\ \sigma_{y1} &= \sigma_{y2}, \quad \tau_{xy1} = \tau_{xy2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

この条件を(11), (12)式に適用すれば, (16)式を用いて

$$\begin{aligned} A_1 \xi \cosh \alpha_1 c_1 + C_1 \beta_1 \cosh \beta_1 c_1 &= A_2 \left(\xi \cosh \alpha_2 c_2 - \frac{\xi^2 + \beta_2^2}{2\xi} \cosh \beta_2 c_2 \right) \\ &\quad + B_2 \left(\xi \sinh \alpha_2 c_2 - \frac{2\xi \alpha_2 \beta_2}{\xi^2 + \beta_2^2} \sinh \beta_2 c_2 \right) \\ A_1 \alpha_1 \sinh \alpha_1 c_1 + C_1 \xi \sinh \beta_1 c_1 &= A_2 \left(-\alpha_2 \sinh \alpha_2 c_2 + \frac{\xi^2 + \beta_2^2}{2\beta_2} \sinh \beta_2 c_2 \right) \\ &\quad + B_2 \left(-\alpha_2 \cosh \alpha_2 c_2 + \frac{2\xi \alpha_2}{\xi^2 + \beta_2^2} \cosh \beta_2 c_2 \right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & A_1(\xi^2 + \beta_1^2) \cosh \alpha_1 c_1 + C_1 2\xi \beta_1 \cosh \beta_1 c_1 = \frac{G_2}{G_1} \left[A_2(\xi^2 + \beta_2^2) (\cosh \alpha_2 c_2 - \cosh \beta_2 c_2) \right. \\
 & \quad \left. + B_2 \left\{ (\xi^2 + \beta_2^2) \sinh \alpha_2 c_2 - \frac{4\xi^2 \alpha_2 \beta_2}{\xi^2 + \beta_2^2} \sinh \beta_2 c_2 \right\} \right] \\
 & A_1 2\xi \alpha_1 \sinh \alpha_1 c_1 + C_1 (\xi^2 + \beta_1^2) \sinh \beta_1 c_1 = \frac{G_2}{G_1} \left[A_2 (-2\xi \alpha_2 \sinh \alpha_2 c_2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(\xi^2 + \beta_2^2)^2}{2\xi \beta_2} \sinh \beta_2 c_2 + B_2 2\xi \alpha_2 (-\cosh \alpha_2 c_2 + \cosh \beta_2 c_2) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

(18)式より未定定数 A_1 , C_1 , A_2 , B_2 を消去すれば, サンドイッチ板の縦波の特性方程式が求まることになる。

4. 特性方程式

(5), (10)式を再記すれば

$$\left. \begin{aligned}
 h_j^2 &= \frac{\rho_j(1-2\nu_j)}{G_j 2(1-\nu_j)} p^2, & k_j^2 &= \frac{\rho_j}{G_j} p^2 \\
 d_j^2 &= \xi^2 - h_j^2, & \beta_j^2 &= \xi^2 - k_j^2, & j &= 1, 2
 \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

(19)式より

$$\xi^2 = \frac{k_1^2 \alpha_1^2 - h_1^2 \beta_1^2}{k_1^2 - h_1^2} = 2(1-\nu_2) \alpha_2^2 - (1-2\nu_2) \beta_2^2 \dots (20)$$

いま

$$\alpha_2 c_2 = \omega, \quad \beta_2 c_2 = m\omega \dots (21)$$

とおき, (19), (20)式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned}
 (\xi c_2)^2 &= \{2(1-\nu_2) - (1-2\nu_2)m^2\} \omega^2 \\
 p^2 &= \frac{G_2}{\rho_2} \frac{1}{c_2^2} 2(1-\nu_2)(1-m^2) \omega^2
 \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

同様に

$$\alpha_1 c_1 = n\omega, \quad \beta_1 c_1 = q\omega \dots (23)$$

とおけば, (19)式より

$$\left. \begin{aligned}
 (\xi c_1)^2 &= \{2(1-\nu_1)n^2 - (1-2\nu_1)q^2\} \omega^2 \\
 p^2 &= \frac{G_1}{\rho_1} \frac{1}{c_1^2} 2(1-\nu_1)(n^2 - q^2) \omega^2
 \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

(22), (24) 式の関係を用いると

$$\left. \begin{aligned}
 2(1-\nu_1)n^2 - (1-2\nu_1)q^2 &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \{2(1-\nu_2) - (1-2\nu_2)m^2\} \\
 n^2 - q^2 &= \frac{G_2 \rho_1}{G_1 \rho_2} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} (1-m^2)
 \end{aligned} \right\}$$

となり, これより

$$\left. \begin{aligned}
 n^2 &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \left[2(1-\nu_2) - (1-2\nu_2)m^2 - \frac{G_2 \rho_1}{G_1 \rho_2} \frac{(1-\nu_2)(1-2\nu_1)}{1-\nu_1} (1-m^2) \right] \\
 q^2 &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \left[2(1-\nu_2) - (1-2\nu_2)m^2 - \frac{G_2 \rho_1}{G_1 \rho_2} 2(1-\nu_2)(1-m^2) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

を得る。

さて, (18) 式から A_1 , C_1 , A_2 , B_2 を消去し,

$$\xi c_1 = \xi' \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \omega, \quad n = n' \frac{c_1}{c_2}, \quad q = q' \frac{c_1}{c_2} \dots (26)$$

の関係で表わされる ξ' , n' , q' および (21), (23) 式を用いて書直せば, 得られる特性方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{G_2}{G_1} \left\{ d_1 \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega \cosh m\omega} \right) + e_1 \tanh \omega \tanh m\omega \right\} (-n' q' \tanh n\omega + \xi'^2 \tanh q\omega) \\
 & + \frac{G_1}{G_2} \left(\frac{d_2}{\cosh \omega \cosh m\omega} + e_2 + f_2 \tanh \omega \tanh m\omega \right) \left\{ -4\xi'^2 n' q' \tanh n\omega + (\xi'^2 + q'^2) \tanh q\omega \right\} \\
 & + (d_3 \tanh m\omega + e_3 \tanh \omega) (\xi'^2 - q'^2) q'
 \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

$$+ \left\{ d_4 \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega \cosh m \omega} \right) + e_4 \tanh \omega \tanh m \omega \right\} \{ 2n' q' \tanh n \omega - (\xi'^2 + q'^2) \tanh q \omega \} \\ + (d_5 \tanh \omega + e_5 \tanh m \omega) (\xi'^2 - q'^2) n' \tanh n \omega \tanh q \omega = 0$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \xi'^2 &= 2(1-\nu_2) - (1-2\nu_2)m^2 \\ n'^2 &= \xi'^2 - \frac{G_2 \rho_1}{G_1 \rho_2} \frac{(1-\nu_2)(1-2\nu_1)}{1-\nu_1} (1-m^2) \\ q'^2 &= \xi'^2 - \frac{G_2 \rho_1}{G_1 \rho_2} 2(1-\nu_2)(1-m^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= 8m\xi'^2(\xi'^2+m^2)^2, \quad e_1 = -(\xi'^2+m^2)^4 - 16\xi'^4 m^2 \\ d_2 &= -4m\xi'^2(\xi'^2+m^2), \quad e_2 = m(\xi'^2+m^2)^2 + 4m\xi'^4, \quad f_2 = -\xi'^2(\xi'^2+m^2)^2 - 4m^2\xi'^2 \\ d_3 &= (\xi'^2-m^2)(\xi'^2+m^2)^2, \quad e_3 = -4m\xi'^2(\xi'^2-m^2) \\ d_4 &= 4m\xi'^2(3\xi'^2+m^2)(\xi'^2+m^2), \quad e_4 = -2\xi'^2(\xi'^2+m^2)^3 - 16m^2\xi'^4 \\ d_5 &= m(\xi'^2-m^2)(\xi'^2+m^2)^2, \quad e_5 = -4m^2\xi'^2(\xi'^2-m^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

5. 波長と波動速度の関係

縦波の波長 $2l$ は(13)式より

$$(2l)^2 = \left(\frac{2\pi}{\xi} \right)^2 = \frac{4\pi^2 c_2^2}{\{2(1-\nu_2) - (1-2\nu_2)m^2\}\omega^2} = \frac{4\pi^2 c_1^2}{\{2(1-\nu_1)n^2 - (1-2\nu_1)q^2\}\omega^2} \dots\dots\dots (30)$$

となり, さらに書直して

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{2c}{2l} \right)^2 &= \left(\frac{c_1 + c_2}{l} \right)^2 = \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \{2(1-\nu_2) - (1-2\nu_2)m^2\}\omega^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \{2(1-\nu_1)n^2 - (1-2\nu_1)q^2\}\omega^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

を得る. この波長に対する波動速度 V は(14)式より

$$V^2 = \left(\frac{p}{\xi} \right)^2 = \frac{G_2}{\rho_2} \frac{2(1-\nu_2)(1-m^2)}{2(1-\nu_2) - (1-2\nu_2)m^2} = \frac{G_1}{\rho_1} \frac{2(1-\nu_1)(n^2-q^2)}{2(1-\nu_1)n^2 - (1-2\nu_1)q^2} \dots\dots\dots (32)$$

m の一連の値に対して (27) 式を満足する根 ω を求め, (31), (32) 式に代入すれば, サンドイッチ板に対する波長と波動速度との関係を求めることができる.

さて

$$V_{Dj} = \sqrt{\frac{G_j 2(1-\nu_j)}{\rho_j (1-2\nu_j)}}, \quad V_{Gj} = \sqrt{\frac{G_j}{\rho_j}}, \quad j=1, 2 \dots\dots\dots (33)$$

とおく. ここに V_{Dj} , V_{Gj} は材質 j の無限固体内を伝わる縦波および横波の速度である. (33) 式を用いて (19) 式を書直せば

$$\alpha_j^2 = \xi^2 \left[1 - \left(\frac{V}{V_{Dj}} \right)^2 \right], \quad \beta_j^2 = \xi^2 \left[1 - \left(\frac{V}{V_{Gj}} \right)^2 \right], \quad j=1, 2$$

α_j , β_j は V の大きさにより実数あるいは虚数となり, その移り変わる順序は V_{Dj} , V_{Gj} の大きさにより各種の場合を生ずるが, その取扱いは同じであるので, ここではそのうちのひとつとして

$$V_{G1} < V_{D1} < V_{G2} < V_{D2}$$

について考えよう. この場合 α_j^2 , β_j^2 の符号は V の変化により次のように変化する.

V の変化

$$0 \xrightarrow{\alpha_1^2, \beta_1^2 > 0} V_{G1} \xrightarrow{\alpha_1^2 > 0, \beta_1^2 < 0} V_{D1} \xrightarrow{\alpha_1^2, \beta_1^2 < 0} V_{G2} \xrightarrow{\alpha_1^2, \beta_1^2 < 0} V_{D2} \xrightarrow{\alpha_1^2, \beta_1^2 < 0} \infty$$

$V \leq V_{G1}$ の場合は, 特性方程式は (27) 式で与えられるが, その他の場合は下記のようになる. ただし簡単のため

$$\cosh \omega = C(\omega), \quad \cos \omega = c(\omega), \quad \tanh \omega = T(\omega), \quad \tan \omega = t(\omega)$$

と略記する.

(a) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ 実数; β_1 虚数; $V_{G1} \leq V \leq V_{D1}$

(27) 式に

$$q'^2 = -Q'^2, \quad Q = Q' \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \quad \dots\dots\dots (34)$$

を代入し

$$\left. \begin{aligned} & \frac{G_2}{G_1} \left\{ d_1 \left(1 - \frac{1}{C(\omega)C(m\omega)} \right) + e_1 T(\omega) T(m\omega) \right\} \{ -n' Q' T(n\omega) + \xi'^2 t(Q\omega) \} \\ & + \frac{G_1}{G_2} \left\{ \frac{d_2}{C(\omega)C(m\omega)} + e_2 + f_2 T(\omega) T(m\omega) \right\} \{ -4\xi'^2 n' Q' T(n\omega) + (\xi'^2 - Q'^2)^2 t(Q\omega) \} \\ & + \{ d_3 T(m\omega) + e_3 T(\omega) \} (\xi'^2 + Q'^2) Q' \\ & + \left\{ d_4 \left(1 - \frac{1}{C(\omega)C(m\omega)} \right) + e_4 T(\omega) T(m\omega) \right\} \{ 2n' Q' T(n\omega) - (\xi'^2 - Q'^2) t(Q\omega) \} \\ & + \{ d_5 T(\omega) + e_5 T(m\omega) \} (\xi'^2 + Q'^2) n' T(n\omega) t(Q\omega) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (35)$$

(b) α_2, β_2 実数; α_1, β_1 虚数; $V_{D1} \leq V \leq V_{G2}$

(27) 式に (34) 式および

$$n'^2 = -N'^2, \quad N = N' \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \quad \dots\dots\dots (36)$$

を代入し

$$\left. \begin{aligned} & \frac{G_2}{G_1} \left\{ d_1 \left(1 - \frac{1}{C(\omega)C(m\omega)} \right) + e_1 T(\omega) T(m\omega) \right\} \{ N' Q' t(N\omega) + \xi'^2 t(Q\omega) \} \\ & + \frac{G_1}{G_2} \left\{ \frac{d_2}{C(\omega)C(m\omega)} + e_2 + f_2 T(\omega) T(m\omega) \right\} \{ 4\xi'^2 N' Q' t(N\omega) + (\xi'^2 - Q'^2)^2 t(Q\omega) \} \\ & + \{ d_3 T(m\omega) + e_3 T(\omega) \} (\xi'^2 + Q'^2) Q' \\ & + \left\{ d_4 \left(1 - \frac{1}{C(\omega)C(m\omega)} \right) + e_4 T(\omega) T(m\omega) \right\} \{ -2N' Q' t(N\omega) - (\xi'^2 - Q'^2) t(Q\omega) \} \\ & - \{ d_5 T(\omega) + e_5 T(m\omega) \} (\xi'^2 + Q'^2) N' t(N\omega) t(Q\omega) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

(c) α_2 実数; $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ 虚数; $V_{G2} \leq V \leq V_{D2}$

(27) 式に (34), (36) 式および

$$m^2 = -M^2 \quad \dots\dots\dots (38)$$

を代入し

$$\left. \begin{aligned} & \frac{G_2}{G_1} \left\{ d_1' \left(1 - \frac{1}{C(\omega)c(M\omega)} \right) + e_1' T(\omega) t(M\omega) \right\} \{ N' Q' t(N\omega) + \xi'^2 t(Q\omega) \} \\ & + \frac{G_1}{G_2} \left\{ \frac{d_2'}{C(\omega)c(M\omega)} + e_2' + f_2' T(\omega) t(M\omega) \right\} \{ 4\xi'^2 N' Q' t(N\omega) + (\xi'^2 - Q'^2)^2 t(Q\omega) \} \\ & + \{ d_3' t(M\omega) + e_3' T(\omega) \} (\xi'^2 + Q'^2) Q' \\ & + \left\{ d_4' \left(1 - \frac{1}{C(\omega)c(M\omega)} \right) + e_4' T(\omega) t(M\omega) \right\} \{ -2N' Q' t(N\omega) - (\xi'^2 - Q'^2) t(Q\omega) \} \\ & - \{ d_5' T(\omega) + e_5' t(M\omega) \} (\xi'^2 + Q'^2) N' t(N\omega) t(Q\omega) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} d_1' &= 8M\xi'^2(\xi'^2 - M^2)^2, & e_1' &= -(\xi'^2 - M^2)^4 + 16\xi'^4 M^2 \\ d_2' &= -4M\xi'^2(\xi'^2 - M^2), & e_2' &= M(\xi'^2 - M^2)^2 + 4M\xi'^4, & f_2' &= -\xi'^2(\xi'^2 - M^2)^2 + 4M^2\xi'^2 \\ d_3' &= (\xi'^2 + M^2)(\xi'^2 - M^2)^2, & e_3' &= -4M\xi'^2(\xi'^2 + M^2) \\ d_4' &= 4M\xi'^2(3\xi'^2 - M^2)(\xi'^2 - M^2), & e_4' &= -2\xi'^2(\xi'^2 - M^2)^2 + 16M^2\xi'^4 \\ d_5' &= M(\xi'^2 + M^2)(\xi'^2 - M^2)^2, & e_5' &= 4M^2\xi'^2(\xi'^2 + M^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (40)$$

(d) $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 虚数; $V_{D2} \leq V$

$\omega = i\Omega$ とおき, (27) 式に代入して特性方程式が得られる. 諸係数は (28), (29) 式と同じである.

さて m および M の一連の値に対し, 上記特性方程式より ω を求める. ω の値は特定の m あるいは M に対

し、一次、二次、三次、……と無数に存在するが、いま一次の根を連ねた曲線を第1分枝、以下 n 次の根を連ねたものを第 n 分枝としよう。これらの値を(31)、(32)式に代入し、位相速度曲線を求めることができる。

なお第1分枝は

$$m^2 = \frac{1 + \nu_2 - \frac{c_1}{c_2} \left\{ \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 - \nu_2) - \frac{G_1}{G_2} \frac{2(1 - \nu_2)}{1 - \nu_1} \right\}}{-\frac{\nu_2^2}{1 - \nu_2} - \frac{c_1}{c_2} \left\{ \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 - \nu_2) - \frac{G_1}{G_2} \frac{1 - 2\nu_2}{1 - \nu_1} \right\}} \quad \dots\dots\dots(41)$$

において $\omega = 0$

となる。この場合は(31)、(32)式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{l} &= 0 \\ V^2 &= V_L^2 = \frac{G_2}{\rho_2} \frac{2}{1 - \nu_2} \frac{1 + \frac{c_1}{c_2} \frac{G_1}{G_2} \frac{1 - \nu_2}{1 - \nu_1}}{1 + \frac{c_1}{c_2} \frac{\rho_1}{\rho_2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(42)$$

となり、厚さに比し波長が無限に大きい場合の波動速度を与える。(42)式より V_L は、 $c_1/c_2 = 0$ すなわち内部材のきわめて薄い場合 $V_{L2} = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2} \frac{2}{1 - \nu_2}}$ 、 $c_1/c_2 = \infty$ すなわち外部材のきわめて薄い場合は

$V_{L1} = \sqrt{\frac{G_1}{\rho_1} \frac{2}{1 - \nu_1}}$ となり、従来の初等理論で得られる一様材のものと一致する。

以上において求めた V は位相速度であって、波長によってその値を異にする。このような分散性の材質内においてはエネルギーは群速度⁽⁴⁾で伝達され、位相速度で伝達されるものではない。群速度 V_g は位相速度曲線より求められ

$$V_g = V - l \frac{dV}{dl} \text{ あるいは } \frac{V_g}{V_{G2}} = \frac{V}{V_{G2}} + \frac{c}{l} \frac{d(V/V_{G2})}{d(c/l)} \quad \dots\dots\dots(43)$$

6. 有限長板の振動

前節において得られた式を用いて、長さ l の板あるいは棒の縦振動数を求めることができる。その代表的なものとして、(a) 両端自由振動、(b) 一端自由、一端固定振動、(c) 両端固定振動の3種を考えよう。端条

第 2 図

件としては近似的に

$$\text{自由端の場合 } \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(44)$$

$$\text{固定端の場合 } u = 0 \quad \dots\dots\dots(45)$$

とする。これらの場合第2図に示すごとく座標原点をとり

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{j\pi}{l} \\ \text{(a) の場合 } j &= 1, 2, 3, \dots\dots \\ \text{(b) の場合 } j &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\dots \\ \text{(c) の場合 } j &= 1, 3, 5, \dots\dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(46)$$

とおくと、すべての境界条件を満足することができる。したがってその固有振動数を N とすると

$$N^2 = \left(\frac{j}{2\pi} \right)^2 = \frac{G_2}{\rho_2} \frac{1 - \nu_2}{2\pi^2 c_2^2} (1 - m^2) \omega^2 \quad \dots\dots\dots(47)$$

となり、また(30)式より

$$\left(\frac{l}{2c} \right)^2 = \frac{\pi^2 j^2}{\left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right)^2 4 \{ 2(1 - \nu_2) - (1 - 2\nu_2) m^2 \} \omega^2} \quad \dots\dots\dots(48)$$

特性方程式を満足する m 、 ω の値を、(47)、(48)式に代入し、 $l/2c$ に対する振動数 N を求めることができる。

なお(47)、(48)式の関係は(31)、(32)式を用いて次のように書直される。すなわち

$$N = \frac{j}{2c} \left(\frac{c}{l} \right) V \quad \dots\dots\dots(49)$$

波長と位相速度の関係を知れば、その結果を用いて(49)式より有限長板の縦振動数を求めてもよいことがわかる。

7. 数 値 例

Al とプラスチック材からなるサンドイッチ板を考える。これら材料の諸係数を第1表のようにとる。

一例として、プラスチック材に Al 板をはりつけたサンドイッチ板を考え、厚さの比を

$$\frac{c_1}{c_2} = 10$$

とする場合、得られた波長と位相速度の関係を第3図に示す。ただし便宜上、横軸には波長の逆数 c/l をとる。図中 1, 2, ……の曲線は $m(M) - \omega$ 曲線の第1、

第 1 表

	$G \text{ kg/mm}^2$	$\rho \text{ g/cm}^3$	ν	$\sqrt{G/\rho} \text{ m/s}$
Al	2700	2.7×10^{-3}	0.34	3130
プラスチック材	110	1.3×10^{-3}	0.36	911

g : 重力加速度

第 3 図

第 4 図

第 5 図

第2, ……分枝に対応するものである。 $c/l=0$ の場合の V の値は, 1 曲線では(42)式の V_L となり, また波長がきわめて小となると, 各曲線ともその波動速度は V_{G1} に漸近する。第4図は(43)式を用いて第3図の曲線1, 2より求めた群速度を図示したものである。群速度の最大値は $c/l=0$ の V_L で与えられる。また曲線1, 2は $c/l=0.40\sim 0.45$ 付近で極小値, 極大値を示すが, c/l が大となるにつれ群速度は V_{G1} に漸近する。ただ位相速度の場合と異なり, その値は V_L より大とはならないことがわかる。

厚さに比し波長が非常に大の場合, 内部材と外部材の厚さの比により, その波動速度 V_L がいかに変化するかを(42)式を用いて図示したものが第5図である。 $c_2/c_1=0$ および $c_2/c_1=\infty$ は材質1および2のみよりなる一様板と考えられ, この場合 V_L の値はそれぞれ V_{L1} および V_{L2} で与えられる。

8. 結 言

以上サンドイッチ板の縦振動について, 二次元弾性運動式より出発してその厳密解を導き, 特性方程式を求めた。これより特殊の場合として, 波長が板厚に比しきわめて大の場合の波動速度が得られ, 内部材あるいは外部材の厚さが零の場合は, 従来の初等理論により得られる一様材の波動速度と一致することを示した。さらに数値例として内部材プラスチック, 外部材アルミニウムのサンドイッチ板に本解法を適用し, 波長と位相速度および群速度の関係を明らかにした。本方法の結果は有限長板の縦振動にもそのまま適用され, 各種の端条件につきその振動数を求めることができる。

終りに本研究の数値計算に協力された西沢美南子嬢に感謝する。

文 献

- (1) H. N. Abramson, H. J. Plass, & E. A. Ripperger, *Advances in Appl. Mech.*, 5(1958), 111.
- (2) H. N. Chu, *J. Acous. Soc. America*, 34(1962), 1184.
- (3) H. Saito & K. Sato, *Trans. ASME, Ser. E*, 29-2 (1962), 287.
- (4) H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*, (1953), 51, Oxford.