539.384.2:539.377.096:624.073.124

任意後退角を有する変厚後退片持平板の曲げ応力解析*

松本 鉄一**, 関谷 壮**, 稲垣 弘***, 中井 皓二****

Bending Stress Analysis of Swept-Back Plates of Variable Thickness

by Eiichi MATSUMOTO,

Tsuyoshi SEKIYA, Hiroshi INAGAKI, and Kōji NAKAI

A numerical method is presented for the problem of the bending stress of thin elastic cantilevered plate of variable thickness, having arbitrary swept-back angle and taper and being subjected to the pressure load on its surface and the temperature distribution in itself.

Three examples are solved by relaxation method; Examples 1 and 2 treat the solid wing plates of variable thickness and swept angle of $\tan^{-1}(3/4)$. The former is supported simply at four points and the latter is fixed at the root. Example 3 treats the tapered solid wing plate which is fixed at the root. For all of these examples the loads are assumed to be uniformly distributed.

Furthermore, experiments for the above three examples are carried out. Fair agreement is observed between the numerical and the experimental results.

1. 緒 言

後退片持変厚平板が種々の固定方法によってささえられ、面圧分布荷重を受ける場合の応力分布を知ることが、高速航空機の板状後退翼の強度を知る上に重要な問題である。

変厚平板の応力解析に対する数値的方法は、無孔の場合 Y. C. Fung⁽¹⁾ により、また任意形重複連結平板の場合は第 1, 第 2 の著者⁽⁵⁾によって示されている。Fung は正方形格子を用いて基礎微分方程式を階差方程式に近似的に置換えて、後退角が 45° の場合に対して 4 点だけで支持された変厚片持後退平板の一定面圧分布荷重による曲げ応力分布の数値計算を行なっている。しかしながら、一般に任意の後退角を有する場合においては、正方形格子を用いたのでは irregular star⁽²⁾ が現われ、この点を考慮する必要が生じてくる。また Fung の研究では 45° の後退角を有する変厚片持後退平板に対し応力分布の計算が行なわれているだけであって、実験との比較は示されていない。

この論文においては、最初に任意の後退角を有する変厚片持後退平板の場合には、正方形格子の代りに長方形格子を用いると、後退角が 45° の場合とほぼ同程

度の階差方程式が得られることを示す。また Fung⁽¹⁾ によってまだ取扱われていないところの平板の付根が固定されている場合や、平板内部に温度分布がある場合の熱曲げ応力についても考慮した基礎式⁽⁴⁾を誘導し、これらの場合に対する数値解法を示す。次に、 45° 以外すなわち $\tan^{-1}(3/4)$ の後退角を有し 4 点で支持された変厚後退平板、同じ後退角を有し付根が剛体的に固定された変厚後退平板、およびテーパを持ち付根が剛体的に固定された変厚後退平板が、一定面圧荷重を受けた場合に対する数値計算例を示す。

最後に数値計算例で考察した変厚後退平板を各例に対してそれぞれ製作し、面圧荷重を加えて実験を行ない、計算結果と実験結果を比較検討する。

2. 基礎微分方程式の数値解法

ここに用いる記号は、断わらない限り論文の最後にあげる文献(1)および(5)に同じである。変厚平板の曲げおよびねじりモーメントは、文献(1)の(8)式に与えられる。これらの方程式において応力関数 U および V により満足される微分方程式は、面圧荷重に加えて板内の温度分布も考えに入れると文献(5)の(5)式により与えられる。

これらの微分方程式を数値的に取扱うには、任意後退角を考えに入れて正方形格子の代りに長方形格子を用いるのが便利である。

* 昭和 36 年 3 月 18 日 関西支部第 36 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 38 年 2 月 4 日。

** 正員、大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥梅町 4)。

*** 准員、川崎航空機会社岐阜製作所。

**** 石川島播磨重工業会社。

第 1 図に示すような格子点配置に対し、文献(5)の(5)式に対応する方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{10}U_{10} + \gamma_{\bar{1}0}U_{\bar{1}0} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{0\bar{1}}U_{0\bar{1}} + \gamma_{00}U_{00} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{1\bar{1}}V_{1\bar{1}} + \delta_{\bar{1}1}V_{\bar{1}1} + \delta_{\bar{1}\bar{1}}V_{\bar{1}\bar{1}} + X &= 0 \\ \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{1\bar{1}}U_{1\bar{1}} + \Gamma_{\bar{1}1}U_{\bar{1}1} + \Gamma_{\bar{1}\bar{1}}U_{\bar{1}\bar{1}} + \Delta_{10}V_{10} + \Delta_{\bar{1}0}V_{\bar{1}0} + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{0\bar{1}}V_{0\bar{1}} + \Delta_{00}V_{00} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここに U および V はそれぞれの添字により示される点の応力関数値であり、各係数および外力項は

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_{10}, \gamma_{\bar{1}0}) &= a^2 \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}}, \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) \\ (\gamma_{01}, \gamma_{0\bar{1}}) &= \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}}, \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} \right) \\ \gamma_{00} &= - \left\{ a^2 \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) + \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} + \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} \right) \right\} \\ (\delta_{11}, \delta_{1\bar{1}}, \delta_{\bar{1}1}, \delta_{\bar{1}\bar{1}}) &= a \left(\frac{1+\mu}{8D_{01}} - \frac{\mu}{4D_{10}}, \frac{\mu}{4D_{10}} - \frac{1+\mu}{8D_{0\bar{1}}}, \frac{\mu}{4D_{\bar{1}0}} - \frac{1+\mu}{8D_{01}}, \frac{1+\mu}{8D_{0\bar{1}}} - \frac{\mu}{4D_{\bar{1}0}} \right) \\ (\Gamma_{11}, \Gamma_{1\bar{1}}, \Gamma_{\bar{1}1}, \Gamma_{\bar{1}\bar{1}}) &= a \left(\frac{1+\mu}{8D_{10}} - \frac{\mu}{4D_{01}}, \frac{\mu}{4D_{0\bar{1}}} - \frac{1+\mu}{8D_{10}}, \frac{\mu}{4D_{01}} - \frac{1+\mu}{8D_{\bar{1}0}}, \frac{1+\mu}{8D_{\bar{1}0}} - \frac{\mu}{4D_{0\bar{1}}} \right) \\ \Delta_{00} &= - \left\{ \frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} + \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} + \frac{1+\mu}{2} a^2 \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) \right\} \\ (\Delta_{10}, \Delta_{\bar{1}0}) &= \left(\frac{1+\mu}{2} \right) a^2 \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}}, \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) \\ (\Delta_{01}, \Delta_{0\bar{1}}) &= \left(\frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}}, \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} \right) \\ X &= -k^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{D} (\Omega_2 - \mu \Omega_1 - M_T) \right\} \\ Y &= -k^2 \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{D} (\Omega_1 - \mu \Omega_2 - M_T) \right\} \\ a &= \tan \lambda \quad h, k: \text{第 1 図に示す格子の間隔} \\ D &= \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}, \quad M_T = \alpha E \int_{-t/2}^{t/2} T(z) z dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここに E は縦弾性係数, t は板厚, また μ はポアソン比である. Ω_1, Ω_2 は分布面圧荷重 q と $q = (\partial^2 \Omega_1 / \partial x^2 + \partial^2 \Omega_2 / \partial y^2)$ なる関係をもつ任意関数であり, T は板内の温度分布をあらわし, α は線膨張係数である.

第 2 図に示す後退平板の前縁に隣る格子点に対しては、文献(5)の(5)式に対応して次の階差方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{10}U_{10} + \gamma_{\bar{1}0}U_{\bar{1}0} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{0\bar{1}}U_{0\bar{1}} + \gamma_{00}U_{00} + \delta_{12}V_{12} + \delta_{01}V_{01} + \delta_{1\bar{1}}V_{1\bar{1}} \\ + \delta_{\bar{1}1}V_{\bar{1}1} + \delta_{\bar{1}\bar{1}}V_{\bar{1}\bar{1}} + \delta_{10}V_{10} + \delta_{\bar{2}1}V_{\bar{2}1} + X &= 0 \\ \Gamma_{\bar{2}1}U_{\bar{2}1} + \Gamma_{12}U_{12} + \Gamma_{\bar{1}1}U_{\bar{1}1} + \Gamma_{1\bar{1}}U_{1\bar{1}} + \Gamma_{\bar{1}\bar{1}}U_{\bar{1}\bar{1}} + \Gamma_{01}U_{01} + \Gamma_{10}U_{10} \\ + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{0\bar{1}}V_{0\bar{1}} + \Delta_{10}V_{10} + \Delta_{\bar{1}0}V_{\bar{1}0} + \Delta_{00}V_{00} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ここに $\gamma_{10}, \gamma_{\bar{1}0}, \gamma_{01}, \gamma_{0\bar{1}}, \gamma_{00}, \delta_{1\bar{1}}, \Gamma_{\bar{1}\bar{1}}, \Delta_{01}, \Delta_{0\bar{1}}, \Delta_{10}, \Delta_{\bar{1}0}, \Delta_{00}, X$ および Y は(2)式と同じであるが他は

第 1 図

第 2 図

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{12} &= -\frac{\mu a}{4D_{10}}, & \delta_{01} &= \frac{3a(1+\mu)}{8D_{01}} \\
 \delta_{11} &= a\left(\frac{\mu}{D_{10}} - \frac{1+\mu}{8D_{01}}\right), & \delta_{11} &= a\left(\frac{\mu}{4D_{10}} - \frac{1+\mu}{2D_{01}}\right) \\
 \delta_{10} &= -\frac{3\mu a}{4D_{10}}, & \delta_{21} &= \frac{a(1+\mu)}{8D_{01}} \\
 \Gamma_{21} &= -\frac{\mu a}{4D_{10}}, & \Gamma_{12} &= \frac{a(1+\mu)}{8D_{10}} \\
 \Gamma_{11} &= a\left(\frac{\mu}{D_{01}} - \frac{1+\mu}{8D_{10}}\right), & \Gamma_{01} &= -\frac{3\mu a}{4D_{01}} \\
 \Gamma_{11} &= a\left(\frac{\mu}{4D_{01}} - \frac{1+\mu}{2D_{10}}\right), & \Gamma_{10} &= \frac{3a(1+\mu)}{8D_{10}}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

第3図に示す後退平板の後縁に隣る格子点に対しては、文献(5)の(5)式に対応して次の階差方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 &\gamma_{10}U_{10} + \gamma_{10}U_{10} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{00}U_{00} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{10}V_{10} \\
 &\quad + \delta_{01}V_{01} + \delta_{12}V_{12} + \delta_{21}V_{21} + X = 0 \\
 &\Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{10}U_{10} + \Gamma_{01}U_{01} + \Gamma_{12}U_{12} + \Gamma_{21}U_{21} + \Delta_{10}V_{10} \\
 &\quad + \Delta_{10}V_{10} + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{00}V_{00} + Y = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに $\gamma_{10}, \gamma_{10}, \gamma_{01}, \gamma_{01}, \gamma_{00}, \delta_{11}, \Gamma_{11}, \Delta_{10}, \Delta_{10}, \Delta_{01}, \Delta_{01}, \Delta_{00}, X$ および Y は(2)式と同じであるが他は

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{11} &= a\left(\frac{\mu}{D_{10}} - \frac{1+\mu}{8D_{01}}\right), & \delta_{11} &= a\left(\frac{\mu}{4D_{10}} - \frac{1+\mu}{2D_{01}}\right) \\
 \delta_{10} &= -\frac{3\mu a}{4D_{10}}, & \delta_{01} &= \frac{3a(1+\mu)}{8D_{01}} \\
 \delta_{12} &= -\frac{a\mu}{4D_{10}}, & \delta_{21} &= \frac{a(1+\mu)}{8D_{01}} \\
 \Gamma_{11} &= a\left(\frac{\mu}{4D_{01}} - \frac{1+\mu}{2D_{10}}\right), & \Gamma_{01} &= -\frac{3\mu a}{4D_{01}} \\
 \Gamma_{11} &= a\left(\frac{\mu}{D_{01}} - \frac{1+\mu}{8D_{10}}\right), & \Gamma_{10} &= \frac{3a(1+\mu)}{8D_{10}} \\
 \Gamma_{21} &= -\frac{\mu a}{4D_{01}}, & \Gamma_{12} &= \frac{a(1+\mu)}{8D_{10}}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

第4図に示す後退平板の後縁先端に隣る格子点に対しては、文献(5)の(5)式に対応して次の階差方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 &\gamma_{10}U_{10} + \gamma_{10}U_{10} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{00}U_{00} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{12}V_{12} \\
 &\quad + \delta_{10}V_{10} + \delta_{10}V_{10} + \delta_{12}V_{12} + X = 0 \\
 &\Gamma_{10}U_{10} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{12}U_{12} + \Gamma_{12}U_{12} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{10}U_{10} + \Delta_{10}V_{10} \\
 &\quad + \Delta_{10}V_{10} + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{00}V_{00} + Y = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

第 3 図

第 4 図

ここに $\gamma_{10}, \gamma_{10}, \gamma_{01}, \gamma_{01}, \gamma_{00}, \Delta_{10}, \Delta_{10}, \Delta_{01}, \Delta_{01}, \Delta_{00}, X$ および Y は (2) 式と同じであるが、他は

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= a \left(\frac{1+\mu}{2D_{01}} - \frac{\mu}{4D_{10}} \right), & \delta_{11} &= a \left(\frac{\mu}{D_{10}} - \frac{1+\mu}{2D_{01}} \right) \\ \delta_{11} &= \frac{a\mu}{4D_{10}}, & \delta_{12} &= a \left(\frac{1+\mu}{8D_{02}} - \frac{\mu}{4D_{10}} \right) \\ \delta_{10} &= a \left(\frac{3(1+\mu)}{8D_{00}} - \frac{3\mu}{4D_{10}} \right), & \delta_{10} &= -\frac{3a(1+\mu)}{8D_{00}} \\ \delta_{12} &= -\frac{a(1+\mu)}{8D_{02}}, & \Gamma_{10} &= \frac{3a\mu}{4D_{00}} \\ \Gamma_{11} &= a \left(\frac{1+\mu}{8D_{10}} - \frac{\mu}{D_{01}} \right), & \Gamma_{11} &= a \left(\frac{\mu}{D_{01}} - \frac{1+\mu}{2D_{10}} \right) \\ \Gamma_{12} &= a \left(\frac{1+\mu}{8D_{10}} - \frac{\mu}{4D_{02}} \right), & \Gamma_{12} &= \frac{a\mu}{4D_{02}} \\ \Gamma_{11} &= -\frac{a(1+\mu)}{8D_{10}}, & \Gamma_{10} &= a \left(\frac{3(1+\mu)}{8D_{10}} - \frac{3\mu}{4D_{00}} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

次に固定端の境界条件⁽¹⁾を、面圧荷重に加えて熱応力のある場合をも含めて拡張すると次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1+\mu}{2} l \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) - m(\Omega_1 - \mu\Omega_2 - M_T) &= 0 \\ l \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \mu \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{1+\mu}{2} m \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) - l(\Omega_2 - \mu\Omega_1 - M_T) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

(9) 式中の l, m は境界の外向法線の方角余弦である。

第 5 図に示す線素 a, a' が固定端であるとして、第 6 図に示すように仮想格子点 $(\bar{1}1), (\bar{1}0)$, および $(\bar{1}\bar{1})$ をとると、(9) 式は近似的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} U_{10} &= U_{10} - \frac{\mu}{a}(V_{01} - V_{01}) - 2h(\Omega_2 - \mu\Omega_1 - M_T) \\ V_{10} &= V_{10} + \frac{1}{a}(U_{01} - U_{01}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(10) 式を用いることにより、固定端あるいはその近傍の点の階差方程式において現われる上述の仮想格子点の各関数値を消去することができる。このようにした結果は次のようである。

第 5 図の格子点 1 に対する階差方程式は

aa' 固定端
bb' 第 1 層内部格子
cc' 第 1 層外部格子

第 5 図

第 6 図

$$\left. \begin{aligned}
& \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{0\bar{1}}U_{0\bar{1}} + \gamma_{00}U_{00} + \gamma_{02}U_{02} + \gamma_{0\bar{2}}U_{0\bar{2}} + \gamma_{10}U_{10} + \delta_{10}V_{10} + \delta_{1\bar{1}}V_{1\bar{1}} \\
& \quad + \delta_{12}V_{12} + \delta_{01}V_{01} + \delta_{0\bar{1}}V_{0\bar{1}} + X - \frac{2k^2}{hD^{-\frac{1}{2},0}}(\mathcal{Q}_2 - \mu\mathcal{Q}_1 - M_T) = 0 \\
& \Gamma_{01}U_{01} + \Gamma_{0\bar{1}}U_{0\bar{1}} + \Gamma_{10}U_{10} + \Gamma_{1\bar{1}}U_{1\bar{1}} + \Gamma_{12}U_{12} + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{0\bar{1}}V_{0\bar{1}} \\
& \quad + \Delta_{00}V_{00} + \Delta_{10}V_{10} + \Delta_{02}V_{02} + \Delta_{0\bar{2}}V_{0\bar{2}} + Y \\
& \quad - 2\mu h(\mathcal{Q}_2 - \mu\mathcal{Q}_1 - M_T)\left(\frac{3}{D_{00}} + \frac{1}{D_{02}} - \frac{4}{D_{0\bar{1}}}\right) = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned}
& \delta_{10} = \frac{3a\mu}{4}\left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{D_{1\bar{0}}}\right), \quad \delta_{1\bar{1}} = a\mu\left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{D_{1\bar{0}}}\right) \\
& \delta_{12} = \frac{a\mu}{4}\left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{D_{1\bar{0}}}\right), \quad \delta_{01} = -\frac{a\mu}{D^{-\frac{1}{2},0}} \\
& \delta_{0\bar{1}} = \frac{a\mu}{D^{-\frac{1}{2},0}}, \quad \gamma_{10} = a^2\left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D^{-\frac{1}{2},0}}\right) \\
& \gamma_{01} = \frac{1}{4}\left\{\frac{2(1+\mu)}{D_{0,\frac{1}{2}}} + \frac{3\mu}{D_{10}} + \frac{3(1+\mu)}{2D_{00}}\right\} \\
& \gamma_{00} = -\frac{\mu}{D_{10}} + \frac{1+\mu}{2D_{0\bar{1}}} - \frac{1+\mu}{2D_{0,\frac{1}{2}}} - \frac{1+\mu}{2D_{0,-\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{D_{\frac{1}{2},0}} - \frac{a^2}{D^{-\frac{1}{2},0}} \\
& \gamma_{0\bar{1}} = \frac{1}{4}\left\{-\frac{2\mu}{D_{10}} + \frac{3(1+\mu)}{2D_{00}} - \frac{1+\mu}{2D_{02}} + \frac{2(1+\mu)}{D_{0,-\frac{1}{2}}}\right\} \\
& \gamma_{02} = \frac{\mu}{D_{10}} - \frac{1+\mu}{2D_{0\bar{1}}}, \quad \gamma_{0\bar{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+\mu}{2D_{02}} - \frac{\mu}{D_{10}}\right) \\
& \Delta_{01} = \frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} - \frac{3}{4}\frac{\mu^2}{D_{00}} + \frac{3}{8}\frac{\mu(1+\mu)}{D_{10}} \\
& \Delta_{0\bar{1}} = \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4}\frac{\mu^2}{D_{02}} + \frac{3}{4}\frac{\mu^2}{D_{00}} - \frac{1}{4}\frac{\mu(1+\mu)}{D_{10}} \\
& \Delta_{00} = -\frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} - \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{2}\frac{1+\mu}{D_{\frac{1}{2},0}} - \frac{a^2}{2}\frac{1+\mu}{D^{-\frac{1}{2},0}} + \frac{\mu^2}{D_{0\bar{1}}} - \frac{1}{2}\frac{\mu(1+\mu)}{D_{10}} \\
& \Delta_{10} = \frac{(1+\mu)a^2}{2}\left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D^{-\frac{1}{2},0}}\right), \quad \Delta_{02} = \frac{\mu(1+\mu)}{2D_{10}} - \frac{\mu^2}{D_{0\bar{1}}} \\
& \Delta_{0\bar{2}} = a^2\left\{\frac{\mu^2}{4D_{02}} - \frac{\mu(1+\mu)}{8D_{10}}\right\}, \quad \Gamma_{01} = \frac{a(1+\mu)}{2D^{-\frac{1}{2},0}} \\
& \Gamma_{0\bar{1}} = -\frac{a(1+\mu)}{2D^{-\frac{1}{2},0}}, \quad \Gamma_{10} = -\frac{3a(1+\mu)}{8}\left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{D_{1\bar{0}}}\right) \\
& \Gamma_{1\bar{1}} = \frac{a(1+\mu)}{2}\left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{D_{1\bar{0}}}\right), \quad \Gamma_{12} = \frac{a(1+\mu)}{8}\left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{D_{1\bar{0}}}\right)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

第5図における格子点 2, 3, ……および 6 に対する階差方程式は

$$\left. \begin{aligned}
& \gamma_{10}U_{10} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{0\bar{1}}U_{0\bar{1}} + \gamma_{00}U_{00} + \gamma_{02}U_{02} + \gamma_{0\bar{2}}U_{0\bar{2}} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{1\bar{1}}V_{1\bar{1}} \\
& \quad + \delta_{01}V_{01} + \delta_{0\bar{1}}V_{0\bar{1}} + X - 2h\frac{a^2}{D^{-\frac{1}{2},0}}(\mathcal{Q}_2 - \mu\mathcal{Q}_1 - M_T) = 0 \\
& \Gamma_{01}U_{01} + \Gamma_{0\bar{1}}U_{0\bar{1}} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{1\bar{1}}U_{1\bar{1}} + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{0\bar{1}}V_{0\bar{1}} + \Delta_{10}V_{10} \\
& \quad + \Delta_{00}V_{00} + \Delta_{02}V_{02} + \Delta_{0\bar{2}}V_{0\bar{2}} + Y \\
& \quad - \frac{a\mu h}{2}(\mathcal{Q}_2 - \mu\mathcal{Q}_1 - M_T)\left(\frac{1}{D_{01}} - \frac{1}{D_{0\bar{1}}}\right) = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに

$$\begin{aligned}
\gamma_{10} &= a^2 \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right), & \gamma_{01} &= \frac{1+\mu}{2D_{0,\frac{1}{2}}}, & \gamma_{0\bar{1}} &= \frac{1+\mu}{2D_{0,-\frac{1}{2}}} \\
\gamma_{00} &= -a^2 \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) + \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{1}{4D_{01}} + \frac{1}{4D_{0\bar{1}}} - \frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} - \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} \right) - \frac{\mu}{2D_{10}} \\
\gamma_{02} &= \frac{\mu}{4D_{10}} - \frac{1+\mu}{8D_{01}}, & \gamma_{0\bar{2}} &= - \left(\frac{1+\mu}{8D_{0\bar{1}}} - \frac{\mu}{4D_{10}} \right) \\
\delta_{11} &= a\mu \left(\frac{1}{4D_{10}} - \frac{1}{4D_{10}} \right), & \delta_{1\bar{1}} &= a\mu \left(\frac{1}{4D_{10}} - \frac{1}{4D_{10}} \right) \\
\delta_{01} &= -\frac{a\mu}{D_{-\frac{1}{2},0}}, & \delta_{0\bar{1}} &= \frac{a\mu}{D_{-\frac{1}{2},0}}, & \Delta_{01} &= \frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} \\
\Delta_{0\bar{1}} &= \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}}, & \Delta_{10} &= \frac{a^2(1+\mu)}{2} \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) \\
\Delta_{00} &= - \left\{ \frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} + \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} + \frac{a^2(1+\mu)}{2} \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) \right\} + \mu \left(\frac{\mu}{4D_{01}} + \frac{\mu}{4D_{0\bar{1}}} - \frac{1+\mu}{4D_{10}} \right) \\
\Delta_{02} &= \mu \left(\frac{1+\mu}{8D_{10}} - \frac{\mu}{4D_{01}} \right), & \Delta_{0\bar{2}} &= \mu \left(\frac{1+\mu}{8D_{10}} - \frac{\mu}{4D_{0\bar{1}}} \right) \\
\Gamma_{11} &= \frac{a(1+\mu)}{8} \left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{D_{10}} \right), & \Gamma_{1\bar{1}} &= \frac{a(1+\mu)}{8} \left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{D_{10}} \right) \\
\Gamma_{01} &= \frac{a(1+\mu)}{2D_{-\frac{1}{2},0}}, & \Gamma_{0\bar{1}} &= -\frac{a(1+\mu)}{2D_{-\frac{1}{2},0}}
\end{aligned}
\tag{14}$$

格子点 7 に対する階差方程式は

$$\begin{aligned}
& \gamma_{10}U_{10} + \gamma_{00}U_{00} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{02}U_{02} + \gamma_{03}U_{03} + \gamma_{0\bar{1}}U_{0\bar{1}} + \delta_{01}V_{01} + \delta_{0\bar{1}}V_{0\bar{1}} \\
& \quad + \delta_{11}V_{11} + \delta_{1\bar{1}}V_{1\bar{1}} + \delta_{10}V_{10} + \delta_{12}V_{12} + X - \frac{2ha^2}{D_{-\frac{1}{2},0}}(\mathcal{Q}_2 - \mu\mathcal{Q}_1 - M_T) = 0 \\
& \Gamma_{1\bar{1}}U_{1\bar{1}} + \Gamma_{10}U_{10} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{12}U_{12} + \Gamma_{01}U_{01} + \Gamma_{0\bar{1}}U_{0\bar{1}} + \Delta_{00}V_{00} \\
& \quad + \Delta_{01}V_{01} + \Delta_{02}V_{02} + \Delta_{03}V_{03} + \Delta_{10}V_{10} + \Delta_{0\bar{1}}V_{0\bar{1}} + Y \\
& \quad + \left(\frac{3}{2D_{00}} - \frac{2}{D_{01}} + \frac{1}{2D_{02}} \right) a\mu h(\mathcal{Q}_2 - \mu\mathcal{Q}_1 - M_T) = 0
\end{aligned}
\tag{15}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\gamma_{10} &= a^2 \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) \\
\gamma_{00} &= - \left\{ a^2 \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) + \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} + \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\mu}{D_{10}} - \frac{1+\mu}{2D_{01}} \right\} \\
\gamma_{01} &= \frac{3(1+\mu)}{8D_{00}} + \frac{1+\mu}{2D_{0,\frac{1}{2}}} - \frac{\mu}{2D_{10}} - \frac{1+\mu}{8D_{02}} \\
\gamma_{02} &= \frac{\mu}{D_{10}} - \frac{1+\mu}{2D_{01}}, & \gamma_{03} &= \frac{1+\mu}{8D_{02}} - \frac{\mu}{4D_{10}} \\
\gamma_{0\bar{1}} &= \frac{1+\mu}{2D_{0,-\frac{1}{2}}} + \frac{3\mu}{4D_{10}} - \frac{3(1+\mu)}{8D_{00}} \\
\delta_{01} &= -\frac{a\mu}{D_{\frac{1}{2},0}}, & \delta_{0\bar{1}} &= \frac{a\mu}{D_{-\frac{1}{2},0}}, & \delta_{11} &= a\mu \left(\frac{1}{D_{10}} - \frac{1}{4D_{10}} \right) \\
\delta_{1\bar{1}} &= \frac{a\mu}{4D_{10}}, & \delta_{10} &= -\frac{3a\mu}{4D_{10}}, & \delta_{12} &= -\frac{a\mu}{4D_{10}} \\
\Delta_{00} &= - \left\{ \frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} + \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} + \frac{a^2(1+\mu)}{2} \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) - \frac{\mu}{D_{01}} + \frac{\mu(1+\mu)}{2D_{10}} \right\} \\
\Delta_{01} &= \frac{1}{D_{0,\frac{1}{2}}} + \frac{3\mu^2}{4D_{00}} - \frac{\mu^2}{4D_{02}} - \frac{\mu(1+\mu)}{4D_{10}}
\end{aligned}
\tag{16}$$

$$\begin{aligned}
A_{02} &= \frac{\mu(1+\mu)}{2D_{10}} - \frac{\mu^2}{D_{01}}, & A_{03} &= \frac{\mu^2}{4D_{02}} - \frac{\mu(1+\mu)}{8D_{10}} \\
A_{10} &= \frac{a^2(1+\mu)}{2} \left(\frac{1}{D_{\frac{1}{2},0}} + \frac{1}{D_{-\frac{1}{2},0}} \right) \\
A_{01} &= \frac{1}{D_{0,-\frac{1}{2}}} - \frac{3\mu^2}{4D_{00}} + \frac{3\mu(1+\mu)}{8D_{10}}, & \Gamma_{11} &= -\frac{a(1+\mu)}{8D_{10}} \\
\Gamma_{10} &= \frac{3a(1+\mu)}{8D_{10}}, & \Gamma_{11} &= \frac{a(1+\mu)}{8D_{10}} - \frac{a(1+\mu)}{2D_{10}} \\
\Gamma_{12} &= \frac{a(1+\mu)}{8D_{10}}, & \Gamma_{01} &= \frac{a(1+\mu)}{2D_{-\frac{1}{2},0}}, & \Gamma_{01} &= -\frac{a(1+\mu)}{2D_{-\frac{1}{2},0}}
\end{aligned}$$

格子点 8 に対する階差方程式は

$$\left. \begin{aligned}
&\gamma_{10}U_{10} + \gamma_{10}U_{10} + \gamma_{00}U_{00} + \gamma_{01}U_{01} + \gamma_{01}U_{01} + \delta_{10}V_{10} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{12}V_{12} \\
&\quad \delta_{11}V_{11} + \delta_{11}V_{11} + \delta_{10}V_{10} + \delta_{12}V_{12} + X = 0 \\
&\Gamma_{10}U_{10} + \Gamma_{10}U_{10} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{11}U_{11} + \Gamma_{12}U_{12} + \Gamma_{12}U_{12} + \Gamma_{11}U_{11} \\
&\quad + A_{01}V_{01} + A_{01}V_{01} + A_{00}V_{00} + A_{10}V_{10} + A_{10}V_{10} + Y = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに $\gamma_{10}, \gamma_{10}, \gamma_{01}, \gamma_{01}, \gamma_{00}, A_{01}, A_{01}, A_{10}, A_{10}, A_{00}, X$ および Y は (2) 式におけると同じであって他は

$$\left. \begin{aligned}
\delta_{10} &= \frac{3a}{4} \left(\frac{1+\mu}{2D_{00}} - \frac{\mu}{D_{10}} \right), & \delta_{11} &= a \left(\frac{\mu}{D_{10}} - \frac{1+\mu}{2D_{01}} \right) \\
\delta_{12} &= \frac{a}{4} \left(\frac{1+\mu}{2D_{02}} - \frac{\mu}{D_{10}} \right), & \delta_{10} &= -\frac{3a(1+\mu)}{8D_{00}} \\
\delta_{11} &= \frac{a\mu}{4D_{10}}, & \delta_{12} &= -\frac{a(1+\mu)}{8D_{02}} \\
\delta_{11} &= \frac{a}{4} \left\{ \frac{2(1+\mu)}{D_{01}} - \frac{\mu}{D_{10}} \right\} \\
\Gamma_{10} &= \frac{3a}{4} \left(\frac{1+\mu}{2D_{10}} - \frac{\mu}{D_{00}} \right), & \Gamma_{10} &= \frac{3\mu a}{4D_{00}} \\
\Gamma_{11} &= -\frac{a(1+\mu)}{8D_{10}}, & \Gamma_{12} &= \frac{a\mu}{4D_{02}} \\
\Gamma_{11} &= a \left(\frac{\mu}{D_{01}} - \frac{1+\mu}{2D_{10}} \right), & \Gamma_{11} &= \frac{a}{4} \left(\frac{1+\mu}{2D_{10}} - \frac{4\mu}{D_{01}} \right) \\
\Gamma_{12} &= a \left(\frac{1+\mu}{2D_{10}} - \frac{\mu}{D_{02}} \right)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

3. 数値計算例

例題 1 4 点で支持され, 平板の後退部分に等分布荷重を受けた任意後退角を有する変厚後退平板 第7図はここに考える模型の寸法を示す.

平板の後退した部分に等分布荷重が加えられる. 後退角は $\tan^{-1}(3/4)$ であって, 平板の厚さは前縁から中心線まで一定で, そこから, 後縁板厚が前縁の半分になるように後縁に向かって線形に変わっている.

本論文ではこの問題を周知のし緩法⁽²⁾によって数値的に取扱う. まずあらい格子点 (第7図に●で示される) に対し応力関数 U および V を求める. 次に, その結果に基づき細かい格子点 (第7図に○で示される) におけるそれらの改良された値を求める. さらに後縁付根の付近にいったん細かい格子をつけ加え, それらの点における応力関数

第 7 図

を求める。

これらの応力関数の値をもとにして、曲げおよびねじりモーメントを数値的に求め、主曲げモーメント、主応力および最大せん断応力を計算した。

これらの結果は第8, 9図および第10図に示される。

例題2 例題1における後退部分の付根が剛体的に固定されている場合 寸法および荷重条件のすべては前例題と同じであるが、後退部分の付根が剛体的

に固定されていると考える。付根上の格子点には階差方程式(11), (13)および(15)が用いられ、付根と前縁に隣っている点には(17)式が用いられる。し緩法を用いて数値計算を行なった結果を第11, 12図および第13図に示している。

例題3 分布荷重を受けるテーパのある後退片持平板 平板の寸法は第14図に示される。計算されたおもな結果は第14, 15図および第16図に示される。本例において先端近くの不規則な格子点配置に対

$$\frac{M_1}{q_0}(\text{cm}^2) = \frac{1}{2}[(M_x + M_y) - \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4H_{xy}^2}] / q_0$$

第8図 4点支持の場合の主モーメント線図

— 計算値 kg/cm^2

----- 実験値 "

等分布荷重: $q_0 = 0.0132 \text{ kg/cm}^2$

第10図 4点支持の場合の最大せん断応力線図

— 計算値 kg/cm^2

----- 実験値 "

等分布荷重: $q_0 = 0.0132 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{1}{2}[\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}]$$

第9図 4点支持の場合の主応力線図

$$\frac{M_1}{q_0}(\text{cm}^2) = \frac{1}{2}[(M_x + M_y) - \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4H_{xy}^2}] / q_0$$

第11図 付根固定の場合の主モーメント線図

する階差方程式は Lagrange の一般補間式を用いて誘導された。

4. 実 験

例題 1 および 2 に対する実験 数値計算結果を検討するために実験を行なった。例題 1 および 2 に対し第 7 図に示す寸法の二つの軟鋼の後退平板を製作した。例題 1 のモデルは第 7 図に示すように 4 点で支持

されており●と⊗の記号は支持点を表わすものである。例題 2 のモデルは後退部分の付根で剛体的に固定された。共和電業の抵抗線ひずみ計ローゼット KR 7-1 がひずみを測定するために使用された。平板の後退部分の両側に丸鋼を短く切ったものを並べて等分布荷重が加えられた。ひずみ計のはりつけ位置は第 7 図に●

— 計算値 kg/cm^2
 ---- 実験値 "
 等分布荷重: $q_0 = 0.0132 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{1}{2} [\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}]$$

第 12 図 付根固定の場合の主応力線図

— 計算値 kg/cm^2
 ---- 実験値 "
 等分布荷重: $q_0 = 0.0132 \text{ kg/cm}^2$

第 13 図 付根固定の場合の最大せん断応力線図

$$\frac{M_1}{q_0} (\text{cm}^2) = \frac{1}{2} [(M_x + M_y) - \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4H_{xy}^2}] / q_0$$

第 14 図 テーパー後退片持平板の主モーメント線図

— 計算値 kg/cm^2
 ---- 実験値 "
 等分布荷重: $q_0 = 0.0265 \text{ kg/cm}^2$
 実験値は各測定位置に数値で示す。

$$\frac{1}{2} [\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}]$$

第 15 図 テーパー後退片持平板の主応力線図

曲線は理論計算値 (kg/cm²), 実験値は各測定位置に
数値で示す。

等分布荷重: $q_0 = 0.0265 \text{ kg/cm}^2$

第 16 図 最大せん断応力線図

で示される。例題 1 では主応力および最大せん断応力の数値計算と実験の結果はよく一致している。例題 2 ではいくつかの位置に九州大学 根来祥三郎教授の考案による曲線ひずみゲージ⁽⁸⁾を用いた。その結果 KR 7-1 を使用した場合に比べ理論および実験結果の間によりよい一致をみた。

例題 3 に対する実験 テーパを持った後退平板を第 14 図の寸法に軟鋼で作り、構造物試験台に固定し

た。鋼球を平板上にのせたわく内に満たして等分布荷重を加えた。応力測定の結果は第 15 図および第 16 図に示されている。理論と実験結果がかなりよく一致していることがわかる。

5. 結 び

本論文では高速航空機の板状後退翼の強度問題に関連して、重要な変厚後退片持平板の曲げ応力の数値解析法を、Fung の方法をさらに一般化して、任意後退角やテーパを持つ場合、温度分布による熱曲げ応力のある場合に拡張して論じ、三つの代表的な計算例を示し実用的に十分な精度で実験結果と一致することを認めた。

終りに本研究に使用した曲線ひずみゲージについては九州大学 根来祥三郎教授より種々便宜を与えられご指導を賜った。ここに厚くお礼申し上げる次第である。なお本研究の予備的計算および予備的実験に協力された光洋精工会社 国松孝司、川崎航空機会社 国政 明の両氏に感謝する。

文 献

- (1) Y.C. Fung, *J. Aeron. Sci.*, **20** (1953-7).
- (2) R.V. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, **II** (1956), 264, Oxford.
- (3) S. Negoro, *Reports of Res. Inst. Appl. Mech.*, *Kyushu Univ.*, **VII-25** (1959).
- (4) B.A. Boley & J.H. Weiner, *Theory of Thermal Stresses*, (1960), 138, Wiley.
- (5) E. Matsumoto & T. Sekiya, *Proc. 11th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* 1961, (1962), 41.

発 ぼ う メ タ ル

アメリカのイリノイ州ペンタコニアの Ipsen Ceramics 社によって発ぼうメタルが開発された。最初発ぼう耐火レンガが開発され、その方式の応用によってモリブデン、ステンレス鋼、インコネル、その他の耐火メタル発ぼう体が造られるようになったのである。

これらのメタルは発ぼう体に変えると密度が 12% まで下がる。単に軽くなるだけでなく、延性および弾性が増加する。またスポンジ状の多孔性構造になっているので他種の材料を侵入させることができる。

Ipsen 社が最初に開発したのは 1960 年の秋の発ぼうアルミナレンガであった。これは 3400°F の熱に耐え、88% の多孔質のものであった。その結果標準サイズ $9 \text{ in} \times 4\frac{1}{2} \text{ in} \times 2\frac{1}{2} \text{ in}$ のアルミナレンガの重さわずかに 1.7 lb のものができた。これは 1ft³ のれんがの場合 29 lb に相当する。2200°F における熱の伝

導度は 1 ft², 厚さ 1 in, 1°F, 1 時間当り 3 BTU である。

次いで Ipsen 社は発ぼうジルコニアベースの耐火物質を工業的に造り出した。これは 4200°F までの熱に耐え、熱伝導度は 1 以下である。これもやはり 88% の多孔質であるが、1ft³ の重さは 37.5 lb であるから、れんが 1 個の重さは 2.2 lb である。ジルコニウムは純度の高いものを使用すると熱衝撃に弱いから、Ipsen 社は酸化カルシウムを添加したものを造っている。

この材料は大気圏再突入用ノーズコーンに使用されている。この場合は多孔性構造を利用してフェノール樹脂を侵入させてある。

[Steel, 152-20 (1963), 65]

(日本科学技術情報センター提供)