539.384.2:621-419

階差法によるサンドイッチ板の解法*

(第1報, 曲げ問題の解析)

岡本正明**, 関谷 壮**, 池川源基***

Numerical Analysis for Sandwich Plates by Difference Method

(1st Report, Analysis of Flexure Problems)

by Masaaki OKAMOTO, Tsuyoshi SEKIYA, and Motoki IKEGAWA

Although a great many investigations for the strength and the stiffness of the flat sandwich plates have been reported, most of them show only the basic equations or the solutions which are applicable only to certain particular cases.

In the present paper, we extend Hoff's energy method to the case of the cylindrical coordinates with the view of applying to the circular and sectorial plates, and on the other hand we propose to apply the difference method to the present problem in order to treat the plates with the arbitrary forms of the boundaries under the arbitrary loads and the mixed boundary conditions.

The numerical calculations were worked out for the deflections and the stresses of several plates.

From these results, it has been shown that our calculations coincide fairly well with our experiments and also coincide with the results obtained by means of the other theories.

1. 緒 論

サンドイッチ構造は軽量で強度および剛性が大きいために、近來車両、航空機、電子工業、建築等の各分野において広く用いられるようになってきた。そしてこの構造の材料力学的諸問題については、今日までに種々の解法が発表されている。しかしこれらの大部分は長方形板について解かれており、その上基礎式を提示しているだけのものが多く、また応用例も特殊な場合に限られている。

本論文においては円板、扇形板等への応用のため、N. J. Hoff のエネルギー法⁽¹⁾による解法を円柱座標に拡張し、他方任意形板を任意荷重状態および組合わされた境界条件のもとに解析するために、階差法の適用について考察し、その計算例として数種の板のたわみおよび応力解析を行ない、実験および他の理論との比較を示す。

2. 基礎微分方程式

N. J. Hoff は荷重を受けているサンドイッチ平板の

* 昭和 37 年 3 月 20 日 関西支部第 37 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 38 年 1 月 21 日。

** 正員、大阪府立大学工学部（堺市百舌鳥梅町 4 の 804）。

*** 准員、石川島播磨重工業会社。

変形によって、その中にたくわえられるひずみエネルギーを計算し、仮想変位の原理によって長方形板に対する次の基礎式を提出した⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} D_0[2u_{xx} + (1-\mu)u_{yy} + (1+\mu)v_{xy}] \\ - 2G_c c u + G_c c(c+t)w_x = 0 \\ D_0[2v_{yy} + (1-\mu)v_{xx} + (1+\mu)u_{xy}] \\ - 2G_c c v + G_c c(c+t)w_y = 0 \\ D_f \nabla^4 w + G_c c \frac{2}{c+t} (u_x + v_y) \\ - G_c c \nabla^2 w - q + P_L w_{xx} \\ + P_T w_{yy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ただし

E : フェース (face) の縦弾性係数

G_c : コア (core) のせん断弾性係数

t : フェースの厚さ

c : コアの厚さ

μ : フェースのポアソン比

(x, y, z) : 直交座標 (第1図参照)

u, v : フェースの変位の x, y 方向の成分、ただし表裏のフェースにおいて大きさ等しく方向反対

w : サンドイッチ板の中央面のたわみ

q : 板面に垂直な分布荷重

P_L, P_T : 板端面に x, y 方向に加わる単位幅あたりの圧縮力

添字 $x, y : x, y$ に関する偏微分演算を示す.

$$D_0 = Et(c+t)^2/2(1-\mu^2), \quad D_f = Et^3/6(1-\mu^2), \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

次に Hoff の解法を円柱座標の場合に適用した. サンドイッチ板の中央平面内に r, θ 座標をとり, この平面に垂直に z 軸をとる (第 2 図参照).

応力, ひずみ, モーメント等を円柱座標で表わし⁽²⁾⁽³⁾, 直交座標の場合と同様な手順で計算を行なう.

サンドイッチ板にたくわえられるひずみエネルギーおよび外力のポテンシャルは次のようになる.

1 枚のフェースにたくわえられる伸縮によるひずみエネルギー

$$U_f = \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \iint \left[u_r^2 r + 2\mu(u+v_\theta)u_r + \frac{1}{r}(u+v_\theta)^2 + \frac{1-\mu}{2r}(u_\theta+v_r-r-v)^2 \right] dr d\theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

1 枚のフェース中の曲げによるひずみエネルギー

$$U_b = \frac{Et^3}{24(1-\mu^2)} \iint \left[w_{rr}^2 r + \frac{1}{r} \left(\frac{w_{\theta\theta}}{r} + w_r \right)^2 + \frac{2(1-\mu)}{r} \left(w_{r\theta} - \frac{w_\theta}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{w_{\theta\theta}}{r} + w_r \right) w_{rr} \right] dr d\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

コアにたくわえられるせん断ひずみエネルギー

$$U_s = \frac{G_c c}{2} \iint \left[\left(\frac{2u}{c+t} - w_r \right)^2 + \left(\frac{2v}{c+t} - \frac{w_\theta}{r} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

中央平面に垂直な分布荷重のポテンシャルの変化

$$V_q = - \iint q w r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (5)$$

板端面に働く分布圧縮力のポテンシャルの変化

$$V_c = - \frac{P}{2} \iint \left(w_r^2 + \frac{w_\theta^2}{r^2} \right) r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここにおいて

E, G_c, t, c, μ, q, w : 前述のものと同一

(r, θ, z) : 円柱座標

u, v : フェースの変位の r, θ 方向の成分, ただし表裏のフェースにおいて大きさ等しく方向反対

P : 全周の端面に働く単位幅あたりの一定圧縮力, 添字 $r, \theta : r, \theta$ に関する偏微分演算を示す.

この場合コアの縦弾性係数がフェースのそれに比較して非常に小さいゆえに, コアの曲げによって生ずるひずみエネルギーは, サンドイッチ板全体のエネルギーに比して小さいとして省略した.

仮想変位の原理より

$$\delta(U+V) = 2\delta U_f + 2\delta U_b + \delta U_s + \delta V_q + \delta V_c = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

この式に (2)~(6) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} \delta(U+V) = & \frac{Et}{1-\mu^2} \iint \left[2u_r \delta u_r + 2\mu(u+v_\theta) \delta u_r + 2\mu u_r (\delta u + \delta v_\theta) + \frac{2}{r}(u+v_\theta)(\delta u + \delta v_\theta) \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{r}(u_\theta+v_r-r-v)(\delta u_\theta + r\delta v_r - \delta v) \right] dr d\theta + \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \iint \left[2w_{rr} r \delta w_{rr} \right. \\ & + \frac{2}{r} \left(\frac{w_{\theta\theta}}{r} + w_r \right) \left(\frac{\delta w_{\theta\theta}}{r} + \delta w_r \right) \\ & + 2\mu w_{rr} \left(\frac{\delta w_{\theta\theta}}{r} + \delta w_r \right) + 2\mu \left(\frac{w_{\theta\theta}}{r} + w_r \right) \delta w_{rr} \\ & + \frac{4(1-\mu)}{r} \left(\frac{w_\theta}{r} - w_{r\theta} \right) \left(\frac{\delta w_\theta}{r} - \delta w_{r\theta} \right) \Big] dr d\theta \\ & + G_c c \iint \left[\left(\frac{2u}{c+t} - w_r \right) \left(\frac{2\delta u}{c+t} - \delta w_r \right) \right. \\ & + \left. \left(\frac{2v}{c+t} - \frac{w_\theta}{r} \right) \left(\frac{2\delta v}{c+t} - \frac{\delta w_\theta}{r} \right) \right] r dr d\theta \\ & - \iint q r \delta w dr d\theta - P \iint \left(w_r r \delta w_r + \frac{w_\theta}{r} \delta w_\theta \right) dr d\theta \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

第 1 図

第 2 図

Green の定理を適用すれば

$$\begin{aligned}
 \delta = (U + V) = & \int \int \left[\left[\frac{Et}{1-\mu^2} \left\{ \frac{2}{r} (u+v_\theta) - 2(u_r + u_{rr}r + \mu w_{r\theta}) - \frac{1-\mu}{r} (u_{\theta\theta} + v_{r\theta}r - v_\theta) \right\} \right. \right. \\
 & + \frac{2G_c c r}{c+t} \left(\frac{2u}{c+t} - w_r \right) \Big] \delta u - \left[\frac{Et}{1-\mu^2} \left\{ \frac{2}{r} u_\theta + \frac{2}{r} v_{\theta\theta} + 2\mu u_{r\theta} + (1-\mu) \left(\frac{u_\theta}{r} + u_{r\theta} - \frac{v}{r} + v_r + v_{rr}r \right) \right\} \right. \\
 & - \frac{2G_c c r}{c+t} \left(\frac{2v}{c+t} - \frac{w_\theta}{r} \right) \Big] \delta v + \left[\frac{Et^3}{6(1-\mu^2)} \left\{ \frac{w_r}{r^2} - \frac{w_{rr}}{r} + 4 \frac{w_{\theta\theta}}{r^3} + 2w_{rrr} - 2 \frac{w_{r\theta\theta}}{r^2} \right. \right. \\
 & + w_{rrrr}r + \frac{2}{r} w_{rr\theta\theta} + \frac{w_{\theta\theta\theta\theta}}{r^3} \Big] + G_c c \left\{ \frac{2}{c+t} (u + u_r r + v_\theta) - \left(w_r + w_{rr}r + \frac{w_{\theta\theta}}{r} \right) \right\} \\
 & - q r + P \left(w_r + w_{rr}r + \frac{w_{\theta\theta}}{r} \right) \Big] \delta w \Big] dr d\theta + \frac{Et}{1-\mu^2} \oint \left[2 \{ u_r r + \mu (u + v_\theta) \} \delta u d\theta \right. \\
 & - \frac{1-\mu}{r} (u_\theta - v + v_r r) \delta u dr - \frac{2}{r} (u + v_\theta + \mu u_r r) \delta v dr + (1-\mu) (u_\theta - v + v_r r) \delta v d\theta \Big] \\
 & + \frac{Et^3}{6(1-\mu^2)} \oint \left[\left(\frac{w_r}{r} - w_{rr} + \frac{3-\mu}{r^2} w_{\theta\theta} - w_{rrr} - \frac{2-\mu}{r} w_{r\theta\theta} \right) \delta w dr \right. \\
 & + \left\{ \frac{2(1-\mu)}{r^3} w_\theta - \frac{1-2\mu}{r^2} w_{r\theta} + \frac{2-\mu}{r} w_{rr\theta} + \frac{w_{\theta\theta\theta}}{r^3} \right\} \delta w dr \\
 & + \left\{ w_{rr}r + \mu \left(\frac{w_{\theta\theta}}{r} + w_r \right) \right\} \delta w d\theta - \left(\frac{w_r}{r^2} + \frac{\mu}{r} w_{rr} + \frac{w_{\theta\theta}}{r^3} \right) \delta w_\theta dr \Big] \\
 & + \frac{Et^3}{3(1+\mu)} \left\{ \left[\left(\frac{w_{r\theta}}{r} - \frac{w_\theta}{r^2} \right) \delta w \right]_{r_2, \theta_2} - \left[\left(\frac{w_{r\theta}}{r} - \frac{w_\theta}{r^2} \right) \delta w \right]_{r_2, \theta_1} \right. \\
 & - \left[\left(\frac{w_{r\theta}}{r} - \frac{w_\theta}{r^2} \right) \delta w \right]_{r_1, \theta_2} + \left[\left(\frac{w_{r\theta}}{r} - \frac{w_\theta}{r^2} \right) \delta w \right]_{r_1, \theta_1} \Big\} + G_c c \oint \left\{ - \left(\frac{2u}{c+t} - w_r \right) r d\theta \right. \\
 & + \left(\frac{2v}{c+t} - \frac{w_\theta}{r} \right) dr \Big\} \delta w - P \oint \left(w_r r d\theta - \frac{w_\theta}{r} dr \right) \delta w \dots\dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

ただし

$(r_1, r_2), (\theta_1, \theta_2)$: それぞれ扇形サンドイッチ板の
端面の r, θ 座標

次にサンドイッチ板の境界条件の方程式は

A) 固定端の場合

$r=r_1, r=r_2$ において

$$\left. \begin{aligned} u=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad w_r=0 \\ \delta u=0, \quad \delta v=0, \quad \delta w=0, \quad \delta w_r=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$\theta=\theta_1, \theta=\theta_2$ において

$$\left. \begin{aligned} u=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad w_\theta=0 \\ \delta u=0, \quad \delta v=0, \quad \delta w=0, \quad \delta w_\theta=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

B) 単純支持端の場合

$r=r_1, r=r_2$ において

$$\left. \begin{aligned} v=0, \quad w=0, \quad \delta v=0, \quad \delta w=0 \\ u_r + \frac{\mu}{r} (u + v_\theta) = 0, \quad w_{rr} + \frac{\mu}{r} \left(w_r + \frac{w_{\theta\theta}}{r} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$\theta=\theta_1, \theta=\theta_2$ において

$$\left. \begin{aligned} u=0, \quad w=0, \quad \delta u=0, \quad \delta w=0 \\ \mu u_r + \frac{1}{r} (u + v_\theta) = 0, \quad \mu w_{rr} + \frac{1}{r} \left(w_r + \frac{w_{\theta\theta}}{r} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

C) 自由端の場合

$r=r_1, r=r_2$ において

$$\left. \begin{aligned} u_r + \frac{\mu}{r} (u + v_\theta) = 0, \quad \frac{1}{r} (u_\theta + v_r r - v) = 0 \\ w_{rr} + \frac{\mu}{r} \left(w_r + \frac{w_{\theta\theta}}{r} \right) = 0 \\ \frac{Et^3}{6(1-\mu^2)} \left(\frac{w_r}{r^2} - \frac{w_{rr}}{r} + \frac{3-\mu}{r^3} w_{\theta\theta} - w_{rrr} \right. \\ \left. - \frac{2-\mu}{r^2} w_{r\theta\theta} \right) - G_c c \left(\frac{2u}{c+t} - w_r \right) - P w_r = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$\theta=\theta_1, \theta=\theta_2$ において

$$\left. \begin{aligned} \mu u_r + \frac{1}{r} (u + v_\theta) = 0, \quad \frac{1}{r} (u_\theta + v_r r - v) = 0 \\ \mu w_{rr} + \frac{1}{r} \left(w_r + \frac{w_{\theta\theta}}{r} \right) = 0 \\ \frac{Et^3}{6(1-\mu^2)} \left[\frac{2(1-\mu)}{r^3} w_\theta - \frac{1-2\mu}{r^2} w_{r\theta} + \frac{2-\mu}{r} w_{rr\theta} \right. \\ \left. + \frac{w_{\theta\theta\theta}}{r^3} \right] + G_c c \left(\frac{2v}{c+t} - \frac{w_\theta}{r} \right) + \frac{P}{r} w_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

上述の境界条件を(9)式に代入すれば、二重積分以外の項は皆消滅する。そして未定係数法を適用すれば(9)式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 D_0 \left[\frac{2}{r} u - 2u_r + \frac{3-\mu}{r} v_\theta - 2u_{rr}r - (1+\mu)v_{r\theta} - \frac{1-\mu}{r} u_{\theta\theta} \right] + G_c c(c+t) \left(\frac{2u}{c+t} - w_r \right) r &= 0 \\
 D_0 \left[\frac{1-\mu}{r} v - (1-\mu)v_r - \frac{3-\mu}{r} u_\theta - (1-\mu)v_{rr}r - (1+\mu)u_{r\theta} - \frac{2}{r} v_{\theta\theta} \right] + G_c c(c+t) \left(\frac{2v}{c+t} - \frac{w_\theta}{r} \right) r &= 0 \\
 D_f \left(\frac{w_r}{r^2} - \frac{w_{rr}}{r} + \frac{4}{r^3} w_{\theta\theta} + 2w_{rrr} - \frac{2}{r^2} w_{r\theta\theta} + w_{rrrr}r + \frac{2}{r} w_{rr\theta\theta} + \frac{w_{\theta\theta\theta\theta}}{r^3} \right) \\
 + G_c c \left[\frac{2}{c+t} (u + u_r r + v_\theta) - \left(w_r + w_{rr}r + \frac{w_{\theta\theta}}{r} \right) \right] + P \left(w_r + w_{rr}r + \frac{w_{\theta\theta}}{r} \right) &= q r
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

3. 基礎微分方程式の階差表示

本論文のサンドイッチ板問題の解法は、適当な境界条件のもとに微分方程式 (1) または (16) を解くことに帰着する。

まず (1) 式の解法について述べる。第 3 図のような直交座標系の格子を考えると、(1) 式中の各偏微係数は周知の次記近似式によって表わされる⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_{00} &\approx \frac{1}{2h} (\chi_{10} - \chi_{10}), & \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_{00} &\approx \frac{1}{2k} (\chi_{01} - \chi_{01}) \\
 \left(\frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} \right)_{00} &\approx \frac{1}{k^4} (\chi_{02} - 4\chi_{01} + 6\chi_{00} - 4\chi_{01} + \chi_{02})
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ただし χ : 未知関数 (u, v, w のいずれかを表わす)

h, k : 第 3 図に示す格子の間隔

添字 00, 10 等は関数または微係数が考えられている格子点の位置を示す。

上述の各微係数の階差式を (1) 式に代入すれば領域内部の各格子点において (1) 式に対応するところの次記階差方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 - \left(2 + \frac{1-\mu}{f^2} + \frac{G_c c h^2}{D_0} \right) u_{00} + u_{10} + u_{10} + \frac{1-\mu}{2f^2} (u_{01} + u_{01}) \\
 + \frac{1+\mu}{8f} (v_{11} - v_{11} - v_{11} + v_{11}) + \frac{G_c c(c+t)h}{4D_0} (w_{10} - w_{10}) &= 0 \\
 - \left(\frac{2}{f^2} + 1 - \mu + \frac{G_c c h^2}{D_0} \right) v_{00} + \frac{1}{f^2} (v_{01} + v_{01}) + \frac{1-\mu}{2} (v_{10} + v_{10}) \\
 + \frac{1+\mu}{8f} (u_{11} - u_{11} - u_{11} + u_{11}) + \frac{G_c c(c+t)h}{4fD_0} (w_{01} - w_{01}) &= 0 \\
 2 \left[3 + \frac{4}{f^2} + \frac{3}{f^4} + \frac{h^2}{D_f} \left\{ G_c c \left(1 + \frac{1}{f^2} \right) - P_L - \frac{P_T}{f^2} \right\} \right] w_{00} - \left\{ 4 \left(1 + \frac{1}{f^2} \right) \right. \\
 + \frac{h^2}{D_f} (G_c c - P_L) \left. \right\} (w_{10} + w_{10}) - \frac{1}{f^2} \left\{ 4 \left(1 + \frac{1}{f^2} \right) \right. \\
 + \frac{h^2}{D_f} (G_c c - P_T) \left. \right\} (w_{01} + w_{01}) + \frac{2}{f^2} (w_{11} + w_{11} + w_{11} + w_{11}) + w_{20} + w_{20} \\
 + \frac{1}{f^4} (w_{02} + w_{02}) + \frac{G_c c h^3}{D_f(c+t)} (u_{10} - u_{10}) + \frac{G_c c h^3}{fD_f(c+t)} (v_{01} - v_{01}) &= \frac{qh^4}{D_f}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

第 3 図

第 4 図

ただし $f=k/h$

また同様に境界条件も階差方程式に変換できるから、これらの変換された境界条件式と(18)式を連立させて u, v, w に関する連立一次代数方程式を解くことによって、各格子点に対する(18)式の解 u, v, w が求められる。

次に第4図のような円柱座標系の格子を考えると(16)式中の各微係数は近似的に

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)_{00} &\approx \frac{1}{2s} (\chi_{10} - \chi_{10}), & \left(\frac{\partial \chi}{\partial \theta}\right)_{00} &\approx \frac{1}{2\varphi} (\chi_{01} - \chi_{01}) \\ \left(\frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^4}\right)_{00} &\approx \frac{1}{\varphi^4} (\chi_{02} - 4\chi_{01} + 6\chi_{00} - 4\chi_{01} + \chi_{02}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし s, φ : 円柱座標系格子の構成単位の基本寸法

ゆえに直交座標系の場合と同様にして、(16)式に対応する階差方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} &4 \left[\frac{2}{s^2} r + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1-\mu}{\varphi^2} \right) + \frac{G_c r}{D_0} \right] u_{00} - \frac{2}{s^2} (2r+s) u_{10} - \frac{2}{s^2} (2r-s) u_{10} \\ &- 2 \frac{1-\mu}{r\varphi^2} (u_{01} + u_{01}) + \frac{3-\mu}{r\varphi} (v_{01} - v_{01}) - \frac{1+\mu}{2s\varphi} (v_{11} - v_{11} - v_{11} + v_{11}) \\ &- \frac{G_c c(c+t)r}{sD_0} (w_{10} - w_{10}) = 0 \\ &- 4 \left[\frac{1-\mu}{s^2} r + \frac{1}{r} \left(\frac{1-\mu}{2} + \frac{2}{\varphi^2} \right) + \frac{G_c r}{D_0} \right] v_{00} + \frac{1-\mu}{s^2} (2r+s) v_{10} + \frac{1-\mu}{s^2} (2r-s) v_{10} + \frac{4}{r\varphi^2} (v_{01} \\ &+ v_{01}) + \frac{3-\mu}{r\varphi} (u_{01} - u_{01}) + \frac{1+\mu}{2s\varphi} (u_{11} - u_{11} - u_{11} + u_{11}) + \frac{G_c c(c+t)}{\varphi D_0} (w_{01} - w_{01}) = 0 \\ &\frac{2G_c c}{D_f(c+t)} u_{00} + \frac{G_c r}{D_f(c+t)s} (u_{10} - u_{10}) + \frac{G_c c}{D_f(c+t)\varphi} (v_{01} - v_{01}) \\ &+ 2 \left[\frac{1}{rs^2} \left\{ \left(\frac{4}{\varphi^2} + 1 \right) + \frac{s^2}{r^2\varphi^2} \left(\frac{3}{\varphi^2} - 4 \right) + \frac{3r^2}{s^2} \right\} + \frac{G_c c - P}{D_f} \left(\frac{r}{s^2} + \frac{1}{r\varphi^2} \right) \right] w_{00} \\ &- \left\{ \frac{1}{2r^2s^2} \left(\frac{4}{\varphi^2} + 1 \right) (2r-s) + \frac{2}{s^4} (2r+s) + \frac{G_c c - P}{2D_f s^2} (2r+s) \right\} w_{10} \\ &- \left\{ \frac{1}{2r^2s^2} \left(\frac{4}{\varphi^2} + 1 \right) (2r+s) + \frac{2}{s^4} (2r-s) + \frac{G_c c - P}{2D_f s^2} (2r-s) \right\} w_{10} \\ &- \left\{ \frac{4}{\varphi^2} \left(\frac{1}{rs^2} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3\varphi^2} \right) + \frac{G_c c - P}{D_f r\varphi^2} \right\} (w_{01} + w_{01}) + \frac{2r-s}{r^2s^2\varphi^2} (w_{11} + w_{11}) \\ &+ \frac{2r+s}{r^2s^2\varphi^2} (w_{11} + w_{11}) + \frac{r+s}{s^4} w_{20} + \frac{r-s}{s^4} w_{20} + \frac{1}{r^3\varphi^4} (w_{02} + w_{02}) = \frac{qr}{D_f} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

同様に境界条件を階差式に変換し、(20)式に代入して連立方程式を解けば領域内各格子点における u, v, w の値が得られる。

すなわち今計算しようとする板の平面図形を第3図または第4図のような格子で分割し、領域内の各格子点に(18)式または(20)式を適用して連立一次代数方程式を作り、適当な境界条件を代入して計算を行えば所要の解が得られる。

境界が第3図または第4図のような正規の格子点にのらない図形の場合は、その境界付近の不等間隔格子点配置に対して、この近傍の未知関数 χ の分布をラグランジュの一般補間式によって表わし、原微分方程式および境界条件式に代入することにより代数化された微分方程式および境界条件式が求められる。

4. 数値計算および実験

以上の理論によって次の5種の例題に対して数値解析を行ない、その内の数例に対しては参考文献⁽⁵⁾⁽⁶⁾の理論による計算値および我々の実験値と比較した。実

第5図

験においてたわみはダイヤルゲージ、応力は抵抗線ひずみ計を用いて測定した。

例題中に使われている応力の記号を次のように定義する (第 1 図または第 2 図参照)。

σ_1, σ_2 : 上側フェースのコアに接する面における主応力 (または下側フェースのコアに接する面における主応力, ただし符号反対)

σ_1', σ_2' : 上側フェースのコアに接しない面における

(a) 中央面のたわみ w/q (b) フェース(上側)の変位 $\sqrt{u^2+v^2}/q$
第 6 図 たわみおよび変位

格子点 格子点
理論値, ANC-23.....設定温度 20°C
実験値.....実験温度 20°C, 負荷後 60 分
第 7 図 中央面のたわみ w/q

理論値.....設定温度 20°C
実験値.....実験温度 18.5°C, 負荷後 60 分
第 8 図 フェースの主応力

第 9 図 コアのせん断応力 τ_c/q

(a) 中央面のたわみ w/q (b) フェース(上側)の変位 $\sqrt{u^2+v^2}/q$
第 10 図 たわみおよび変位

格子点 格子点
理論値, 池田理論, ANC-23.....設定温度 20°C
実験値.....実験温度 18°C, 負荷後 60 分
第 11 図 中央面のたわみ w/q

主応力 (または下側フェースのコアに接しない面) における主応力, ただし符号反対)

τ_c : コアのせん断応力

例題 1. 全周固定の正方形板 (第5図)

この板のおもな仕様は

一辺の長さ = 60 cm

$E = 7.171 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ (アルミニウム, A2P1)

$G_c = 53.125 \text{ kg/cm}^2$ (ビニルコルク, A-7, 20°C)

$\mu = 1/3$, $t = 0.06 \text{ cm}$, $c = 1.2 \text{ cm}$

$q = q \text{ kg/cm}^2$ (等分布荷重)

$P_L = P_T = 0$, $h = k = 10 \text{ cm}$

理論値……設定温度 20°C
実験値……実験温度 19°C, 負荷後60分

第 12 図 フェースの主応力

第 14 図

第 15 図 たわみおよび変位

第 16 図

第 17 図 たわみおよび変位

以上の仕様の板に対して、階差方程式 (18) を固定境界条件のもとに解いた結果および他の方法によって得た結果とを第 6~9 図に示す。

これらの図より理論値と実験値はお互にはば一致している。また中央のたわみは ANC-23⁽⁵⁾ による計算値ともだいたい一致している。

例題 2. 全周単支持の正方形板 (第 5 図)

単支持の境界条件が使われること以外は、その仕様および手順は前例と同じとする。

理論値、実験値および他の理論による計算値を第 10~13 図に示す。

これらの図より計算結果は実験結果と割合よく一致し、また池田の理論⁽⁶⁾および ANC-23⁽⁵⁾ の計算法によって得られた結果ともほぼ一致した。

例題 3. 全周固定のひし形板 (第 14 図)

対角線の長さが 120 cm, 60 cm および $h=20$ cm, $k=10$ cm, その他の仕様は例題 1 と同様とする。

この例題においては (18) 式が固定端の条件のもと

に解かれる。そして $w_x=0$ または $w_y=0$ の代りに $w_n=0$ が用いられる。ただし n は境界の外向き法線である。

計算結果は第 15 図に示されている。

例題 4. 全周固定の扇形板 (第 16 図)

この例題に対する仕様は

$$r_1=120 \text{ cm}, \quad r_2=200 \text{ cm}$$

$$\text{中心角}=\pi/4 \text{ rad}$$

$$s=20 \text{ cm}, \quad \varphi=\pi/24 \text{ rad}$$

$$t=0.1 \text{ cm}, \quad c=5.0 \text{ cm}$$

$$P=0$$

他の仕様は例題 1 と同様である。

この例題では (20) 式を境界条件 (10), (11) 式のもとに解く。

計算結果は第 17~19 図に示されている。

例題 5. 相対する二辺がそれぞれ自由端および固定端の長方形板 (第 20 図)

境界条件および次に示す項目以外は例題 1 と同様

第 18 図 フェースの主応力

第 19 図 コアのせん断応力 τ_c/q

第 20 図

理論値……設定温度 32°C
実験値……実験温度 34°C, 負荷後 40 分

第 21 図 中央面のたわみ

第22図 フェース(上側)の変位

理論値……設定温度 32°C

実験値……実験温度 28°C, 負荷後 40 分

第23図 フェースの主応力

である。

自由端の長さ = 60 cm, 固定端の長さ = 10 cm

 $G_c = 18.0 \text{ kg/cm}^2$ (ビニコルク, A-7, 32°C) $h = 2.5 \text{ cm}, k = 10 \text{ cm}$

(18) 式を自由端および固定端の境界条件のもとに解く。その結果を第 21~24 図に示す。また本例題に対する実験状況を第 25 図に示す。

これらの図より理論値と実験値とは割合よく一致していることがわかる。

5. 結 語

本論文において示された計算法は、従来の計算法においては解析しえなかった任意形の、任意荷重および組合わされた境界条件の板に対しても応用でき、しか

第24図 コアのせん断応力

対辺自由端, 固定端の長方形板 3/5

第25図 たわみの測定実験

も応力分布まで解析できる利点がある。

また本論文で取扱った数種の例題における数値解析の結果は、実験や他の理論によって得られた結果とほぼ一致しており、実用的に十分な精度の解を求めることができたと思われる。

文 献

- (1) N.J. Hoff, NACA TN, No.2225 (1950), 1.
- (2) S. Timoshenko, *Theory of Elasticity*, (1951), 65, McGraw-Hill.
- (3) S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, (1940), 257, McGraw-Hill.
- (4) R.V. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, II. (1956), 264, Oxford.
- (5) Munitions Board Aircraft Committee, *Sandwich Construction for Aircraft*, Part II, ANC-23, (1951).
- (6) 池田, 日本航空学会誌 3-22, 23 (昭 30-11, 12), 289.

化学機械工業の実態調査

通産省ではこのほど、化学機械工業 858 社の実態調査をまとめた。

これは機械工業振興法に指定された業種を選び、その業種の実態を調査し、あわせて近代化、合理化ならびに育成のための基礎資料をうるのを目的の一環として行なわれたものである。その結果によると、(1) 企業規模は比較的小規模が多く、全体の 2/3 以上を占めている。(2) 昭和 36, 37 年の生産推移をみると、ほぼ横ばいを示しているなどが明らかになっている。

大要つぎのとおり。

企業の規模 = 資本金 1 億円未満の企業が全体の 78% で、従業者規模も 300 人未満が 78% である。従業者総数は 3 万 9 301 人で、このうち設計関係 13%、工場

現場関係 74%、その他 13% となっている。

生産状況 = 昭和 36 年および 37 年の各 1 箇年間の総生産額はそれぞれ 593 億円, 577 億円である。すなわち、昭和 37 年の生産高は 36 年のそれにくらべると約 3% の減少となっている。

製品別に 36 年に対する 37 年の生産高の増減をみると、とくに溶解機が 34%、精留機が 33%、加熱炉が 59% とそれぞれ順調な伸びを示しているに反し、圧搾機が 51%、蒸発機が 45%、ばい焼機が 48% とそれぞれ減少していることが注目される。

主要製品別の生産実績はろ過機が全体の 9%、熱交換器が 13%、反応機が 14% などである。

(服部敏夫)