539.377.096:539.21.01

移動熱源で加熱される無限円柱の熱応力*

牟岐鹿楼**, 秋山健二***, 仲野義和****, 万才健一*****

Thermal Stresses in an Infinite Circular Cylinder
Heated through Moving Heat Sourcesby Rokuro MUKI, Kenji AKIYAMA, Yoshikazu NAKANO,
and Kenichi BANZAI

This paper deals with the thermal stress analysis of an infinite circular elastic cylinder heated on the surface axisymmetrically through heat sources, which move at a constant velocity in the axial direction. The underlying heat conduction problem as well as the thermoelastic problem is attacked by the aid of complex Fourier transforms, assuming that the cylinder is homogeneous and isotropic with respect to both thermal and elastic response and the temperature distribution on the surface is prescribed. The general solutions for both temperature and stress distributions are obtained in the forms of infinite integrals. Numerical examples, which are carried out for two special distributions of temperature, show a marked influence of the velocity of the heat sources on the distribution of the thermal stresses.

1. 緒 言

無限板,あるいは無限柱が定速度で移動する熱源により連続的に加熱される,いわゆる準定常温度分布の問題は,溶接,切削,連続焼入れ,あるいはゲルマニウム材の局部加熱精製等と関係があるため,いろいろの角度から多くの研究が行なわれている.たとえば,移動点熱源で熱せられる二次元無限体⁽¹⁾,三次元無限体⁽²⁾,角柱⁽³⁾,板⁽⁴⁾等に対する解,また,軸上にある移動点熱源で熱せられる円柱⁽⁵⁾,円柱表面にある輪状熱源で熱せられる円柱⁽⁶⁾に対する解等があり,最近では,この種の準定常問題の解決に電子計算機を有効に利用した研究⁽⁷⁾,あるいは線状熱加工法と関連した実験的研究⁽⁸⁾がある.実際問題としては,移動熱源により生じた温度場による熱応力も重要である例が多いが,二次元熱応力問題を理論的に解析した例⁽⁹⁾が幾つか見られるのみで,無限円柱のような三次元熱応力問題を解析した例はまだ見当たらないように思われる.

本報では,無限中実円柱の表面温度が与えられたときの円柱内の準定常温度分布の一般解,および対応する熱応力問題の一般解を複素フーリエ変換を用いて求め,また二,三の例について数値計算を行なって,熱

源の移動速度の遅速が応力分布に及ぼす影響等をしらべた.

なお,無限円柱の非定常熱応力に関しては,Youngdahl と Sternberg⁽¹⁰⁾ の詳細な研究がある.

2. 温度分布の一般解

以下の問題では,熱源が一定速度 v で円柱上を軸方向に(正または,負の方向に)移動していると考えても,円柱が加熱炉内を一定速度 v で軸方向に(負または,正の方向に)移動していると考えても同じことである.加熱の際の表面条件としては,表面の温度分布が与えられているものとした.

ここで得られた結果を,表面条件が放散の場合等に拡張することは容易であるが,考えている半径 a の中実無限円柱の軸を z 軸にとり, z 軸の正の方向に速度 v で移動している円柱座標系 (r, θ, z) ,すなわち,熱源あるいは加熱炉に固定された座標系を用いる.この座標系で温度 T の基礎微分方程式を書く

$$\kappa \Delta T = -v \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

$$(0 \leq r < a, -\infty < z < \infty)$$

となる.ここで, κ は温度拡散率, Δ はラプラス演算子である.いま,温度 T は軸対称,準定常とし,かつ無次元量

$$\left. \begin{aligned} \rho &= r/a, \quad \zeta = z/a, \quad c = av/2\kappa, \\ T^*(\rho, \zeta) &= T(r, z)/T_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

を導入すると,(1)式は

* 昭和 37 年 10 月 29 日 第 40 期全国大会講演会において講演,原稿受付 昭和 38 年 5 月 7 日.

** 正員, 慶応義塾大学工学部(小金井市前原町 4 の 794).

*** 松下電器産業会社中央研究所.

**** 准員, 東芝機械会社.

***** 准員, 東京芝浦電気会社府中工場.

$$\Delta^* T^* + 2c \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$(0 \leq \rho < 1, -\infty < \zeta < \infty)$$

になる。ただし、

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \dots\dots\dots (4)$$

$\hat{T}^*(\rho, p)$ を $T^*(\rho, \zeta)$ の ζ に関する複素フーリエ変換とすると、 $T^*(\rho, \zeta)$ がある正則性の条件を満足している場合には、次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}^*(\rho, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} T^*(\rho, \zeta) e^{ip\zeta} d\zeta, \\ T^*(\rho, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}^*(\rho, p) e^{-ip\zeta} dp \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} e^{ip\zeta} d\zeta &= -ip \hat{T}^*(\rho, p), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \zeta^2} e^{ip\zeta} d\zeta &= -p^2 \hat{T}^*(\rho, p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

(5)式を用いると、 $\hat{T}^*(\rho, p)$ は(3)式に複素フーリエ変換をほどこして得られる常微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - (p^2 + 2icp) \right] \hat{T}^*(\rho, p) = 0 \dots\dots (6)$$

$$(0 \leq \rho < 1)$$

の解として求められる。(6)式を満足し、円柱内で有界な解は

$$\hat{T}^*(\rho, p) = t(p) \frac{I_0(q\rho)}{I_0(q)}, \quad q = \sqrt{p^2 + 2is p} \dots\dots (7)$$

である。ここで、 I_n は n 次の第1種変形ベッセル関数、 $t(p)$ は与えられた表面温度の複素フーリエ変換

$$t(p) = \hat{T}^*(1, p) \dots\dots\dots (8)$$

である。(5)式と(7)式から円柱内の温度分布は

$$T^*(\rho, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t(p) \frac{I_0(q\rho)}{I_0(q)} e^{-ip\zeta} dp \dots\dots (9)$$

と求められる。(9)式をそのまま実積分になおすためには、 $I_0(q\rho)$ を実部と虚部とに分離しなければならないが、それをさけるために複素平面上の周辺積分を利用して、(9)式を次の形に変形する(付録 A)。

$$T^*(\rho, \zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^c F(p) \frac{I_0(\beta\rho)}{I_0(\beta)} e^{-p\zeta} dp + \frac{1}{\pi} e^{-c\zeta} \int_0^\infty G(p) \frac{I_0(\gamma\rho)}{I_0(\gamma)} dp \dots\dots (10)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{p(2c-p)}, \quad \gamma = \sqrt{p^2 + c^2}, \\ F(p) &= \frac{1}{2i} [t_+(-pi) - t_-(-pi)], \\ G(p) &= \frac{1}{2} [t_+(p-ci)e^{-ip\zeta} + t_-(-p-ci)e^{ip\zeta}], \\ H(p) &= \frac{1}{2i} [t_+(p-ci)e^{-ip\zeta} - t_-(-p-ci)e^{ip\zeta}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $H(p)$ は応力の計算の際に必要な関数であり、 $t_+(w)$ は正の実軸上で $t(p)$ に、 $t_-(w)$ は負の実軸上で $t(p)$ に一致するように複素 w 平面上で定義される w の関数である。なお、(10)式において $c \rightarrow 0$ の極限を取れば定常温度分布を与える式になる。

3. 熱応力分布の一般解

熱変形のある場合、軸対称変形の際の応力式は2個の応力関数 Φ と Ω を使って次のように書くことができる⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r/2G &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} - 1 \right), \\ \sigma_\theta/2G &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - T \right), \\ \sigma_z/2G &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - T \right), \\ \tau_{rz}/2G &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 G は剛性率、 ν はポアソン比、 α は線熱膨張係数、また、 Φ は重調和関数、 Ω は次の偏微分方程式の一つの特解である。

$$\Delta \Omega = T \dots\dots\dots (13)$$

いま、(2)式で導入された無次元量、および

$$\left. \begin{aligned} \Phi^*(\rho, \zeta) &= \frac{1}{a^2(1+\nu)T_0} \Phi(r, z), \\ \Omega^*(\rho, \zeta) &= \frac{1}{a^2T_0} \Omega(r, z), \\ \sigma_r^*(\rho, \zeta) &= \sigma_r(r, z)/2\alpha(1+\nu)GT_0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

を用いて(12)式を書き換え、その結果に複素フーリエ変換をほどこすと次式を得る。以下、 $\wedge$ を付した量は、複素フーリエ変換をほどこして得られた式を表わすものとする。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_r^*(\rho, p) &= -ip \left(\nu \hat{\Delta}^* - \frac{d^2}{d\rho^2} \right) \hat{\Phi}^* + \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{d^2 \hat{\Omega}^*}{d\rho^2} - \hat{T}^* \right), \\ \hat{\sigma}_\theta^*(\rho, p) &= -ip \left(\nu \hat{\Delta}^* - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \hat{\Phi}^* + \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d \hat{\Omega}^*}{d\rho} - \hat{T}^* \right), \\ \hat{\sigma}_z^*(\rho, p) &= -ip [(2-\nu) \hat{\Delta}^* + p^2] \hat{\Phi}^* - \frac{1}{1-\nu} (p^2 \hat{\Omega}^* + \hat{T}^*), \\ \hat{\tau}_{rz}^*(\rho, p) &= \frac{d}{d\rho} [(1-\nu) \hat{\Delta}^* + p^2] \hat{\Phi}^* - \frac{1}{1-\nu} ip \frac{d \hat{\Omega}^*}{dp}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで, Φ が重調和関数であることと (13) 式から,
(2), (15)式を用いて次の関係を得る.

$$\hat{A}^* \hat{A}^* \hat{Q}^* = 0, \quad \hat{A}^* \hat{Q}^* = \hat{T}^* \dots (16)$$

ただし,

$$\hat{A}^* = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - p^2 \dots (17)$$

いま, $\hat{T}^*$ が (7) 式で与えられるものとする, (6)
と (16) 式から $\hat{\Phi}^*$, $\hat{Q}^*$ は次のように求められる.

$$\hat{\Phi}^*(\rho, p) = A I_0(p\rho) + B p \rho I_1(p\rho) \dots (18)$$

$$\hat{Q}^*(\rho, p) = -\frac{i}{2cp} \hat{T}^*(\rho, p) = -\frac{it(p)}{2cp} \frac{I_0(q\rho)}{I_0(q)} \dots (19)$$

$\hat{\Phi}^*$ の中にふくまれる A, B は円柱表面の応力条件を用いて p の関数として決定される.

いま, (18), (19) 式を (15) 式に代入して整理すると次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_r^*(\rho, p) &= ip^3 \left\{ \left[I_0(p\rho) - \frac{1}{p\rho} I_1(p\rho) \right] A(p) + [(1-2\nu) I_0(p\rho) + p\rho I_1(p\rho)] B(p) \right\} \\ &\quad - \frac{t(p)}{(1-\nu) I_0(q)} \left\{ \frac{q^2 i}{2cp} \left[I_0(q\rho) - \frac{I_1(q\rho)}{q\rho} \right] + I_0(q\rho) \right\}, \\ \hat{\sigma}_\theta^*(\rho, p) &= ip^3 \left[\frac{I_1(p\rho)}{p\rho} A(p) + (1-2\nu) I_0(p\rho) B(p) \right] - \frac{t(p)}{(1-\nu) I_0(q)} \left[I_0(q\rho) + \frac{qi}{2cp\rho} I_1(q\rho) \right], \\ \hat{\sigma}_z^*(\rho, p) &= -ip^3 \{ I_0(p\rho) A(p) + [p\rho I_1(p\rho) + 2(2-\nu) I_0(p\rho)] B(p) \} \\ &\quad + \frac{t(p)}{(1-\nu) I_0(q)} \frac{q^2 i}{2cp} I_0(q\rho), \\ \hat{\tau}_{rz}^*(\rho, p) &= p^3 \{ I_1(p\rho) A(p) + [p\rho I_0(p\rho) + 2(1-\nu) I_1(p\rho)] B(p) \} \\ &\quad - \frac{t(p)}{(1-\nu) I_0(q)} \frac{q}{2c} I_1(q) \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

円柱表面が無荷重であるとする,

$$\hat{\sigma}_r^*(1, p) = \hat{\tau}_{rz}^*(1, p) = 0 \dots (21)$$

(20) の第 1 および第 4 式を用いて, (21) 式から A, B を決定すると次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} A(p) &= \frac{t(p)}{2(1-\nu)cp^3 D(p)} \left\{ -p^2 [p I_0(p) + 2(1-\nu) I_1(p)] \right. \\ &\quad \left. + q \frac{I_1(q)}{I_0(q)} [2(1-\nu)p I_0(p) + (p^2 + 2 - 2\nu) I_1(p)] \right\}, \\ B(p) &= \frac{t(p)}{2(1-\nu)cp^3 D(p)} \left[p^2 I_1(p) - q \frac{I_1(q)}{I_0(q)} p I_0(p) \right] \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

ただし,

$$D(p) = (p^2 + 2 - 2\nu) I_1^2(p) - p^2 I_0^2(p) \dots (23)$$

(22) 式を (20) 式に代入すれば, 変換面における応力は完全に決定され, その結果を (5) 式の第 2 式を使って逆変換すれば, 物理面における応力が求められるわけである. 応力関数 Φ から導かれる項 [(20) 式の中で, A, B のかかっている項] を実積分に書きなおす際, ベッセル関数の引き数が $p\rho$ のものは,

$$I_n(-p\rho) = (-1)^n I_n(p\rho) \dots (24)$$

の公式を使えばよいが, $q I_1(q)/I_0(q)$ の項は, これを実部と虚部とに分離しておく必要がある. いま, 公式⁽¹⁸⁾

$$(\lambda x)^n I_n(\lambda x) = \lambda^{2n} x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left[\frac{1-\lambda^2}{2} x \right]^m I_{n+m}(x) \dots (25)$$

において

$$\lambda = \frac{q}{p} = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 + 2icp}, \quad x = p \dots (26)$$

とおけば, (25) 式は

$$q^n I_n(q) = (p + 2ic)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} c^m I_{n+m}(p) \dots (27)$$

となり, $q^n I_n(q)$ は比較的簡単な形で実部と虚部とに分離される. いま, $R_e[]$, $\mathcal{I}_m[]$ は, それぞれ $[]$ 内の実部, および虚部を示すものとし

$$\left. \begin{aligned} K_n(p) &= R_n[q^n I_n(q)], \quad L_n(p) = \mathcal{J}_m[q^n I_n(q)] \\ M(p) &= R_n \left[\frac{q I_1(q)}{I_0(q)} \right] = \frac{K_0 K_1 + L_0 L_1}{K_0^2 + L_0^2} \\ N(p) &= \mathcal{J}_m \left[\frac{q I_1(q)}{I_0(q)} \right] = \frac{K_0 L_1 - K_1 L_0}{K_0^2 + L_0^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

とすると, (27)式から次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} K_0(p) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m c^{2m}}{(2m)!} I_{2m}(p), \quad L_0(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m c^{2m+1}}{(2m+1)!} I_{2m+1}(p), \\ K_1(p) &= p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} c^{2m} I_{2m+1}(p) - 2c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} c^{2m+1} I_{2m+2}(p), \\ L_1(p) &= 2c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} c^{2m} I_{2m+1}(p) + p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} c^{2m+1} I_{2m+2}(p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

さらに,

$$\left. \begin{aligned} t^{(1)}(p) &= R_n[t(p)], \quad t^{(2)}(p) = \mathcal{J}_m[t(p)], \\ X(\rho, p) &= \frac{I_0(\rho p)}{I_0(p)}, \quad Y(\rho, p) = \frac{I_1(\rho p)}{I_0(p)}, \\ Y_0(p) &= Y(1, p), \quad Z(p) = \frac{D(p)}{I_0^2(p)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

を導入し, $M, X, t^{(1)}, Z$ は p の偶関数, $N, Y, Y_0, t^{(2)}$ は p の奇関数であることに注意し, 応力関数 Φ から導かれる応力式の実積分の表現を求め, また, 応力関数 Ω から導出される項 [(20) 式の中で $t(p)$ のかかっている項] は温度分布式(10)を求めたのと同じ方法で実積分の表現を求めて両者を加え合わせると, 物理面における応力として次式を得る.

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(\rho, \zeta) &= \frac{1}{(1-\nu)c\pi} \int_0^\infty \left\{ p^2 \left[[p+2(1-\nu)Y_0] \left[X - \frac{Y}{\rho p} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Y_0[(1-2\nu)X + \rho p Y] \right\} \{ t^{(2)} \cos p\zeta - t^{(1)} \sin p\zeta \} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -[2(1-\nu)p + (p^2+2-2\nu)Y_0] \left[X - \frac{Y}{\rho p} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p[(1-2\nu)X + \rho p Y] \right\} \{ Nt^{(1)} + Mt^{(2)} \} \cos p\zeta \right. \\ &\quad \left. - (Mt^{(1)} - Nt^{(2)}) \sin p\zeta \right\} \frac{dp}{Z(p)} \\ &\quad - \frac{1}{\pi(1-\nu)} \int_0^c F(p) \left\{ I_0(\beta\rho) - \frac{\beta^2}{2cp} \left[I_0(\beta\rho) - \frac{I_1(\beta\rho)}{\beta\rho} \right] \right\} \frac{e^{-p\zeta}}{I_0(\beta)} dp \\ &\quad - \frac{e^{-c\zeta}}{\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \left\{ G(p) I_0(\gamma\rho) - \frac{\gamma^2}{2c(p^2+c^2)} [cG(p) + pH(p)] \right. \\ &\quad \left. \times \left[I_0(\gamma\rho) - \frac{I_1(\gamma\rho)}{\gamma\rho} \right] \right\} \frac{dp}{I_0(\gamma)}, \\ \sigma_\theta^*(\rho, \zeta) &= \frac{1}{(1-\nu)c\pi} \int_0^\infty \left\{ p^2 \left[[p+2(1-\nu)Y_0] \frac{Y}{\rho p} - (1-2\nu)Y_0 X \right] \right. \\ &\quad \left. \times \{ t^{(2)} \cos p\zeta - t^{(1)} \sin p\zeta \} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -[2(1-\nu)p + (p^2+2-2\nu)Y_0] \frac{Y}{\rho p} + (1-2\nu)pX \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \{ (Nt^{(1)} + Mt^{(2)}) \cos p\zeta - (Mt^{(1)} - Nt^{(2)}) \sin p\zeta \} \right\} \frac{dp}{Z(p)} \\ &\quad - \frac{1}{(1-\nu)\pi} \int_0^c F(p) \left[I_0(\beta\rho) - \frac{\beta}{2cp} I_1(\beta\rho) \right] \frac{e^{-p\zeta}}{I_0(\beta)} dp \\ &\quad - \frac{e^{-c\zeta}}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty \left\{ G(p) I_0(\gamma\rho) - \frac{\gamma}{2c(p^2+c^2)\rho} \right. \\ &\quad \left. \times [cG(p) + pH(p)] I_1(\gamma\rho) \right\} \frac{dp}{I_0(\gamma)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z^*(\rho, \zeta) = & \frac{-1}{(1-\nu)c\pi} \int_0^\infty \left[p^2 \{ [p+2(1-\nu)Y_0]X \right. \\
& - Y_0[2(2-\nu)X + \rho p Y] \} \{ t^{(2)} \cos p\zeta - t^{(1)} \sin p\zeta \} \\
& + \{ -[2(1-\nu)p + (p^2+2-2\nu)Y_0]X + p[2(2-\nu)X \\
& + \rho p Y] \} \{ (Nt^{(1)} + Mt^{(2)}) \cos p\zeta - (Mt^{(1)} - Nt^{(2)}) \sin p\zeta \} \left. \right] \frac{dp}{Z} \\
& - \frac{1}{(1-\nu)\pi} \int_0^c \frac{\beta^2}{2cp} F(p) \frac{I_0(\beta\rho)}{I_0(\beta)} e^{-p\zeta} dp \\
& - \frac{e^{-c\zeta}}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma^2}{2c(p^2+c^2)} [cG(p) + pH(p)] \frac{I_0(\gamma\rho)}{I_0(\gamma)} dp \\
\tau_{rz}^*(\rho, \zeta) = & \frac{1}{(1-\nu)c\pi} \int_0^\infty \left[-p^2 \{ [p+2(1-\nu)Y_0]X - Y_0[\rho p X \right. \\
& + 2(1-\nu)Y] \} \{ t^{(1)} \cos p\zeta + t^{(2)} \sin p\zeta \} \\
& + \{ [2(1-\nu)p + (p^2+2-2\nu)Y_0]X - p[\rho p X + 2(1-\nu)Y] \} \\
& \times \{ (Mt^{(1)} - Nt^{(2)}) \cos p\zeta + (Nt^{(1)} + Mt^{(2)}) \sin p\zeta \} \left. \right] \frac{dp}{Z} \\
& - \frac{1}{(1-\nu)\pi} \int_0^c \frac{\beta}{2c} F(p) \frac{I_1(\beta\rho)}{I_0(\beta)} e^{-p\zeta} dp \\
& - \frac{e^{-c\zeta}}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma}{2c} G(p) \frac{I_1(\gamma\rho)}{I_0(\gamma)} dp
\end{aligned} \tag{31}$$

上式で示されるように、 ρ, ζ の任意の値に対する応力の式はかなり繁雑であるが、円柱表面の応力式は、(20)式において $\rho=1$ とおき、(22)、(5)式の第2式を考慮して逆変換することにより、次のような比較的簡単な式で表わすことができる。

$$\begin{aligned}
\sigma_r^*(1, \zeta) = \tau_{rz}^*(1, \zeta) &= 0 \\
\sigma_\theta^*(1, \zeta) &= -\frac{1}{1-\nu} T^*(1, \zeta) + \frac{1}{(1-\nu)c\pi} \int_0^\infty [(1-\nu)Y_0 + \nu p] \\
&\quad \times \{ [(pY_0 - M)t^{(2)} - Nt^{(1)}] \cos p\zeta - [(pY_0 - M)t^{(1)} + Nt^{(2)}] \sin p\zeta \} \frac{dp}{Z} \\
\sigma_z^*(1, \zeta) &= -\frac{1}{1-\nu} T^*(1, \zeta) - \frac{1}{(1-\nu)c\pi} \int_0^\infty [(1-\nu)Y_0 - p] \\
&\quad \times \{ [(pY_0 - M)t^{(2)} - Nt^{(1)}] \cos p\zeta - [(pY_0 - M)t^{(1)} + Nt^{(2)}] \sin p\zeta \} \frac{dp}{Z}
\end{aligned} \tag{32}$$

(31)、(32)式において $c \rightarrow 0$ の極限をとると、定常温度分布による無限円柱の熱応力が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
\sigma_r^*(\rho, \zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ [Y_0 + p]Y_0X - \frac{1}{\rho} [(\rho^2 - 1)pY_0^2 + Y_0 + p]Y \right\} \{ t^{(1)} \cos p\zeta + t^{(2)} \sin p\zeta \} \frac{dp}{Z}, \\
\sigma_\theta^*(\rho, \zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ [(1+p^2)Y_0^2 - p^2]X - \frac{1}{\rho} [pY_0^2 - Y_0 - p]Y \right\} \{ t^{(1)} \cos p\zeta + t^{(2)} \sin p\zeta \} \frac{dp}{Z}, \\
\sigma_z^*(\rho, \zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{ [2Y_0 - p]Y_0X + \rho p Y_0^2 Y \} \{ t^{(1)} \cos p\zeta + t^{(2)} \sin p\zeta \} \frac{dp}{Z} \\
\tau_{rz}^*(\rho, \zeta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{ \rho p Y_0^2 X - p Y_0 Y \} \{ t^{(2)} \cos p\zeta - t^{(1)} \sin p\zeta \} \frac{dp}{Z}
\end{aligned} \tag{33}$$

また、表面では

$$\begin{aligned}
\sigma_r^*(1, \zeta) = \tau_{rz}^*(1, \zeta) &= 0 \\
\sigma_\theta^*(1, \zeta) &= -\frac{1}{1-\nu} T^*(1, \zeta) + \frac{1}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty [(1-\nu)Y_0 + \nu p][Y_0^2 - 1][t^{(1)} \cos p\zeta + t^{(2)} \sin p\zeta] \frac{pdp}{Z} \\
\sigma_z^*(1, \zeta) &= -\frac{1}{1-\nu} T^*(1, \zeta) - \frac{1}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty [(1-\nu)Y_0 - p][Y_0^2 - 1][t^{(1)} \cos p\zeta + t^{(2)} \sin p\zeta] \frac{pdp}{Z}
\end{aligned} \tag{34}$$

4. 計算例

第1例：表面温度が階段的に変化する場合 表面温度が次式で与えられているものとする。

$$T^*(1, \zeta) = h(-\zeta) \dots \dots \dots (35)$$

ただし、 $h(x)$ は次式で定義される階段関数である。

$$h(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \dots \dots \dots (36)$$

(35)式の複素フーリエ変換を計算すると⁽¹²⁾

$$t(p) = \hat{T}^*(1, p) = \pi \delta(p) - \frac{i}{p} \dots \dots \dots (37)$$

ここで、 $\delta(p)$ はいわゆるデルタ関数で、次の性質を持っている。

$$\left. \begin{aligned} \delta(p) &= 0 \quad (p \neq 0), \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \delta(p) dp &= f(0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

(37)式の中にふくまれる $\pi \delta(p)$ による温度 T^* に対する寄与は(9), (38), (7)式および

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n [1 + O(x^2)] \quad (x \rightarrow 0) \dots \dots \dots (39)$$

を用いれば、 ρ, ζ に無関係に $1/2$ であることがわかる。同様の検討を応力に対して行なうと、(37)式の $\pi \delta(p)$ は応力値に対して全く寄与しないことがわかる。したがって、温度分布を求める場合には(37)式の第2項から導かれる式に $1/2$ を加え、応力分布を求める場合には(37)式の第1項を無視して計算を行なえばよい。

(37)式と(11)式および $t_+(w), t_-(w)$ の定義から

第1図 $c=0$ の場合の等温線

第2図 $c=1$ の場合の等温線

$$\left. \begin{aligned} t_+(w) &= t_-(w) = -\frac{i}{w}, \\ F(p) &= 0, \\ G(p) &= -\frac{1}{p^2 + c^2} (p \sin p\zeta - c \cos p\zeta), \\ H(p) &= -\frac{1}{p^2 + c^2} (p \cos p\zeta + c \sin p\zeta) \end{aligned} \right\} \dots \dots (40)$$

また、(37)式と(30)式から

$$t^{(1)}(p) = 0, \quad t^{(2)}(p) = -\frac{1}{p} \dots \dots \dots (41)$$

(40), (41) 式を (10), (31) 式に代入すれば、円柱内の温度分布、および応力分布が無限積分の形で求まる。特に表面の応力が計算したい場合には、(41)式を(32)式に代入すればよい。

この例においては、留数計算を用いて温度分布を次のような無限級数の形に書くこともできる(付録B)。

$$\begin{aligned} T^*(\rho, \zeta) &= h(-\zeta) - \exp(-c\zeta) \left[c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \rho)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} \right. \\ &\quad \times \frac{\exp(-\sqrt{\alpha_n^2 + c^2} |\zeta|)}{\sqrt{\alpha_n^2 + c^2}} \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \rho)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} \\ &\quad \left. \times \exp(-\sqrt{\alpha_n^2 + c^2} |\zeta|) \right] \dots \dots \dots (42) \end{aligned}$$

ただし、 α_n は

$$J_0(\alpha_n) = 0 \dots \dots \dots (43)$$

の第 n 番めの正根、 $\operatorname{sgn}(x)$ は次式で定義される関数である。

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \dots \dots \dots (44)$$

第1～3図は、 $c=0, 1, 2$ の場合の円柱軸をふくむ平面内における等温線を示している。数値計算は(42)式を用いて行なった。なお、 $c=0$ の場合は定常温度分布である。第4, 5図は、 $c=0, 1$ の場合の表面および軸上の温度分布、および表面の応力分布を示している。数値計算においては $\nu=0.28$ として計算を行なった。 $c=1$ の場合の応力分布は、 σ_θ, σ_z とも、 $c=0$ の場合に比べて圧縮側に大きく移動している。このことは対応する温度分布の状態(第1図および第

第3図 $c=2$ の場合の等温線

2図) からある程度予想できる. 極限の場合として熱源の移動速度 (すなわち c) が ∞ になった場合の $\zeta=0$ の付近の状態を考えると, $\zeta<0$ の側の表面の薄い層では $T^*=1$ となり, 他の場所では温度 0 になっている. この場合の応力は, 熱変形を考慮したフックの法則から直ちに

$$\sigma_{\theta}^*(1, \zeta) = \sigma_z^*(1, \zeta) = \begin{cases} -\frac{1}{1-\nu} & (\zeta < 0) \\ 0 & (\zeta > 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(45)$$

と求められる. このことから, $c=1$ のときの表面

第4図 $c=0$ の場合の温度と応力の分布

第5図 $c=1$ の場合の温度と応力の分布

第6図 $T^*=0.9$ になる最大深さ h

応力が $c=0$ のときに比して圧縮側に移動することが説明される.

第6図は, 表面を部分的に加熱した場合の加熱幅 d と, 温度が表面の最高温度の 0.9 倍に達する深さ h との関係を示したものである. この問題に対する解は, (42)式を適当に組合わせることによって作ることができる. 第6図は, 移動速度が速くなるにつれて, また, 加熱幅が小さくなるにつれて $T^*=0.9$ に達する最大深さが減少して行くことを示している.

第2例: 表面温度が

$$T^*(1, \zeta) = \frac{k^2}{k^2 + \zeta^2} \quad \dots\dots\dots(46)$$

で与えられている場合を考える. (46)式の複素フーリエ変換は

$$t(p) = \hat{T}^*(1, p) = \pi k e^{-k|p|} \quad \dots\dots\dots(47)$$

と求められる. (47)式と(11)式および $t_+(w)$, $t_-(w)$ の定義から

$$\left. \begin{aligned} t_+(w) &= \pi k e^{-kw}, & t_-(w) &= \pi k e^{kw} \\ F(p) &= \pi k \sin kp, \\ G(p) &= \pi k e^{-kp} \cos(kc - p\zeta), \\ H(p) &= \pi k e^{-kp} \sin(kc - p\zeta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(48)$$

また, (47)式と(30)式から

$$t^{(1)}(p) = \pi k e^{-k|p|}, \quad t^{(2)}(p) = 0 \quad \dots\dots\dots(49)$$

第7図 $c=0$ の場合の温度と応力の分布

第8図 $c=1$ の場合の温度と応力の分布

(48), (49)式を(10), (31)式に代入すれば, 円柱内の温度分布および応力分布が, また, (48)式を(32)式に代入すれば表面の応力分布がそれぞれ無限積分の形で表わされる.

第7, 8図は $k=1/2$, $\nu=0.28$ としたとき, $c=0, 1$ の場合について, 表面および軸上の温度分布, および表面の応力分布を計算した結果を示している. この場合も, 第1例と同様に, $c=1$ の場合の応力分布は $c=0$ の場合に比べて圧縮側に移動している. しかし, σ_{θ}^* は $c=0$ のとき ζ の正の側で負であったものが, $c=1$ のときには正の部分があらわれてくる. 最大応力は $c=1$ の場合のほうが $c=0$ の場合に比べて減少している.

以上の2例の無限積分の数値計算に際しては, $p=0$ から12までの間を0.2おきに分割してFilonの公式⁽¹⁴⁾を用いて電子計算機により数値積分し, $p=12$ から ∞ まではベッセル関数の漸近公式⁽¹³⁾を用いて所要の積分の漸近展開を求めて計算した. なお, 数値計算に必要な変形ベッセル関数の値はBritish Associationの数表⁽¹⁵⁾から求めた.

最後に数値計算に協力された久持典子君, 田島花子君に感謝いたします.

付録A 温度分布式(10)の導出

複素 w 平面上で関数 $t_+(w)$ および $t_-(w)$ をそれぞれ正の実軸および負の実軸上で $t(p)$ に一致し, $\delta > \delta_m(w) > -c - \delta$ ($\delta > 0$) の範囲内で, それぞれ右, 左半平面で正則であるように選ぶ. さらに第9図に示される二つの積分路を考え, 積分路 ABCD 上では積分

$$\frac{1}{2\pi} \oint t_+(w) \frac{I_0(\sqrt{w^2+2ciw}\rho)}{I_0(\sqrt{w^2+2ciw})} e^{-i\zeta w} dw \quad \dots\dots (50)$$

を, 積分路 D'C'B'A' 上では積分

$$\frac{1}{2\pi} \oint t_-(w) \frac{I_0(\sqrt{w^2+2ciw}\rho)}{I_0(\sqrt{w^2+2ciw})} e^{-i\zeta w} dw \quad \dots\dots (51)$$

を考える. これらの積分は積分路内に特異点を持っていないからその値は0である.

ここで, p を実変数とすると
AB, および A'B' 上では

第9図 積分路

$$\left. \begin{aligned} w=p, \sqrt{w^2+2ciw}=q & \quad (-R < p < R) \\ \text{BC, および B'C' 上では} \\ w=-pi, \sqrt{w^2+2ciw}=\sqrt{p(2c-p)} & \quad (0 < p < c) \\ \text{CD 上では} \\ w=p-ci, \sqrt{w^2+2ciw}=\sqrt{p^2+c^2} & \quad (0 < p < R) \\ \text{C'D' 上では} \\ w=-p-ci, \sqrt{w^2+2ciw}=\sqrt{p^2+c^2} & \quad (0 < p < R) \end{aligned} \right\} (52)^*$$

となることに注目すれば, A'B', AB 上の被積分関数は温度分布式(9)の被積分関数と一致し, また BC, B'C', CD, C'D' 上の被積分関数の中のベッセル関数の引き数はすべて実数となる. ここで, $R \rightarrow \infty$ の極限をとり, A'B', AB 上の積分を適当に加えれば温度分布式(9)になり, また, 積分(50), (51)に対する DA, D'A' 上からの寄与は消失する. 以上の方針にしたがって計算すれば, 温度分布式(9)が(10)式のように変形される. なお, $t(p)$ の中にデルタ関数等がふくまれる場合には, その寄与を別個に計算しなければならない.

付録B 温度分布式(42)の導出

(37)式の $t(p)$ を温度分布式(9)に代入すると

$$T^*(\rho, \zeta) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{I_0(q\rho)}{I_0(q)} e^{-i\zeta p} dp \quad \dots\dots (53)$$

となる. (53)式の右辺の積分を計算するために, $\zeta \geq 0$ のところでは積分

$$-\frac{i}{2\pi} \oint \frac{1}{w} \frac{I_0(\sqrt{w^2+2ciw}\rho)}{I_0(\sqrt{w^2+2ciw})} e^{-i\zeta w} dw \quad \dots\dots (54)$$

を第10図で示される複素 w 平面の下半平面内の積分路上で考え, $\zeta \leq 0$ のところでは積分

$$\frac{i}{2\pi} \oint \frac{1}{w} \frac{I_0(\sqrt{w^2+2ciw}\rho)}{I_0(\sqrt{w^2+2ciw})} e^{-i\zeta w} dw \quad \dots\dots (55)$$

を上半平面の積分路上で考える. ここで(54), (55)式で与えられる積分への実軸上からの寄与は $\epsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow$

第10図 積分路

* $\sqrt{w^2+2ciw}$ は2価関数であるが, (50)式あるいは(51)式の被積分関数は1価関数であるから $\sqrt{w^2+2ciw}$ の分岐点を考慮する必要はない.

∞ のとき (53) 式の右辺の積分に帰着し, また大半円上からの寄与は $R \rightarrow \infty$ のとき零になることに注意すれば, 周辺積分 (54), (55), したがって (53) 式の右辺の積分を計算するためには, それぞれの積分路内の極における留数の和と, $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの小円周上からの寄与を計算すればよいことになる. (54) 式または (55) 式の被積分関数の極は

$$I_0(\sqrt{w^2 + 2ciw}) = 0 \quad \dots\dots\dots (56)$$

を満足する w の点に存在する. (56) 式の根は虚軸上にのみ存在し, α_n を (43) 式で与えられる 0 次のベッセル関数の n 番めの正根とすると

$$\sqrt{w^2 + 2ciw} = \pm i\alpha_n \quad \dots\dots\dots (57)$$

で与えられる. (57) 式を w について解くと

$$w = i[\pm \sqrt{c^2 + \alpha_n^2} - c] \quad \dots\dots\dots (58)$$

となり, これらの極における留数を各積分路内で求め, 前述の方針に従って計算すれば (10) 式を得る.

また, 表面条件がニュートンの冷却の法則にしたがい, 円柱の接している流体の温度が (35) 式の右辺で与えられている場合の解も, 全く同様の方針で次のように求められる.

$$\begin{aligned} T^*(\rho, \zeta) = & h(-\zeta) \\ & - ah \exp(-c\zeta) \left[c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \rho)}{(\alpha_n^2 + a^2 h^2) J_0(\alpha_n)} \right. \\ & \times \frac{\exp(-\sqrt{\alpha_n^2 + c^2} |\zeta|)}{\sqrt{\alpha_n^2 + c^2}} \\ & \left. - \operatorname{sgn}(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \rho)}{(\alpha_n^2 + a^2 h^2) J_0(\alpha_n)} \right. \\ & \left. \times \exp(-\sqrt{\alpha_n^2 + c^2} |\zeta|) \right] \quad \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

ただし, h は円柱表面と流体との間の熱放散係数で, α_n は

$$\alpha_n J_1(\alpha_n) = ah J_0(\alpha_n) \quad \dots\dots\dots (60)$$

の第 n 番めの正根である.

(59) 式の解で ζ 軸を負の方向に b/a だけ移動して得られる式を, (59) 式から引いてやれば軸方向のある有限な幅 b の間で温度 T_0 の流体に接し, それ以外

のところでは温度零の流体に接している円柱の温度分布を示す式が得られる. このようにして得られた式で, 幅 b の加熱面から円柱内に流入する熱量を一定値 Q_0 に保つようにしながら, $b \rightarrow 0$ の極限をとると, 輪上熱源が円柱上を速度 v で移動するときの円柱内の温度分布が次のように求められる.

$$\begin{aligned} T(\rho, \zeta) = & \frac{Q_0}{2\pi\kappa} \exp(-c\zeta) \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n \rho) e^{-\sqrt{\alpha_n^2 + c^2} |\zeta|}}{(\alpha_n^2 + a^2 h^2) \sqrt{\alpha_n^2 + c^2} J_0(\alpha_n)} \quad \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

(61) 式は全く異なった方法で笠原氏により求められた結果⁽⁶⁾に一致する.

文 献

- (1) N.S. Boulton & H.E. Lane Martine, *Proc. Inst. Mech. Engr.*, **133** (1936), 336.
- (2) 笠原, 機械学会第 26 期定時総会講演会 (昭 24-4-4) において発表.
- (3) 清水, 機械学会誌, **45**-305 (昭 17-8), 518.
- (4) D. Rosenthal, *Trans. ASME*, **68** (1946), 849.
- (5) D. Rosenthal & R.H. Cameron, *Trans. ASME*, **69** (1947), 961.
- (6) E. Kasahara, *Proc. Fac. Engng., Keio Univ.*, **6**-32 (1956), 13.
- (7) 中田・橋本, 機械学会論文集, **28**-189 (昭 37-5), 577.
- (8) 橋本・ほか 2 名, 石川島技報, **13**-40 (昭 31), 70.
- (9) H. Parkus, *Instationäre Wärmespannungen*, (1959), 76, Springer.
- (10) C.K. Youngdahl & E. Sternberg, *Trans. ASME, Ser. E*, **28**-1 (1961), 25.
- (11) たとえば
牟岐, 機械学会論文集, **22**-123 (昭 31-11), 795; I.N. Sneddon & R. Hill (edited), R. Muki, *Progress in solid mechanics*, **1** (1960), 397, North-Holland Pub. Co.
- (12) I. N. Sneddon, *Fourier transforms*, (1951), 406, McGraw-Hill.
- (13) ベッセル関数の諸性質に関しては, たとえば
W. Magnus & F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, (1948), 25, Springer.
- (14) たとえば
C.J. Tranter, *Integral Transforms*, 2nd ed. (1956), 67.
- (15) British Assoc. for the Advancement of Science, *Bessel Functions*, Part II. (1952), Cambridge Univ. Press.