621.664.01

歯車ポンプの容量と有効仕事量とを求める 公式とその歯形設計への応用*

五百井 仁**, 富 樫 栄***

Formulae to Obtain Capacity and Effective Work of Positive Displacement Pumps and their Applications to Design of Tooth Contour

by Hitosi Iyoi and Sakae TOGASHI

By the use of a characteristic function introduced in the last paper, the authors obtained two new formulae, the one is that of delivery rate and the other, of effective work ratio of positive displacement pumps. Formula of delivery rate simplifies those conventionally used. By the aid of these two expressions, an advantageous contour of rotors can be designed. Some examples are shown how to construct a tooth profile for the purpose of raising both delivery rate and effective work ratio at the same time. The formulae shown here are useful for spur type and also for helical type which has toothed rotors of different radii. It may not be applicable to general transmission gears of parallel axis, unless the expressions of torque which were introduced here for gear pump might be modified.

1. 序 文

さきに発表した歯車ポンプの歯形の研究⁽¹⁾では、母関数 $\chi(y)$ またはその積分として定義される特徴関数 $\Phi(t)$ が、歯形の研究において基礎的役割を演ずることをのべたが、ここではその応用として歯車ポンプの容量を求める公式、ならびに摩擦損失を考えた場合の有効仕事率を求める公式を導き、これらを用いて容量ならびに有効仕事率を増大する歯形を求める方法をのべ、例によりこれをしめた。

すなわち吐出し性能をたかめるためには、ラック歯形の形状がピッチ点を除きその近くで局所干渉をさける条件式 $y\chi(y) < R$ (R は共通のピッチ円半径), および $2 \int_0^1 y\chi(y)dy = 1$ (歯末および歯元の端点で連続接触をなす条件式) をみたす範囲で $y\chi(y)$ の値を大きくし、歯末、歯元の端点近くで $\chi(y)$ が零になることが好ましい。また有効仕事率を増すためには摩擦仕事率を求める式にふくまれる積分が収束する条件 $\lim_{y \rightarrow 1} \chi(y) = 0$ がみたされることが必要であることが判明した。なおここにしめた上記二つの公式はいずれもすぐば歯車の場合であるが、はずばまたはやまば歯車の

場合にも応用できる。一方有効仕事率を求める方法は、伝導用歯車においてはここでしめた歯車ポンプの場合のトルクの値はそのままでは用いることはできないが、この値を別に考えれば有効であろう。

2. 歯車ポンプの吐出し量比公式

歯車ポンプの吐出し量を求める公式はインボリュート歯車に関しては内外の学者により数多く求められている⁽²⁾。一般の連続接触歯車ポンプに関してはつぎの基礎式があり、これから出発して求められている。

$$dV/d\varphi = (R_0^2 - R^2 - r^2)b \dots\dots\dots (1)^\dagger$$

ここに V は吐出し量, φ は歯車の回転角, R_0 は歯の外径, r, θ は接触点軌跡上の点の極座標 (θ は車軸中心線から時計と反対方向のむきを正として測った偏角, r は動径)(第1図参照), b は歯車の幅。(1)式より

$$V = b(R_0^2 - R^2) \int d\varphi - b \int r^2 \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{d\theta} d\theta \dots\dots (2)$$

$d\varphi/dr = 1/(R \sin \theta)$ を用いて吐出し量比 $\bar{V}$ を求めると

$$\bar{V} = V/R^2b = R^{-2} \left[2\pi(R_0^2 - R^2) - \frac{4\pi}{R} \int_0^{\pi/2} r^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{dr}{d\theta} d\theta \right] \dots\dots\dots (3)$$

* 昭和 37 年 9 月 7 日 第 12 回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和 38 年 5 月 24 日。

** 正員, 千葉工業大学(習志野市谷津町 7 の 1719)。

*** 千葉工業大学。

† 付録[1]参照。

$$\overline{O_1H_1} \text{ に働くトルク } T_{11} = \frac{1}{2}P \cdot \overline{O_1H_1}^2 = \frac{1}{2}PR_0^2$$

$$\overline{O_1A} \text{ に働くトルク } T_{12} = \frac{1}{2}P \cdot \overline{AO_1}^2 = \frac{1}{2}P(R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)$$

より

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= T_{11} - T_{12} = \frac{1}{2}(R_0^2 - R^2 - r^2 + 2rR \cos \theta)P \\ \text{同様にして 2-車に働くトルク } T_2 &\text{ は} \\ T_2 &= \frac{1}{2}(R_0^2 - R^2 - r^2 - 2rR \cos \theta)P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(ii) 有効仕事量 (W) 単位幅半ピッチ当りの有効仕事量 W は (10) 式に $R_0 = R + 1$ を用いて 2 章 (6)' 式に注意してつぎの式で求められる(半ピッチをとったのは駆動力は半ピッチだけであるから)。

$$\begin{aligned} W &= 2 \int_0^{\pi/2} (T_1 + T_2) d\varphi = 2P \int_0^1 (1 + 2R - r^2) \frac{1}{2R} \frac{ds}{\sqrt{s - \Psi(s)}} \\ &= \frac{2P}{R} [2Rp + (p - k)] = P \frac{4pz + \frac{\pi}{p}(p - k)}{z} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

(p, k は 2 章 (8), (9)' 式であたえられる)

(iii) 摩擦仕事量 接触点で 1-車および 2-車の歯面に垂直に作用する力を F_1 および F_2 とすると

$$F_1 = T_1/R \sin \theta, \quad F_2 = T_2/R \sin \theta$$

1-車および 2-車の対応する線素を ds_1 および ds_2 とすると

$$ds_1 = \left(1 + \frac{y\chi(y)}{R}\right) \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{dy/dx} dy^{(6)} = \left(1 + \frac{1}{2R} \frac{dr^2}{dy}\right) \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

同様に

$$ds_2 = \dots\dots\dots = \left(1 - \frac{1}{2R} \frac{dr^2}{dy}\right) \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

したがって

$$ds_1 - ds_2 = \frac{1}{R} \frac{dr^2}{dy} \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{1}{R} \frac{r dr^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

半ピッチ当りの摩擦仕事量を A とすると油の摩擦係数を μ として

$$\begin{aligned} A &= \mu \int F_1(ds_1 - ds_2) + \mu \int F_2(ds_2 - ds_1) \\ &= \frac{\mu}{R^2} \int_0^1 P(1 + 2R - s) \frac{s ds}{s - \Psi(s)} = \frac{2\mu P}{R^2} [2Rp' + p' - k'] = \mu P \frac{\pi}{2p} \frac{4p'z + \frac{\pi}{p}(p' - k')}{z^2} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここに

第 1 表 各種歯形の吐出し量比 $\bar{V}$ ($z=3$)

$$\chi(y) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}(1-y)^m, \quad \chi(y) = \frac{2+\lambda}{\lambda}(1-y^\lambda) \quad (\theta_1=24^\circ) \text{ i.e. } (\sqrt{\lambda}=0.4067)$$

$\chi(y)$	$3(1-y)$	$6(1-y)^2$	$15(1-y)^4$	$21(1-y)^5$	$2(1-y^2)$	$15(1-y^{1/7})$		$\frac{2}{\lambda^2}(\lambda - y^2), 0 < y < \sqrt{\lambda}$ 0 $\sqrt{\lambda} \leq y \leq 1$
m, λ	1	2	4	5	2	1/7	$\lambda \rightarrow 0$	
α_0	35°16'	24°5'	14°58'	12°36'	45°	14°58'		16°44'
p	1.414 21	1.191 33	1.077 35	1.056 12	1.570 79	1.275 86	1.253 31	1.050 5
$1/p$	0.707 11	0.839 40	0.928 23	0.946 86	0.636 62	0.783 78	0.797 88	0.951 9
a	2.220 44	2.637 05	2.915 95	2.974 56	2.000 00	2.462 33	2.506 63	2.990 6
b	0.763 52	1.109 89	1.387 75	1.461 40	0.625 00	0.932 55	0.965 71	1.560 3
$\bar{V}$	5.183 50	6.297 94	7.075 54	7.245 07	4.625 11	5.808 11	5.924 03	7.352 7
ラック歯形	放物線	双曲線関数	だ円関数		正弦曲線			正弦曲線修正形

$$p' = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{s ds}{s - \Psi(s)}, \quad k' = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{s^2 ds}{s - \Psi(s)}$$

(iv) 有効仕事率 有効仕事率は $W/(W+A) = 1/\{1+(A/W)\}$ であたえられるから A/W (摩擦仕事率) が小さいほど有効仕事率は大きい。

(11), (12) 両式より

$$A/W = \frac{\mu}{R} \frac{2Rp' + p' - k'}{2Rp + p - k} = \frac{\mu}{z} \frac{cz + d}{az + b} \dots\dots (13)$$

ここに

$$a = \pi/p, \quad b = (\pi^2/4p^3)(p-k), \quad c = \pi^2 p'/2p^3, \\ d = (\pi^3/8p^4)(p'-k')$$

さて歯形によっては (13) 式右辺の係数 c, d にふくまれる p' および k' の積分が収束する場合と発散する場合とがある。発散する場合は収束する場合に比し当然摩擦損失量が大きくなると考えられるから、歯形を適当に修正することが望ましい。それでは一般的にどのような条件があれば収束するか、つぎにその条件を求めよう。

(v) 摩擦仕事率が収束するための条件

$$p' = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{s}{s-t} ds, \quad k' = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{s^2}{s-t} ds; \\ s = \int_0^t \chi(\sqrt{t}) dt$$

積分 p' が収束するときは k' も収束するから p' の収束条件を求めれば十分である。

p' が収束するためには

$$s=0 \text{ の近傍で } \frac{s-t}{s} \doteq c_1 s^\rho \\ (0 < c_1 \leq 1, \quad 0 \leq \rho < 1) \\ s=1 \text{ の近傍で } s-t \doteq c_2 (1-s)^\sigma, \\ (0 < c_2, \quad 0 \leq \sigma < 1)$$

であればよい。

このとき $s=0$ の近傍では

$$t/s \doteq 1 - c_1 s^\rho \\ \therefore \lim_{s \rightarrow 0} \frac{t}{s} = 1, \quad (0 < \rho < 1) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{t}{s} = 1 - c_1, \quad (\rho = 0)$$

したがって $\lim_{t \rightarrow 0} s/t \geq 1$, すなわち

$$\lim_{y \rightarrow 0} \chi(y) \geq 1 \dots\dots\dots (14)$$

ところが (14) 式は歯形曲線の存在条件にほかならないことは上記引用論文⁽¹⁾でのべた。

つぎに $s=1$ の近傍では

$$t \doteq s - c_2 (1-s)^\sigma$$

したがって

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1-t}{1-s} = \lim_{s \rightarrow 1} \left(1 + \frac{c_2}{(1-s)^{1-\sigma}} \right) = \infty$$

それゆえ

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-s}{1-t} = 0$$

すなわち

$$\lim_{y \rightarrow 1} \chi(y) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

すなわち摩擦仕事の積分が収束するための本質的な条件は (15) 式であたえられる。つぎにいくつかの例をあげよう。

例 1 発散例 サイクロイド歯形 $\chi(y) = 1/2y$, $\chi(1) = 1/2 \neq 0$, $\therefore$ 発散事実 $r^2 = 2 \int_0^y y \chi(y) dy = y$ より $s = \sqrt{t}$, $t = s^2$. したがって

$$p' = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{s}{s-s^2} ds = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{1-s} = \infty$$

例 2 収束例 正弦曲線歯形 $\chi(y) = 2(1-y^2)$, $\chi(1) = 0$, $\therefore$ 収束 $r^2 = y^2(2-y^2)$ より

$$s = t(2-t) \\ \therefore p' = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t(2-t)}{t(2-t)-t} \times 2(1-t) dt \\ = \int_0^1 (2-t) dt = \frac{3}{2}$$

$$k' = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2(2-t)^2}{t(2-t)-t} \times 2(1-t) dt \\ = \int_0^1 t(2-t)^2 dt = \frac{11}{12}$$

例 3 欠だ円歯形の場合 ラック曲線の方程式は

$$(kx)^2 + (y+e)^2 = (1+e)^2$$

$x=0$, $y=1$ は歯末端点の座標 e は中心のピッチ線からの偏心量, このとき

$$r^2 = y^2 \left(1 - k^2 + \frac{k^2(1+e)^2}{(y+e)^2} \right) \\ \chi(y) = dr^2/dy^2 = (1-k^2) + \frac{k^2 e(1+e)^2}{(y+e)^3}$$

$\chi(1) = 1 - k^2/(1+e)$ であるから

$$k^2 = 1 + e \dots\dots\dots (16)$$

(16)式なる条件で欠だ円の長短比 k を定めると $\chi(1) = 0$ となる。ところが欠だ円歯形では $k \leq 1$ であるから $\chi(1) \neq 0$ となり, p', k' の積分は収束しない。

なお欠だ円形で (16) 式をみたすものについて p', k' を求めると次式となる。したがって有効仕事量が解析的に求められる。

$$p' = \frac{1}{2} + \frac{e}{2(1+e)} - e^2 \log \frac{1+e}{e} \\ + e(1+2e) \log \frac{2(1+e)}{1+2e} \\ k' = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e(1+e)^4 + e^5 + \frac{5}{2} e^3(1+e)^2 \\ - \frac{1}{4} e^2(1+e)^3 - \frac{7}{2} e^4(1+e) - \frac{1}{4} \frac{e^5}{1+e}$$

$$\begin{aligned}
& +[(1+e)^4 - e^4 + 2e(1+e)^3 \\
& - 2e^3(1+e)] \log \frac{2(1+e)}{1+2e} \\
& + e^2[e^2 - 3(1+e)^3 - e^2(1+e)] \log \frac{1+e}{e}
\end{aligned}$$

4. 歯形構成の原理

以上の理論的考察より既存の歯形の性能をしらべるとまずサイクロイド歯形と正弦曲線歯形とは同一のモジュールに対し歯たけは同一であるが吐出し量比, 有効仕事量の二点で正弦曲線歯形のほうがまさっている. 一方正弦曲線歯形と欠円歯形とは, 圧力角と歯たけの点ですなわち吐出し量比と法線荷重の点で欠円のほうがすぐれている. しかし摩擦損失が大きくこの点で正弦曲線歯形より劣っている. 欠だ円歯形は以上三つの歯形より吐出し性能が向上し, しかも欠円の欠点あるいは正弦曲線の長所ともいうべき摩擦仕事の積分が収束するという条件で歯形の設計が可能である.

歯形の選択は使用目的により異なる. たとえば吐出し量の大きいものを望むときは欠だ円歯形は第1表の最高のクラスに属することがわかる. すなわち非局所干渉の条件 $y\chi(y) < R$ と歯末および歯元の端点で連続

接触をなすに必要な条件 $2 \int_0^y y\chi(y)dy = 1$ の二つの制限内でピッチ点を除き, その近くで $y\chi(y)$ の値をできるだけ大きくすると同時に歯末, 歯元部分で $\chi(y) = 0$ となる条件で歯形を修正すればよい. これをはずば歯車の幅方向の同時接触線の形状につきいうと摩擦損失の点で好ましくない部分を切りとり, 軸に垂直な断面上でピッチ線上に中心をもつ円弧でこの同時接触線を結合することを意味する.

5. 局所干渉理論に基づく歯形修正法とその数値計算例

例Ⅰ インボリュート修正歯形(歯形-I)

$$\chi(y) = 1/\sin^2 \alpha_0 \quad (0 \leq y \leq \sin^2 \alpha_0), \quad \alpha_0: \text{圧力角}$$

$$= 0 \quad (\sin^2 \alpha_0 \leq y \leq 1)$$

$$\Psi(s) = \sin^2 \alpha_0 \cdot s \quad (0 \leq s \leq 1)$$

$$\begin{aligned}
p &= 1/\cos \alpha_0, \quad k = 1/3 \cos \alpha_0, \quad p' = 1/2 \cos^2 \alpha_0, \\
k' &= 1/4 \cos^2 \alpha_0, \quad a = \pi/\cos \alpha_0, \quad b = \pi^2 \cos^2 \alpha_0/6, \\
c &= \pi^2 \cos^2 \alpha_0/4, \quad d = \pi^3 \cos^2 \alpha_0/32
\end{aligned}$$

例Ⅱ 正弦曲線修正歯形(歯形-S)

$$\chi(y) = (2/\lambda^2)(\lambda - y^2) \quad (0 \leq y \leq \sqrt{\lambda})$$

$$\chi(y) = 0 \quad (\sqrt{\lambda} \leq y \leq 1)$$

$$\Psi(s) = \lambda(1 - \sqrt{1-s}) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

$$\sin^2 \theta_1 = [\Psi(s)/s]_{s=1} = \lambda, \quad \theta_1: \text{接点におけるかみあい圧力角}$$

$$p = \lambda \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-\lambda}} + \sqrt{1-\lambda}$$

$$k = -\frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\lambda\right) \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{\lambda}{2-\lambda}\right) - \frac{\sqrt{1-\lambda}}{2} \left(\frac{5}{4}\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda - \frac{2}{3}\right)$$

$$p' = \frac{1}{2} + \lambda - \lambda(1-\lambda) \log \{(2-\lambda)/(1-\lambda)\}$$

$$k' = \left(-\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{4}\right) - \lambda^2(2-\lambda)(1-\lambda) \log \{(2-\lambda)/(1-\lambda)\}$$

例Ⅲ サイクロイド修正歯形(歯形-C)

$$\begin{cases} \chi(y) = l/2y & (0 < y \leq 1/l), \quad l \text{ はころがり円直径} \\ \chi(y) = 0, & (1/l \leq y \leq 1) \end{cases}$$

$$\Psi(s) = s^2/l^2, \quad (0 < s \leq 1), \quad \sin^2 \theta_1 = [\Psi(s)/s]_{s=1} = 1/l^2$$

$$p = \theta_1/\sin \theta_1, \quad k = (2\theta_1 - \sin 2\theta_1)/4 \sin^3 \theta_1, \quad p' = -\log(\cos \theta_1)/\sin^2 \theta_1,$$

$$k' = -\sin^2 \theta_1/2 - \log(\cos \theta_1)/\sin^4 \theta_1, \quad a = \pi \sin \theta_1/\theta_1, \quad b = (\pi^2/16)(\sin 2\theta_1 - 2\theta_1 \cos 2\theta_1)/\theta_1^3$$

$$c = (-\pi^2/2) \sin \theta_1 \log(\cos \theta_1)/\theta_1^3, \quad d = (\pi^3/16\theta_1^4) \{2 \cos^2 \theta_1 \log(\cos \theta_1) + \sin^2 \theta_1\}$$

最小歯数 上記Ⅰ, Ⅱ, Ⅲの歯形の最小歯数をそれぞれ $(z_0)_I$, $(z_0)_S$, $(z_0)_C$ とすると $\text{Max. } y\chi(y) \leq R = 2p_z/\pi$ を用いて

$$(\pi/2) \cot \alpha_0 \leq (z_0)_I < (\pi/2) \cot \alpha_0 + 1, \quad \left(\text{Max. } y\chi(y) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$f(\theta_1) \leq (z_0)_S < f(\theta_1) + 1$$

$$f(\theta_1) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\sin \theta_1} \frac{1}{\left(\sin^2 \theta_1 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-\sin^2 \theta_1}} + \cos \theta_1\right)}$$

ここに

$$\left(\text{Max. } y\chi(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \theta_1} \right)$$

および

$$\left(p = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{s - \psi(s)} \right), \quad (\text{付録 [1] 参照})$$

が用いられた。

$$\frac{\pi}{4} \frac{1}{\theta_1} \leq (z_0)c < \frac{\pi}{4} \frac{1}{\theta_1} + 1, \quad \left(\text{Max. } y\chi(y) = \frac{1}{2} \right)$$

第 2 図は特徴関数 $s = \phi(t)$ の図式表示であり、これを特性曲線と名づけると、この $s-t$ 曲線の形状により好ましいラック歯形が求められる⁽¹⁾。すなわち $\overline{OP_0} + \overline{P_0Q_0}$ に対応してインボリュートの修正ラック歯形が第 3 図で $\overline{OP} + \overline{PQ}$ (直線部分とピッチ線上に中心をもつ円弧) として求められる。また第 2 図右側の点線および実線によりしめされた曲線 2 および 3 は、それぞれ頂点を Q_0 、 O にもち主軸が s, t 軸に平行な放物線で、これに対応するラック曲線がいわゆる正弦曲線歯形お

第 2 図 修正歯形特性曲線

第 3 図 修正ラック歯形(軸直角断面)

よびサイクロイド歯形である。第 2 図左側の曲線 2 と $\overline{P_0Q_0}$ の線が正弦曲線修正歯形(第 3 図で曲線 2 と $\overline{PQ}$ の組)であり、また第 2 図の曲線 3 と $\overline{P_0Q_0}$ の組がサイクロイド修正ラック歯形(第 3 図で曲線 3 と $\overline{PQ}$ の組)に対応する。

第 4 図および第 5 図はこれら 3 種の歯形の吐出し量比 ($\bar{V}$) ならびに有効仕事率 $[W/(A+W)]$ をしめす。図中実線 4 は固有の正弦曲線歯形(5 章例 II で $\lambda=1$ とおいてえられる)の性能である。たとえば第 3 図にしめしたように接線点におけるかみあい圧力角 θ_1 を 30° とするとこれら両図のごとく吐出し性能、有効仕事率が固有の曲線歯形に比し増大する。

つぎに上記の正弦曲線修正歯形に関し θ_1 の有効領域(局所干渉をしない)を函数 z に関し図示すると第 6 図となる(曲線の上部の領域)(第 2 表参照)。

この第 2 表または第 6 図から $z_0 \geq 3$ に対応する θ_1 の値のうち 24° が最小である。すなわち例 II でとった θ_1 の値 30° は最小函数 3 (はすば歯車で吐出し量とトルクの周期的変動を同時になくすため 1 ピッチのヘリカルアドバンスをつけた場合の最小函数) に対応す

第 4 図 吐出し量比

る設計値としては過大であり, この場合 24° が好ましい. 第1表最右欄に $\theta_1 = 24^\circ$ の場合の吐出し性能をしめす. この性能は筆者のこれまでに求めた歯形のうち吐出し性能の最高のもの〔同図にしめされた $\chi(y) = 21(1-y)^5$ 〕に対応する歯形の性能と比べ, 圧力角が大きくてしかも吐出し性能が上回っていることがわかる. 第3表に正弦曲線歯形と修正歯形の $\bar{V}$ および $W/(A+W)$ の比較値をしめす. これを第7図および第8図にしめす.

6. 結 論

歯車ポンプの歯形の改良の問題の一つとして母関数 $\chi(y)$ をどのような形であたえると吐出し性能が向上し, 有効仕事率も大きくなるかという問題を考え, 吐

第2表 修正正弦曲線歯形の最小歯数
(z_0)_s とかみあい圧力角の上限 (θ_1)
の関係

θ_1	$f(\theta_1)$	(z_0) _s	θ_1	$f(\theta_1)$	(z_0) _s	θ_1	$f(\theta_1)$	(z_0) _s
2°	34.637	35	16°	4.291	5	30°	2.239	3
4°	17.284	18	18°	3.805	4	32°	2.090	3
6°	11.537	12	20°	3.415	4	34°	1.959	2
8°	8.637	9	22°	3.096	4	40°	1.639	2
10°	6.906	7	24°	2.829	3	45°	1.455	2
12°	5.745	6	26°	2.602	3	60°	1.051	2
14°	4.914	5	28°	2.408	3

第5図 有効仕事率

第6図 正弦曲線修正歯形非局所干渉の有効領域

第7図 吐出し量比の比較

出し量比ならびに摩擦損失を考えた場合の有効仕事率を求める公式を導いた. この吐出し量比公式はこれまで用いられてきた公式よりも簡単であり, これらの公式を応用してこれまで用いられてきた歯形の修正方法ならびに修正歯形がもとの歯形よりどの程度性能が向上するかを数値計算例でしめすことができた.

終りに臨み本研究において数値計算の労を願った千葉工業大学機械工学科学生 塚田 直, 長尾 淳両君に対し謝意を表明する.

第 3 表 正弦曲線歯形と修正形の性能比較

	固有正弦曲線歯形 ($\theta_1=90^\circ$)	修正正弦曲線歯形 ($\theta_1=24^\circ$)
p	1.5708	1.0505
k	0.5890	0.3527
p'	1.5000	0.5567
k'	0.9167	0.2811
a	2.0000	2.9906
b	0.6250	1.5603
c	1.9098	2.3699
d	0.3714	0.8772

	z	$\bar{V}$	$\frac{W}{A+W}, (\mu=1)$	$\frac{A}{\mu W}$
固有 正弦 曲線 歯形	3	4.6251	0.7651	0.3070
	6	2.2034	0.8649	0.1562
	9	1.4447	0.9052	0.1048
	12	1.0744	0.9269	0.0788
	15	0.8552	0.9406	0.0632
	20	0.6381	0.9547	0.0475
修正 正弦 曲線 歯形	3	7.3527	0.7982	0.2528
	6	3.4040	0.8857	0.1290
	9	2.2088	0.9203	0.0866
	12	1.6339	0.9388	0.0652
	15	1.2963	0.9503	0.0523
	20	0.9640	0.9622	0.0393

付 録

〔1〕 吐出し量比 $\bar{V}$ を求める公式の誘導過程の基礎となった (1) 式はすでによく知られた関係式であるが, これは (10) 式と運動量の不変式

$$PdV = (T_1 + T_2)d\varphi$$

からただちに求められる。

$$〔2〕 \quad p = \frac{1}{2} \int_0^1 ds / \sqrt{s - \Psi(s)} \quad \text{の誘導}$$

(p は歯たけを単位長さとした場合)
(の四分の一ピッチ)

ラックと歯車との噛みあいの条件式

$$R\varphi = x + y \frac{dy}{dx}$$

の両辺を x で微分して

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} = \chi(y), \quad \chi(y) \equiv R \frac{d\varphi}{dx}$$

これを積分して

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2}{y^2} \int_0^y y \chi(y) dy - 1 + \frac{C_0}{y^2} \quad (C_0=0)$$

($C_0 > 0$ のとき接触点軌跡はピッチ点を通らない。 $C_0 < 0$ のときは不能)

上式よりラックの歯形曲線の方程式は

$$x = \int_0^y dy / \sqrt{\frac{2}{y^2} \int_0^y y \chi(y) dy - 1} \\ = \frac{1}{2} \int_0^{y^2} \frac{dy^2}{\sqrt{y^2 - y^2}} = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\Psi'(s) ds}{\sqrt{s - \Psi(s)}}$$

さて $y=1$ で $x=p$ であるから上式より

$$p = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - \{1 - \Psi'(s)\}}{\sqrt{s - \Psi(s)}} ds + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s - \Psi(s)}} \\ = [-\sqrt{s - \Psi(s)}]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s - \Psi(s)}} \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s - \Psi(s)}}$$

$$(\because \Psi(0)=0, \Psi(1)=1)$$

〔3〕 吐出し量比公式 (8) 式 $\bar{V} = 2\pi \{(az+b)/z^2\}$ の

第 8 図 有効仕事率の比較

誘導に関する別解

2 章 (4) 式 $dV/d\varphi = 1 + 2R - r^2$ より

$$\text{Mean}(dV/d\varphi) = (1 + 2R) - \frac{1}{(\pi/2z)} \int_0^{\pi/2z} r^2 d\varphi$$

$$= (1 + 2R) - \frac{1}{p} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{s ds}{\sqrt{s - \Psi(s)}}$$

$$\therefore \bar{V} = 2\pi \frac{\text{Mean}(dV/d\varphi)}{R^2} = 2\pi \frac{az + b}{z^2}$$

$$a = \pi/p, \quad b = (\pi^2/4p^3)(p - k)$$

文 献

- (1) 五百井・富樫, 機械学会第 39 期通常総会講演会前副集, No. 71 (昭 37-4), 37.
- (2) 市川, 歯車ポンプ, (昭 37), 日刊工業新聞社.
- (3) S. Muto, New Gear Pumps, (1956) Agent, Maruzen.
- (4) 五百井・松井, 機械学会論文集, 29-199 (昭 38-3), 620.
- (5) 五百井, 同上 628 ページ.
- (6) 五百井・富樫, 機械学会第 40 期全国大会講演会前副集, No. 79 (昭 37-10), 71.