621.824.4-422 : 621.941-422

ポリゴン断面の工作について*

(第2報, 旋削限界)

賀

勢

晋**

On the Machining of the Polygonal Profile

(Report 2, Machining Limits of Polygonal Profile)

by Susumu KASEI

On account of the special features of the lathe turning of polygonal profile, the machining is permissible for certain definite sections, which are specified by the coefficient of eccentricity.

These conditions shall be determined from the following several points.

(1) The variation of rake angle and relief angle must be confined within the original front relief angle of lathe tool.

(2) When the polygonal profile becomes concave, the machining is difficult and unpractical, and results in inaccuracy and weak strength. Therefore, we set the machining limit at this point, and further machining was discontinued.

(3) To machine the accurate profile, we must restrict the inertia force of reciprocating mass. From this point, the maximum machining speed is determined.

1. ポリゴン断面の旋削限界

ポリゴン断面を旋盤によって加工するには刃物が加工される素材に対して特異な関係運動をしなければならない。そのために加工が制限を受け、定められた条件を越えての工作は不可能となる。

工作が許される範囲の境界を旋削限界と称することとして、この限界をすくい角変動、曲率半径の制限および慣性力の制限の点において検討を加える。

2. すくい角および逃げ角変動による旋削限界

旋盤作業によるポリゴン断面軸および穴の旋削の特色はバイトのすくい角および逃げ角が周期的に変動することである。これらの角の変動量は後述するように相当量に達し、これが一定値を越すとバイトの前逃げ面が加工素材につかえるために、ポリゴン断面軸穴の旋削加工は不可能になる。ゆえにこの限界を知るためにすくい角および逃げ角変化のようすを知らなければならない。

第1図(a)は旋盤で丸軸を削る場合であって、すくい角 α_0 および逃げ角 β_0 は作業中一定である。第1

図(b)は3葉ポリゴン断面軸を削る場合であって、図において図心からの最大半径を削るA, CおよびE点ならびに図心からの最小半径を削るB, DおよびF点に、バイトが位置する瞬間だけは角度の関係が丸軸切削の場合と同じであるが、その他の点を削るときは状況を異にする。第1図(c)は第1図(b)のAB, CDおよびEF間を削る場合であって、すくい角は標準値 α_0 (丸断面切削の場合、切削点における丸断面の法線とすくい面のなす角) より β_1 だけ増加する。この瞬間のすくい角は $\alpha_0 + \beta_1$ となる。丸断面切削のとき切

第1図 わい曲面切削における α_0 および β_0 の変動説明図

* 昭和 38 年 3 月 19 日 関西支部第 38 期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 38 年 3 月 25 日.

** 正員, 徳島大学工業短期大学部 (徳島市南常三島町).

のときは負の変化をする。回転角 120° 以内においては $\alpha=30^\circ$ において β_1 は最大に達し、 $\alpha=90^\circ$ において負の最大に達する (クランク形断面においてごくわずかのずれがあるが無視しうる程度である)。

第 4 図は実験に使用した偏心量 $e=0.45, 0.82$ および 1.32 mm について、最大半径 $R=16 \text{ mm}$ のクランク形ポリゴン断面を削った結果である。図において明らかなように、 e が増加するほど β_1 が大である。

R が変化した場合について示したものが第 5 図であって、図は偏心量 $e=1.32 \text{ mm}$ について計算したものである。ポリゴン断面軸穴切削のときは、軸は削りこ

んで径が細くなるほど β_1 は大になり、反対に穴は削り広げるほど β_1 は小になる。

(d) すくい角変動の最大値 上述のように β_1 は α によって変化があるけれども前逃げ角 (2 番) が当らぬための限界を定めるには、その変化量の最大の点について解けばよい。すなわち 3 葉ポリゴン断面においては

$$n=3 \quad \alpha=30^\circ$$

であるからこの値を用いて (1)~(3) 式をとけばよい。

いま実用上の便利のために無次元数 ζ を選び $\zeta = e/R$ とすると、単弦形ポリゴン断面曲線に対しては

$$\beta_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{(-\zeta \sin n\alpha) \sin \alpha + \frac{1}{n} (1 - \zeta + \zeta \cos n\alpha) \cos \alpha}{(-\zeta \sin n\alpha) \cos \alpha - \frac{1}{n} (1 - \zeta + \zeta \cos n\alpha) \sin \alpha} \right\} - (90^\circ + \alpha) \dots\dots\dots (4)$$

として β_1 の最大値を計算すると、3 葉ポリゴン断面曲線においては

$$\beta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{0.287 - 0.789\zeta}{-0.167 - 0.699\zeta} \right) - 120^\circ \dots\dots\dots (5)$$

となる。第 6 図は ζ と β_1 との関係を示す。図において明らかなように、その関係はほとんど直線的である。いま β_1 の限度を 20° とすると $\zeta=0.11$ 以下がとりうる許容範囲となる。

3. 曲率半径による旋削限界

ポリゴン断面曲線は断面周辺の場所によって曲率半径を異にするけれども、 $\zeta=e/R$ の値が変化すると各位置における曲率半径が変わる。そして ζ がある値以上になると第 2 図のように断面におう (凹) 所ができる。断面におう所ができると強度の低下がはなはだしくなり、精度も悪化し、加工も困難となり、さらにこの断面を研削加工する場合に、といし車径とも関連した不都合を生ずるようになる。ゆえにこれらの点を考えてポリゴン断面におう所をつくらないことを条件として ζ の最大値、すなわち加工しうる限界を定めることができる。

第 4 図 $R=16 \text{ mm}$ のとき回転角 α とすくい角変動量 β_1 との関係線図

第 5 図 最大半径 R とすくい角変動量 β_1 との関係線図 ($\alpha=30^\circ$ において計算)

第 6 図 偏心係数 ζ と β_1 との関係

そのためにはまず曲率半径を示す式を必要とする。ある曲線の極座標による曲率半径 ρ は

$$\rho = \frac{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

によって示される⁽⁸⁾。

(a) 単弦形ポリゴン断面曲線の曲率半径 この場合においては

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\alpha} = -ne \sin n\alpha \quad \text{であるから, } \zeta \text{ 値を用いて } \rho \text{ を計算すれば}$$

$$\rho = \frac{\{(1-\zeta)^2 + 2\zeta(1-\zeta) \cos n\alpha + \zeta^2(1-n^2) \cos^2 n\alpha + \zeta^2 n^2\}^{3/2}}{(1-\zeta)^2 + \zeta(1-\zeta)(2+n^2) \cos n\alpha + \zeta^2(1-n^2) \cos^2 n\alpha + 2\zeta^2 n^2} R \quad \dots\dots\dots (7)$$

によって求められる。

(b) クランク形ポリゴン断面曲線の曲率半径 クランク形ポリゴン断面曲線においては

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\alpha} = -en \left\{ \sin n\alpha - \frac{\sin n\alpha \cos n\alpha}{\sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha}} \right\}$$

であるから

$$\rho = \frac{\left[\left\{ R + a - e \{ 1 - \cos n\alpha + \sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha} \} \right\}^2 + e^2 n^2 \left\{ \sin^2 n\alpha - \frac{2 \sin^2 n\alpha \cos n\alpha}{\sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha}} + \frac{\sin^2 n\alpha \cos^2 n\alpha}{\{ \sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha} \}^2} \right\} \right]^{3/2}}{\left\{ R + a - e \{ 1 - \cos n\alpha + \sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha} \} \right\}^2 + 2e^2 n^2 \left\{ \sin^2 n\alpha - \frac{2 \sin^2 n\alpha \cos n\alpha}{\sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha}} + \frac{\sin^2 n\alpha \cos^2 n\alpha}{\{ \sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha} \}^2} \right\} + en^2 \left\{ R + a - e \{ 1 - \cos n\alpha + \sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha} \} \right\} \left\{ \cos n\alpha - \frac{\cos 2n\alpha}{\sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha}} - \frac{\sin^2 n\alpha \cos^2 n\alpha}{\{ \sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha} \}^3} \right\}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

によって求められる。

(c) 曲率半径 ρ の変動 (7) 式あるいは (8) 式において明らかなように ρ は回転角 α の変化によ

第7図 $R=16 \text{ mm}$ のとき回転角と曲率半径との関係説明図

って周期的に変動する。

第7図は図中に示す e および α を用いたとき、最大半径 $R=16 \text{ mm}$ について、(8) 式より計算したクランク形ポリゴン断面曲線の α と ρ との関係である。 $\alpha=40^\circ$ くらいまでは偏心量が変化しても ρ はあまり影響はうけないが、 40° を越えた位置においては急激な差を生じている。

一定値 e をもつ偏心カムを取付けた旋盤でポリゴン断面軸穴を加工する場合、得られる種々の半径 R の断面形状を比較すると、 $\zeta=e/R$ の値が変化するため断面形状が比例変化せず、したがって(7)または(8)式によって得られる曲率半径も不連続に変化する。

第8図はこのようすを示す。図は $e=1.32 \text{ mm}$ のカムを使用した場合、曲率半径 ρ が最大になる $\alpha=60^\circ$ の位置および最小になる $\alpha=0^\circ$ における計算結果である。 $\alpha=60^\circ$ における最大曲率半径を示す線は比例変化せず、図のように不連続となり断面曲線の向きが変わることを示している。最小曲率半径は R の変動に対しては鈍感で図に示すようにほぼ直線的に変化する。

(d) 曲率半径が無限大となる条件 工作の限界と考えられるのは断面曲線が おう(凹)になる位置であって、曲率半径が無限大になる条件である。すなわ

ち第 8 図において曲率半径が $+\infty$ より $-\infty$ に移る位置である。

このように曲率半径が最初に無限大になる点はポリゴン半径最小点であって、3 葉ならば $\alpha=60^\circ$ の位置である。曲率半径が無限大になるのは (7) 式あるいは (8) 式において分母が 0 になるときである。

単弦形ポリゴン断面曲線についていえば (7) 式において

$$\text{分母} = (1-\zeta)^2 + \zeta(1-\zeta)(2+n^2) \cos n\alpha \\ + \zeta^2(1-n^2) \cos^2 n\alpha + 2\zeta^2 n^2$$

において $\cos n\alpha = -1$ とできるから

$$\text{分母} = (1-\zeta)^2 - \zeta(1-\zeta)(2+n^2) + \zeta^2(1-n^2) + 2\zeta^2 n^2 \\ = \{(2+n^2)\zeta - 1\}(2\zeta - 1) \\ = 2(2+n^2) \left(\zeta - \frac{1}{2} \right) \left(\zeta - \frac{1}{2+n^2} \right)$$

となる。この値が 0 になるためには、 $\zeta=1/2$ または $\zeta = \frac{1}{2+n^2}$ でなければならない。しかし $\zeta=1/2$ とは偏心量が最大半径の $1/2$ であることであって、これではポリゴン断面曲線は成立しない。ゆえに求めるものは $\zeta = \frac{1}{2+n^2}$ である。すなわち

3 葉ポリゴン断面曲線に対し

$$\zeta = \frac{1}{11} = 0.091 \dots \dots \dots (9)$$

となり、これ以上 ζ を大にして削ると断面におう所を生ずるようになる。

クランク形ポリゴン断面曲線において第 8 図の場合すなわち $a=60.6 \text{ mm}$, $e=1.32 \text{ mm}$ の条件で削った場合において曲率半径の分母を (8) 式より計算すると 分母 $= (R-2.8)(R-14.9)$ となる。

$R=2.8 \text{ mm}$ を満足できるポリゴン断面はあり得ないから、 $R=14.9 \text{ mm}$ のとき曲率半径は無限大になる。すなわち第 8 図においてこの条件のポリゴン断面は $R=14.9 \text{ mm}$ 以下に削ってはならない。

(e) 最小曲率半径を一定値とするための条件 ポリゴン断面曲線において曲率半径の最小値を制限して、これを旋削の限界とすることがある。

最小曲率半径は $\alpha=0$ において求められるから、(7) 式または (8) 式において $\alpha=0$ として ρ の値を求め、 ρ が指定値になるように断面形状を選定する。

たとえば 3 葉の単弦形ポリゴン断面曲線においては

$$\rho = \frac{1}{1+9\zeta} R \dots \dots \dots (10)$$

となる。いま曲率半径をポリゴン最大半径の 60% まで許すとすれば、 $\frac{1}{1+9\zeta} = 0.6$ すなわち $\zeta=0.074$ の断面まで工作が許される。たとえば $e=1.32 \text{ mm}$ のカムによって加工しているものとすれば、 $R=17.9 \text{ mm}$ が旋削の限界であって、それ以下に削ってはならないことになる。

4. 横送り台の慣性力によるポリゴン断面加工の速度の限界

普通の旋削においては、横送り台は固定しているかまたは一方向に一樣におそい送りがかかっているから、その慣性力を問題にする必要はない。

しかしポリゴン断面軸穴の旋削においては横送り台は前後に急速に往復しているので慣性力の問題がおきる。偏心量が増し、回転数が大になり葉数が増すほど慣性力は大となり、カム機構に影響し圧縮ばねの作用に干渉する。

(a) 単弦形ポリゴン断面切削の場合 単弦形ポリゴン断面切削の場合においてバイトがいちばん手前に来た状態を基準とし、その点より刃物の移動量を x とすると、 x はバイトを含めた横送り台の変位 s に等しいから

$$x = s = e - e \cos n\alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dn\alpha} \cdot \frac{dn\alpha}{dt} = e \sin n\alpha \frac{dn\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(e \sin n\alpha \frac{dn\alpha}{dt} \right)$$

$$= e \left\{ \cos n\alpha \left(\frac{dn\alpha}{dt} \right)^2 + \sin n\alpha \frac{d^2n\alpha}{dt^2} \right\}$$

ゆえに往復部分の重量を W とすると慣性力 F は

第 8 図 ポリゴン断面について $e=1.32 \text{ mm}$ のとき R と曲率半径との関係線図

$$F = -\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{W}{g} e \left\{ \cos n\alpha \left(\frac{dn\alpha}{dt} \right)^2 + \sin n\alpha \frac{d^2n\alpha}{dt^2} \right\}$$

となる。

$\frac{d^2n\alpha}{dt^2}$ はカム軸の角加速度を意味するものであるが、一定の運転状態においてはこの値は0であるから

$$F = -\frac{W}{g} e \cos n\alpha \left(\frac{dn\alpha}{dt} \right)^2 \dots\dots\dots (11)$$

が求める慣性力であって、正しく正弦曲線にしたがって変動を繰返している。

(b) クランク形ポリゴン断面切削の場合 単弦形断面の場合と同様にして

$$x = s = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 n\alpha} - e \cos n\alpha - (a - e)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dn\alpha} \frac{dn\alpha}{dt} = e \left\{ \sin n\alpha - \frac{\sin n\alpha \cos n\alpha}{\sqrt{(a/e)^2 - \sin^2 n\alpha}} \right\} \frac{dn\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e \left\{ \frac{dn\alpha}{dt} \right\}^2 \left[\cos n\alpha - \frac{\cos^4 n\alpha + 2 \{ (a/e)^2 - 1 \} \cos^2 n\alpha - \{ (a/e)^2 - 1 \}}{\{ \sqrt{(a/e)^2 - 1 + \cos^2 n\alpha} \}^3} \right]$$

ゆえに往復部分の重量を W とすると慣性力 F は

$$F = -\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{W}{g} e \left\{ \frac{dn\alpha}{dt} \right\}^2 \left[\cos n\alpha - \frac{\cos^4 n\alpha + 2 \{ (a/e)^2 - 1 \} \cos^2 n\alpha - \{ (a/e)^2 - 1 \}}{\{ \sqrt{(a/e)^2 - 1 + \cos^2 n\alpha} \}^3} \right] \dots\dots\dots (12)$$

の式によって計算できる。

本研究の実験に使用した旋盤の横送り台の往復部重量 $W=85 \text{ kg}$ について、主軸回転数 74, 110 および 210 rpm において $e=1.32 \text{ mm}$ として 3 葉クランク形断面を削った場合の慣性力を、(12) 式より計算した結果を第 9 図に示す。

慣性力は W に比例し、速度 $\frac{dn\alpha}{dt}$ の二乗に比例することはもちろんであるから、図のように回転数の増加とともに急激に上昇する。第 9 図に示す $R=16 \text{ mm}$ および $e=1.32 \text{ mm}$ のとき、実験回転数は最高 210 rpm に過ぎないが慣性力は最大 53 kg に達する。ま

た図によって明らかなように、極限位置よりバイトが前進するときと、後退するときとは慣性力の最大値に若干のくいちがいがある。すなわち前進しようとする瞬間 ($\alpha=0^\circ$) のときが最高であって、後退しようとする瞬間 ($\alpha=60^\circ$) においては $\alpha=0^\circ$ の場合よりわずかに小である。また慣性力が 0 となるときは、3 葉ポリゴン断面軸切削のときを例にとると $\alpha=30^\circ$ よりすこし回転角の大きい位置においてである。

(c) 良好な精度の期待できる慣性力の限界 この研究の実験においては第 1 報に説明したように、ばねを使用して横送り台の追従を確実にし、台のオーバーランを制している。

この場合にばねの圧縮力が過少であると断面精度が不十分であり、過大であると接触面間の圧力の強さが大きくなって発熱などの支障となる。

このばねの圧縮力は横送り台の慣性力に関連して定めなければならないが、著者の実験結果*によれば精度の良好な断面を得るためには、ばねの圧縮力は慣性力の 6 倍以上あることがのぞましいことがわかった。

いまこの旋盤のカムとシュー間が 600 kg までのばねの圧縮力に耐えうるとすれば、許しうる慣性力は 100 kg であって、第 9 図に示す条件の場合の主軸回転数は約 290 rpm である。すなわち偏心量 $e=1.32 \text{ mm}$ で切削する場合は 290 rpm が速度の限界であって、それ以上の高速加工をしては良好な精度の断面は期待できないことになる。

5. 結 論

(1) まずすくい角変動量が切削するバイトの前述

第 9 図 回転角 α と横送り台の慣性力との関係線図

* 実験結果については別に発表の予定。

げ角より小でなければならないとして式を求め、その条件を定めた。たとえば角度の変動を 20° まで許すとすれば、単弦形ポリゴン断面においては $\zeta=0.11$ の断面までは旋削できることがわかった。

(2) 断面形状においておう所をつくらないことを条件として、最大曲率半径を無限大として解くと、単弦形ポリゴン断面においては $\zeta=0.091$ の断面まで削りうることを明らかにした。

(3) 最小曲率半径を一定値に制限してこれを旋削の限界とすることも考えられるので、そのための計算式を用意した。

(4) 横送り台の往復による慣性力が過大になるとばね強さとの関連において精度が悪化するから、良好な精度が得られる範囲を定めて削り速度の限界を求めることができた。

この研究に対しご指導とご教示をいただいた東京工業大学 山本晃教授および徳島大学 稲田貞俊教授に深い感謝の意を表する。

文 献

- (1) 賀勢, 機械学会九州支部・中国四国支部連合新居浜地方講演会前刷, (昭 37-10-22), 1.
- (2) 賀勢, 機械学会論文集, 29-199 (昭 38-3), 459.
- (3) 岩切, 微分積分学精説, (昭 30), 117, 培風館.

621.824.4-422 : 621.923.1-422

ポリゴン断面の工作について*

(第 3 報, 研 削)

賀 勢 晋**

On the Machining of the Polygonal Profile

(Report 3, Grinding)

by Susumu KASEI

In this paper, we studied the problems about grinding of the shafts and bores with the polygonal profile sections.

Grinding attachments were mounted on the lathe, and the operations were carried out with the peripheral surface of the grinding wheel (1) or the side surface of the cup-grinding wheel (2).

The equations of the arc-enveloped polygonal profile (1) and the straightline-enveloped polygonal profile (2) were determined.

In the arc-enveloped profile, the differences of the curve due to the variations of the diameter of grinding wheel were studied.

About the interference of the profile, the relation between the dimension of wheel and radius of curvature of polygonal curve was obtained.

The accuracy of the profile and the roughness of the surface were measured and compared with those of the shafts having the circular sections.

1. ポリゴン断面軸穴の研削方式

ポリゴン断面軸継手においては、スプライン軸継手にくらべると軸の研削は容易であり、穴も制約はあるが研削できる点は大きな特色である。

研削の原理は第 1 図 (a) および (b) に示すとおり、旋削におけるバイトを、回転するといし車で置きかえたものである。

研削には 2 方式がある。これはといし車のどの部分を研削に用いるかによって区別される。第 1 図 (a) を

第 1 図 ポリゴン断面軸研削の 2 方式

* 昭和 38 年 4 月 2 日 第 40 期通常総会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和 37 年 11 月 28 日.

** 正員, 徳島大学工業短期大学部(徳島市南常三島町).