621.833.1.01 : 53.088.2

歯車個別誤差の統計理論による検討*

(第2報, 応 用)

大 村 平**

Statistical Study in Individual Errors of Gear

(Part 2, Applications)

by Hitoshi OHMURA

The proper ratio among tolerances for individual errors of gears is obtained from the rule of distribution which was shown in Part 1, and the ratio among tolerances specified in JIS or DIN satisfies the result of the theoretical study.

As the number of teeth becomes greater the measurement of accuracy on all teeth requires greater deal of labour, the method is presented to presume the maximum error in all teeth with the measurement on some part of teeth and the accuracy of the presumption is calculated. Hereupon, the extract inspection on the gear teeth which has been unsystematically performed becomes systematized.

1. ま え が き

第1報⁽¹⁾では、平歯車個別誤差の分布法則を理論的に導き、ある形状の誤差分布をもつ歯車が定められた許容値に合格する確率を算出した。本第2報ではこの結果を利用して、各許容値間の正当な比を計算する。正当な比とは次のような意味である。個別誤差は(1)基礎円半径誤差 f_{rg} , (2)基礎円の偏心 e_0 , (3)実際のピッチ円上でのピッチのばらつきの標準偏差 σ_t , (4)実際のインボリュートからの歯面のずれ、によってそれぞれ独立に発生する。そして、これらの中のある特定の誤差の原因を小さくすることは工作上可能であり、それが、公差族という概念が存在しうる理由であり、歯車の使用目的によって、ある種の個別誤差に他の個別誤差よりも上位の精度等級を要求できるゆえんである。

しかしながら、現在生産され使用されている歯車について統計的にみれば、 e_0 , σ_t 等の相互間の比は、歯数 z , モジュール m 等と密接な相関関係があることは当然予想され、したがって、各個別誤差の大きさの間には、統計的な関係が存在するはずである。この関係を z および m の系列として整理し、使用目的によって等級を定めて規定したものが各国の歯車精度規格であ

る。そこで、同一の等級に定められた各個別誤差の許容値は、現在生産され使用されている歯車に対しては、どの個別誤差の許容値も厳格さが、すなわち、合格する確率が等しくなければならない。その確率の選び方によって許容値間の比はやや変るが、第1報で述べたように、その変り方はあまり大きくないので、合格する確率がどの個別誤差に対しても0.5であるような、各個別誤差の許容値間の比を正当な比と考える。

また、歯数がきわめて大きい歯車では、全歯数について個別誤差の測定を行なうことは非常に多くの労力を要するので実用的でなく、少数枚の歯について測定を行ない、その結果から等級を評価することがしばしば行なわれているようである。しかし、歯数 z の歯車の n 枚について測定を行ない、 n 個の測定値中の最大値で、その歯車の精度を評価すれば、当然精度の評価が甘くなるので、どの程度の確率でどのくらい甘くなっているかを知っておく必要がある。そこで、誤差表示の方法としては、従来の規格に定められているように、誤差分布の形状には関係なく、誤差の最大値、または最大値と最小値の差のみに着目して、歯数 z の歯車について、何枚の歯を検査すれば、どれだけの確からしさで全歯数について測定を行なったときの最大の誤差を推定できるかを検討する。もちろん、このような推定には必ず危険性を伴うものであるが、歯車の場合、たとえば誤差の真の値が 10μ であるとして、0.01 程度の小さい確率で、それを 13μ または 7μ

* 昭和 37 年 11 月 10 日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和 37 年 12 月 6 日。

** 正員、防衛庁技術研究本部第3研究所(立川市曙町3の216)。

と読みとってしまう危険があるとしても、それほど支障となる場合は多くない。これは、JIS の個別誤差の許容値の等級による公比が 1.4~2 程度であることから推察できる。また、 n 個の標本によって、 z 個の母集団中の最大の値を推定するには、 n 個の標本の値を全部使用するのが最も精度がよいが、標本の数学的な処理に手をかけては、測定歯数を減らした本来の意味が失われるので、標本の中の最大の一つのみを使用して、母集団中の最大値を推定する方法について検討する。

以下、使用する記号は次のとおりである。 x_1 は許容単一ピッチ誤差、 x_2 は許容隣接ピッチ誤差、 x_3 は許容累積ピッチ誤差、 x_4 は許容法線ピッチ誤差、 x_5 は許容歯厚誤差、 x_6 は許容歯みぞのふれ、 x_8 は素材外周のふれの許容値、を表す。そのほか歯車に関する記号は JIS に従った。

2. 個別誤差許容値間の正当な比

2.1 σ_t と e_0 および f_{rg} の関係 第 1 報の結果を利用すれば、 σ_t 、 e_0 および f_{rg} 相互間の比を与えることによって、 $x_1 \sim x_6$ の六つの許容値の正当な比を求めることができる。しかし、 σ_t 、 e_0 および f_{rg} の相関関係を、現在生産され使用されている歯車から経験的に決定するには、非常に大量の資料を解析することが必要であり、不可能に近い。そこで、各国で現在までになされた大量の実測結果を利用するために、これらの関係を各国の精度規格から逆に算出する。

JIS では、 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_5 および x_6 の間に第 1 表に示す経験式が採用されている。 x_2 は近似的に σ_t のみで決定されるので、 x_2 と σ_t の関係を求め、それを基準として、 x_1 、 x_3 、 x_5 および x_6 から e_0 と σ_t の関係を求めると、おおよその傾向は現われるが、信頼に

第 1 表 JIS に用いられた経験式

$\frac{x_3}{x_1} = 4$	
$\frac{x_5}{x_1} = 2$	
$\frac{x_6}{x_1} = 2.8$	
$x_1 \mu$	$\frac{x_2}{x_1}$
~ 5	1.00
5 ~ 10	1.06
10 ~ 20	1.12
20 ~ 30	1.18
30 ~ 50	1.25
50 ~ 70	1.32
70 ~ 100	1.40
100 ~ 150	1.50
150 ~	1.60

値する結論は見出されない。諸外国の規格についても同様である。これは、各国の精度規格がこの研究の結果と少しずつ異なっており、また逆算すると、その差異が非常に拡大されて e_0 と σ_t の関係に現われるからである。通常の歯切りの際の心出しには、素材の外周を基準とするので、素材外周のふれと歯車の偏心には密接な関係があり、素材外周のふれが歯車の偏心量のほぼ 2 倍であることは想像に難くない。そこで JIS に定められた素材外周のふれの許容値 x_8 から経験的な σ_t と e_0 の関係を求めてみる。JIS で定める x_2 か

第 1 図 k_1 および k_2

第 2 図 x_8 から求めた σ_t と e_0 の関係

ら, 各等級, 各 m , 各 d_0 (すなわち, 各 z) について σ_t と m との関係を調べると, d_0 に関係なく

$$\sigma_t = k_1 m^{0.44} \dots \dots \dots (1)$$

できわめてよく近似できることがわかる. k_1 は等級によって定まる定数で第1図に示す. 一方, JIS の解説によれば

$$x_3 = k_2' \{1.1 \sqrt[3]{d_a} + 5.5\}$$

であり, k_2' の値が各等級ごとに定められている. したがって

$$e_0 = k_2 \{m^{1/3}(z+2)^{1/3} + 5\} \dots \dots \dots (2)$$

の形に書け, k_2 は等級によって定まる定数で, 第1図に示す値をとる. (1) 式と (2) 式から

$$e_0 = k_2 \{k_1^{-0.76} \sigma_t^{0.76} (z+2)^{1/3} + 5\} \dots \dots \dots (3)$$

第3図 σ_t と e_0 の関係の仮定

第4図 x_1 と x_2 との関係

となる. この関係を図示すると第2図のようになる. 混雑を避けるために1級, 4級および7級を示したが, 他の等級も同じ傾向である. また, SEIE (フランス) では, 偏心量の許容値を定めているので, 最大ピッチ誤差から, 第3図の関係をを用いて算出した σ_t と e_0 の関係を第2図に示した. 第2図, および各国の規格の x_1 , x_2 , x_3 , x_5 および x_6 から逆算した σ_t と e_0 の関係, さらに, その他の文献⁽²⁾を参照すると, σ_t と e_0 の関係はかなりの信頼性をもって第3図のように仮定することができる.

また, x_4 および歯形誤差の許容値 x_7 を求めるためには f_{rg} の値が必要である. DIN (ドイツ) ではこの許容値を定めており, ほぼ

$$f_{rg} = 0.45 x_1 \dots \dots \dots (4)$$

となっているので, これを仮定として採用する.

2.2 個別誤差許容値間の 正当な比と 各国精度規格との比較 第3図および (4) 式の仮定によって, σ_t と $x_1 \sim x_6$ を求め, それを x_1 との関係に換算して図示したものが第4~8図であり, 各国の規格を比較のために記入した. 諸外国の規格の中には, これらの関係が等級, z , m などによって異なり, 1本の曲線で表わされないものもあるが, 大きな差異のないものは平均値をとって, 1本の曲線で代表してある. 第4図は x_1 と x_2 の関係であり, JIS は計算値とよく一致する. DIN では $x_1 = x_2$ としているが, この両者は不可分の

第5図 x_1 と x_3 との関係

関係にあり、一方だけの精度を上げることが非常にむずかしいことを思えば、規格の単純化以外に益は少ないように思える。

第 5 図は x_1 と x_3 の関係である。最もよく使用される z が 20~40 程度の歯車では、BSS (イギリス) を除いた他の規格は計算値とよく一致する。しかし、各国の規格とも $x_1 \sim x_3$ の比を z に関係なく定めていることは納得できない。これは、 z の大きい歯車の資料が比較的得にくく、さらに第 1 報で述べたように、累積ピッチ誤差のばらつきは z が大きくなるにつれて増すので、 $x_1 \sim x_3$ の関係は z が大きくなると、経験的な実測値からは求めにくいことによるものであろう。なお、累積ピッチ誤差には e_0 の影響が大きく現われるので、やはり e_0 の影響の大きい歯みぞのふれとの関係に換算して第 9 図に示してある。

第 6 図は、 x_1 と x_5 の関係であり、JIS, DIN, SEIE は歯厚誤差に対してやや過酷であり、BSS は寛容であることを示している。第 7 図は x_1 と x_6 の関係であり、ГОСТ (ソ連) は歯みぞのふれに対して過酷、JIS と DIN もやや過酷である。第 8 図は x_1 と x_4 の関係であり、DIN は計算ときわめてよく一致する。これは DIN が x_1 , x_4 および f_{rg} の間の調和がよくとれていることを示している。なお、第 4~9 図に示した計算値は、現用の歯車について全く理論的に算出した正しい値ではなく、各国の精度規格を定めるにあたってなされた大量の歯車精度測定の結果から、体系づけられた理論にしたがって求められたある種の平均値と考えるべきものである。

第 6 図 x_1 と x_5 との関係

3. 歯の抜取検査

3.1 絶対値の最大のものを問題とする場合 n 個の標本の中に、母集団中の絶対値の最大のものから $k+1$ 番めまでの値のどれか一つ以上を含む確率は

$$P_3 = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{n}{z-k} \prod_{r=1}^k \left(1 - \frac{n}{z-r+1} \right) \right\} + \frac{n}{z} \quad \dots\dots\dots (5)$$

である (付録 1 参照)。次に z 個中 k 番めの値は、最大の値に対してどのくらい小さいかを検討する。厳密には z 個の有限母集団のうち、最大の値の確率密度と、

第 7 図 x_1 と x_6 との関係

第 8 図 x_1 と x_4 との関係

同じ母集団の k 番めの値の確率密度から、最大値と k 番めの値の差の分布法則を算出すべきであるが、それには非常に複雑な数値計算が必要で、計算の精度も上げにくく、さらにその後の取扱いにも不便なので、近似的に次のような方法を使用する。一つの歯車について z 個の誤差量の母集団は、第1報で述べたように

$$f_1(x) = \int_{-a}^a \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x_0^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x-x_0)^2} dx_0$$

の分布法則にしたがう。そして第1報と同様に

$$f_2(x) = \int_{-x}^x f_1(x) dx$$

と書き、 z 個の値が一様に現われるとすると、そのうち k 番めの値 x_k はほぼ

$$f_2(x_k) = 1 - \frac{k}{z}$$

を満足すると考えられる。すなわち

$$x_k = f_2^{-1}\left(1 - \frac{k}{z}\right) \dots\dots\dots (6)$$

である(付録2参照)。 x_k をもって z 個中の最大値とみなしたとき、その誤差 E を最大値に対する比で表わすと、

$$E = \frac{x_k - x_1}{x_1} = \frac{f_2^{-1}\left(1 - \frac{k}{z}\right) - f_2^{-1}\left(1 - \frac{1}{z}\right)}{f_2^{-1}\left(1 - \frac{1}{z}\right)} \dots\dots\dots (7)$$

である。したがって、 P_3 の確率で誤差は E 以下であることが知られる。この誤差は一方的に負の側のみ生ずるから、次の式で与えられる R を x_k に乗ずれば、誤差は正負にふり分けとなり、誤差の絶対量を $1/2$ にすることができる。

$$R = \frac{f_2^{-1}\left(1 - \frac{k}{z}\right) + f_2^{-1}\left(1 - \frac{1}{z}\right)}{2f_2^{-1}\left(1 - \frac{k}{z}\right)} \dots\dots\dots (8)$$

z, n の種々な組合せについて、 P_3, E および R の関

第10図 歯の抜取検査の精度(絶対値の最大のものを問題にする場合)

係を図示すると第10図のとおりである。

【例1】 単一ピッチ誤差、隣接ピッチ誤差の場合、第1報によって $a=0$ だから $z=500$ の歯車から 50 枚の歯について誤差測定を行なえば、測定値中の最大のものに 1.20 を乗じた値は、80% の確率で、全歯数の誤差の最大値の $\pm 14.5\%$ 以内にあり、また 1.33 を乗じた値は、96% の確率で $\pm 20\%$ の範囲内にある。なお、法線ピッチ誤差の場合には分布の中心が零でないために、抜取検査の精度はこれよりも良くなる。

3.2 最大値と最小値の差を問題にする場合 $f_1(x)$ は、正負対称の分布法則なので、 z 個の値の $1/2$ が正の側に他の $1/2$ が負の側に存在すると仮定する。 z が大きい場合について考えているので、この仮定の信頼度は十分に高い。また、 n 個の標本も、正負の両側に $1/2$ ずつ存在すると仮定する。 n はあまり大きくはな

(ASA の x_3 は偏心の影響を除いたものである)

第9図 x_6 と x_3 との関係

第 11 図 歯の抜取検査の精度(最大値と最小値の差を問題にする場合)

いので、この仮定の信頼度は高くはないが、一方に多くの資料が集まりすぎることによる誤差と、他方の資料が少なくなるための誤差とは、互に消し合う方向にあるので、この仮定も大きな不都合なく採用できる。この仮定によって、(5)、(7) 式および (8) 式の z および n の代りに $z/2$ および $n/2$ を代入して、全く同様な関係が求められる。それを図示したのが第 11 図である。 a の値はあらかじめ知ることはできないが、第 3 図の仮定によって現用されている歯車の a の値を第 12 図に示したので、これを参考にしておおよその見当をつけられる。見当がつけにくい場合には、安全のために $a=0$ と考えておくべきである。

【例 2】 歯厚誤差、歯みぞのふれの場合、 $a=0$ として、 $z=500$ の歯車から 50 枚の歯について誤差測定を行なえば、測定値中の最大のものに、1.17 を乗じた値は、60% の確率で、全歯数の誤差の最大値の $\pm 13.0\%$ 以内にあり、また 1.41 を乗じた値は 95% の確率で $\pm 22.5\%$ の範囲内にある。

3.3 累積ピッチ誤差の推定 累積ピッチ誤差以外の個別誤差は、歯数 z の歯車について、互に独立に z 個の標本が存在し、その絶対値の最大のもの、または最大値と最小値の差について検討を行なったが、累積ピッチ誤差は、個々の歯について独立に値が定まるのではなく、値をつぎつぎに累積したものであるという点で全く趣を異にする。しかし、 z 個の累積ピッチ誤差は第 1 報で述べたように、 $f_1(x)$ の分布法則にしたがうから、連続に全歯数について単一ピッチ誤差が測定されていなくても、 n 枚の歯についての個別誤差の標本から、累積ピッチ誤差の最大値と最小値の差を推定することができる。

まず、累積ピッチ誤差の正弦的变化の部分を除いた最大値と最小値の差は、次のようにして推定することができる。第 1 報で述べたように、累積ピッチ誤差、単一ピッチ誤差および隣接ピッチ誤差の正弦的变化の

第 12 図 現用歯車の a の値の平均

部分を除いた標準偏差はそれぞれ、 $(\pi/8)\sqrt{z}\sigma_t$, σ_t , および $\sqrt{2}\sigma_t$ であるから、 n 個の単一ピッチ誤差の標本の最大値と最小値の差に $(\pi/8)\sqrt{z}$ を乗じた値、あるいは n 個の隣接ピッチ誤差の最大値と最小値の差に $(\pi/\sqrt{28})\sqrt{z}$ を乗じた値が、累積ピッチ誤差の z 個の値のうち、 n 個の標本をとり出したときの最大値と最小値の差である。その精度等に関しては、3.2 節を全くそのまま適用することができる。なお単一ピッチ誤差は偏心にやや影響されるので、偏心が大きい歯車の場合には隣接ピッチ誤差の資料を使用することが望ましい。

一方、累積ピッチ誤差の正弦的变化の部分の振幅は次のようにして求められる。一般に、

$$y = A \sin \theta \dots\dots\dots (9)$$

で表わされる関数で、1 周期を t 等分し、各点の値 $y_1, y_2, \dots, y_t$ の二乗平均の平方根

$$Y = \frac{1}{\sqrt{t}} \{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_t^2\}^{1/2} \dots\dots\dots (10)$$

を求めると, θ_0 を等分に開始する点の θ の値として

$$Y = \frac{A}{\sqrt{t}} \left\{ \sum_{i=1}^t \sin^2 \left(\theta_0 + 2\pi \frac{i}{t} \right) \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{t}} \left\{ \frac{t}{2} - \frac{\cos 2\theta_0}{2} \sum_{i=1}^t \cos 4\pi \frac{i}{t} \right.$$

$$\left. + \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sum_{i=0}^t \sin 4\pi \frac{i}{t} \right\}^{1/2}$$

t が 1 または 2 でない正の整数ならば

$$\sum_{i=1}^t \cos 4\pi \frac{i}{t} = \sum_{i=1}^t \sin 4\pi \frac{i}{t} = 0 \quad (3)$$

であるから

$$Y = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

であり, 正弦変化の 1 周期を任意に t 等分 ($t \geq 3$) した各位置での値を知れば, それらの二乗平均の平方根に $\sqrt{2}$ を乗ずることによって半振幅 A を知ることができる. すなわち, 正弦的变化をとまなう単一ピッチ誤差, 歯みぞのふれ, または歯厚誤差を全歯数を t 等分した位置で測定すれば, それらの値から累積ピッチ誤差の正弦的变化の振幅を計算することができる. 第 1 報で述べたように, 累積ピッチ誤差, 単一ピッチ誤差, 歯厚誤差 および 歯みぞのふれの 正弦的变化の部分の振幅はそれぞれ, $2e_0 \sec \alpha_0$, $4e_0(\pi/z) \sec \alpha_0$, $4e_0 \sec \alpha_0 \sin(\alpha_0 - \pi/2z)$ および, $2e_0$ であるから

$$\text{単一ピッチ誤差の標本からは } \sqrt{2} \frac{z}{\pi} Y$$

$$\text{歯みぞのふれの標本からは } 2\sqrt{2} \sec \alpha_0 Y$$

$$\text{歯厚誤差の標本からは } \frac{\sqrt{2} Y}{\sin \left(\alpha_0 - \frac{\pi}{2z} \right)}$$

として累積ピッチ誤差の正弦的变化部分の振幅が計算される(付録 3 参照). この推定の精度は次のとおりである. 歯みぞのふれ等の標本が t 等分した各位置で連続に s 個ずつ測定されており, その総計が n 個であるとする. s 個の値のグループを算術平均した値 x_i は当然, 正弦的变化以外の量を含んでおり, その量を ϵ_i とする. すなわち,

$$x_i = y_i + \epsilon_i \quad (12)$$

であり, ϵ_i は零を平均値として正規分布の法則にしたがうので, その標準偏差を σ とする. x_i から求めた誤差を含んだ半振幅を A' とすると

$$A' = \sqrt{\frac{2}{t} \sum_{i=1}^t x_i^2} = \sqrt{\frac{2}{t} \sum_{i=1}^t (y_i + \epsilon_i)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{t} \sum_{i=1}^t y_i^2 + \frac{4}{t} \sum_{i=1}^t y_i \epsilon_i + \frac{2}{t} \sum_{i=1}^t \epsilon_i^2} \quad (13)$$

ここで, 標本の正弦的变化の部分を除いた標準偏差を

σ_s (第 1 報, 第 1 表参照) とすると

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{s}}, \quad \sqrt{\frac{2}{t} \sum_{i=1}^t y_i^2} = A, \quad st = n$$

であるから, $\frac{2}{t} \sum_{i=1}^t y_i^2$ は A^2 を表わし, $\frac{4}{t} \sum_{i=1}^t y_i \epsilon_i$ は $(0, \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}} A)$ の正規分布を表わし, $\frac{2}{t} \sum_{i=1}^t \epsilon_i^2$ は, 平均値 $2\sigma_s^2(t/n)$, 分散 $4\sigma_s^2(t/n)$, 自由度 t の χ^2 分布を表わす. したがって, A' は n が一定ならば t が小であるほど精度がよい. A' の分布は, n , σ_s , A 等の値によって変化し複雑であるが, これらの常識的な範囲では, 標本が歯厚誤差または歯みぞのふれであれば, この推定による誤差は, 累積ピッチ誤差の最大値と最小値の差に対して 100% に近い安全さで 4~5% 以下である(付録 4 参照). 標本が単一ピッチ誤差であるときには, 推定による誤差は統計的な意味でこれよりやや大きくなる.

このようにして, 累積ピッチ誤差の正弦的变化の部分を除いた最大値と最小値の差を知り, 正弦的变化部分の振幅を知れば, 歯数が大きい場合について論じているから, これらの代数和として累積ピッチ誤差の最大値と最小値の差を推定することができる.

第 13 図 t 等分した箇所から取出された標本の分布と母集団の分布の比較

3.4 検査すべき歯の位置 個別誤差の分布が正規分布であるならば、標本は全く任意にとり出してさしつかえない。しかし、個別誤差は $f_1(x)$ の分布法則にしたがい、歯車 1 周について周期性を持つため、標本は歯車全周から均等にとり出されることが標本の代表性を良くするために必要である。しかるに、隣接ピッチ誤差を算出する効率を良くするため、累積ピッチ誤差推定の手数を軽減し精度を良くするために、歯車全周をなるべく少なく等分し(ただし、3 等分以上)、連続に多くの標本をうる必要がある。そこで、 $a=3$ の場合について、 $t=3\sim 6$ のとき、正しい分布の形状と標本が最も極端にかたよった場合の標本の分布の形状とを比較したものを第 13 図に示した。実線は正しい母集団の分布を示し、破線と一点鎖線とは両極端の場合の分布を示している。歯車精度の推定には標本の分布の中心から最もはずれた部分のみを使用するので、 $t\geq 5$ ではほとんど実用上さしつかえない精度であることがわかる。 $t=3$ の一点鎖線は正しい分布と非常に異なっているように見えるが、実は正側と負側の誤差が消し合う方向にあるので、全体としての誤差はそれほど大きくはない。 $t=4$ の場合は正側と負側の誤差が加算されるので、全体としての誤差は大きく採用すべきではない。以上を総合して、個別誤差の標本は 5 等分した各位置から連続に $n/5$ 個ずつ測定されるのが望ましく、場合によっては 3 等分を使用してもさしつかえないことがわかる。

4. あ と が き

第 1 報の理論を応用して、第 2 報では二つの応用例を述べた。一つは個別誤差間の正当な比を求めることであり、他の一つは歯数が多い歯車の場合の歯の抜取検査の方法とその精度の検討であった。歯形誤差は歯車の個別誤差としては重要なものの一つであるが、 $f_1(x)$ の分布法則に従わず異なった性格の分布をするため、ここでは省略した。次の機会に述べたい。

なお、この研究に際しては、東京工業大学精密工学研究所 中田 孝教授および石川二郎教授に種々のご指導とご便宜を賜ったので厚くお礼申上げる。

付 録

1. (5) 式の誘導 z 個の母集団から n 個をとりに出したとき、 n 個の中に z 個中の絶対値の最大のものを含む確率は

$$\frac{n}{z}$$

いちばん大きい値を含まず 2 番めの値を含む確率は

$$\left(1 - \frac{n}{z}\right) \frac{n}{z-1}$$

1 番めと 2 番めの値を含まず 3 番めの値を含む確率は

$$\left(1 - \frac{n}{z}\right) \left(1 - \frac{n}{z-1}\right) \frac{n}{z-2}$$

一般に、1 番め～ k 番めの値を含まず $k+1$ 番めの値を含む確率は

$$\frac{n}{z-k} \prod_{r=1}^k \left(1 - \frac{n}{z-r+1}\right)$$

したがって、 n 個中に 1 番めから $k+1$ 番めまでの値のどれか一つ以上を含む確率は

$$P_3 = \prod_{k=1}^k \left\{ \frac{n}{z-k} \prod_{r=1}^k \left(1 - \frac{n}{z-r+1}\right) \right\} + \frac{n}{z}$$

である。

2. (6) 式の意味 z 個の母集団が $f_1(x)$ の分布法則にしたがうとすると、 z 個の絶対値は

$$2f_1(x) \quad \text{ただし } 0 < x$$

の分布法則にしたがう。これを、 z 個の値が $2f_1(x)$ の曲線と $x=0$, $f_1(x)=0$ の 2 直線で囲まれた面積の中に均一な密度で分布すると考えると便利である。そうすると、 k 番めの値は、ほぼこの面積を $(z-k)/z$ の比で内分する x の値の付近に存在すると考えることができる。一方

$$\int_0^{x_k} 2f_1(x) dx = \int_{-x_k}^{x_k} f_1(x) dx = f_2(x_k)$$

であり、 $f_2(x_k)$ は、 $2f_1(x)$ と $x=0$, $x=x_k$, $f_1(x)=0$ の 3 直線で囲まれた面積を表わす。したがって、 x_k はほぼ

$$f_2(x_k) = \frac{z-k}{z} = 1 - \frac{k}{z}$$

を満足し、

$$x_k = f_2^{-1} \left(1 - \frac{k}{z} \right)$$

と書くことができる。

3. 累積ピッチ誤差の振幅の算出 たとえば、単一ピッチ誤差の標本から (11) 式によって単一ピッチ誤差の振幅 $2A$ を求めると

$$2A = 2\sqrt{2} Y$$

であり、これが $4e_0(\pi/z) \sec \alpha_0$ と等しくなる。すなわち

$$2\sqrt{2} Y = 4e_0 \frac{\pi}{z} \sec \alpha_0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。求める累積ピッチ誤差の振幅は $2e_0 \sec \alpha_0$ であるから (14) 式によって

$$2e_0 \sec \alpha_0 = \sqrt{2} \frac{z}{\pi} Y$$

となる。標本が歯みぞのふれおよび歯厚誤差である場

合にも同様に

$$2e_0 \sec \alpha_0 = 2\sqrt{2} \sec \alpha_0 Y$$

$$2e_0 \sec \alpha_0 = \frac{\sqrt{2} Y}{\sin\left(\alpha_0 - \frac{\pi}{2z}\right)}$$

が得られる。

4. **Aの推定誤差** たとえば, 統計的に最も標準的な $\sigma_t = 10\mu$, $e_0 = 19\mu$, $A = 19\mu$ の函数 200 の歯車を 3 等分した位置から, 総計 30 枚の歯について測定した歯みぞのふれの資料から A を推定すると, その

誤差は累積ピッチ誤差の最大値と最小値の差の予想値に対して, 99% の確率で 4.2%, また 90% の確率で 3.0% 以下となる. σ_t 等の他の値の場合にも推定誤差はほぼこの程度である。

文 献

- (1) 大村, 本論文集 1906ページ.
- (2) 仙波, 歯車, 第2巻, (29-11), 336, 日刊工業新聞社.
- (3) 本間・春日屋, 次元解析・最小2乗法と実験式, (昭 32-1), 270, コロナ社.

X線による土中ひずみ測定

土圧をはじめとする土質力学の諸問題において, 種々の応力状態のもとで土中の各点の変位を正確に知ることが重要なことである。これまでは供試体境界の変位を測定するにとどまっていたが, ケンブリッジ大学でX線を用いた土中ひずみ測定装置が製作された。

理論的な土質力学の基礎的な室内実験に用いるもので, 平面ひずみ状態における土中各点のひずみが測定できる。原理は, あらかじめ土中に配置しておいた鉛の散弾の移動を測定することであって, 任意の時の散弾の位置をX線撮影しておいて2枚のフィルムを重ね合わせて散弾の相対的な変位を知ることができる。装置は 90×30 cm, 厚さ 1.6 cm の2枚のガラスが 15 cm 離れて相対している空間に砂と散弾を入れ, 一方のガラスからX線を照射し他方のガラスにあてたフィルム上に散弾の像を得る。土中に散弾を置くのは注意を要する作業であって, 散弾の相互位置を規制するために高さはガラス板に引いた横線により, 水平方向の位置は特殊な型板によりそれぞれ所定の位置を保つようにしている。散弾の配置は, 一辺 2.5 cm の正方形の四すみおよび対角線の交点からなる基本形を各方向につ

らねてつくった格子状である。2枚のフィルムを重ね合わせて像の相対変位を読むためにはできるだけ鮮明な写真が要求されるが, そのためにはX線の強さ, 露出時間, フィルムの性質などを考慮した実験計画が必要である。

散弾の変位を測定するには二つの方法がある。一つは重ねたフィルムの上で2点の変位を目盛のついた顕微鏡で読む方法で, あらかじめ引いた基準線(最初の散弾の位置を結ぶ線でフィルムの上に重ねるガラスに引いておく)からの変位の角度を分度器で, 変位量を接眼鏡にきざんだ 0.05 mm きざみの目盛で読む。他の方法は重ねたフィルム的一方を移動して像が重なり合うようにしたときの移動量をフィルムわくにつけたマイクロメータにより測定するもので, 直交する二つの方向の動きを記録するがその精度は 0.025 mm である。後者の方法ではマイクロメータの部分に簡単な変換器をつけて, 変位量を電氣的にとり出し, 結果をテープにパンチするなどして半自動的に記録することができる。[Civil Engng., 58-684(1963), 873]

(日本科学技術情報センター提供)

29 巻 205 号 (昭 38-9) 正 誤 表

執 筆 者 名	ペー ジ	欄	行	誤	正
橋 本 誠 他	1 430	(11)式		$P = \int_{-l_1}^{\infty} p dx = 0$	$P = \int_{-l_1}^{\infty} p dx$
竹 山 秀 彦 他	1 488	左	10	関連をしらべた	関連性をしらべた
大 矢 根 守 哉 他	1 496	右	12	第 18 図	第 13 図
	1 497	右	14	第 2 表	第 1 表
	〃	右	16	第 2 表	第 1 表