領域の幅 $2|\xi_0|$, 負の減衰係数 m , その最大値 $m_{\max}$, 不安定振動数 P_1, P_2 は近似計算で容易に求まる[(22), (23), (24・a), (24・b), (25) 式].

(10) 減衰力が作用すると, ある程度以上非対称性 Δ が大きくないと不安定振動が発生しない(第4図, 第7章).

(11) 二つの不安定振動の振幅比は, 振幅がどんどん増大する振動の経過中もほぼ一定である(第14図).

(12) 系に減衰力が作用すると, 負の減衰係数が小

さくなり[第10, 12図], ある程度以上大きな減衰力が作用すると不安定領域は消失する(第4図, 第7章).

文 献

- (1) 山本・太田, 機械学会論文集, 28-188 (昭 37-4), 475.
- (2) 山本, 機械学会誌, 66-531 (昭 38-4), 528.
- (3) 相羽, 機械学会 第 692 回講演会前刷 (昭 36-4), 1, 5.
- (4) 山本・太田, 機械学会論文集, 28-194 (昭 37-10), 1261.

534.014.5

非線形系における差形“結合調波”振動について*

山 本 敏 男**, 林

毅**

Combination Tones of Differential Type in Nonlinear Vibratory Systems

by Toshio YAMAMOTO and Satoru HAYASHI

When two periodic disturbing forces with frequencies Ω_1 and Ω_2 ($\Omega_2 > \Omega_1$) respectively are applied to a vibratory system with the unsymmetrical spring force, the combination tones of the differential type having frequency $\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ occur.

In the present paper, the combination tones of differential type are discussed analytically and experimentally, and it is found that there are three types of the amplitude-frequency response curve of the combination tones of differential type as well as of summed type, but the relations between these types of the response curves and the ratios of the forcing frequencies $K = \Omega_2 / \Omega_1$ are different from those of the combination tones of summed type. Further by introducing the conception of the apparent external force, the phase angle and the backbone curves can be obtained, and the effect of unsymmetrical nonlinearity and damping force can be explained clearly.

1. 緒 言

ばね特性に非対称の非線形性がある振動系に, たがいに異なる振動数 Ω_1, Ω_2 の周期的外力が作用する場合, これら二つの振動数の和あるいは差, すなわち $\Omega_1 + \Omega_2$, あるいは $\Omega_2 - \Omega_1$ ($\Omega_2 > \Omega_1$) の値が振動系の固有振動数 p の値にほぼ等しくなると, 振動数 $\Omega_1 + \Omega_2$, あるいは $\Omega_2 - \Omega_1$ の振動が発生する. この種の振動は結合音⁽¹⁾ (combination tones) とよばれているが, ここでは機械的な振動系で発生する場合をとりあっている. これらの振動を“結合調波”振動とよぶことにする. 振動数が $\Omega_1 + \Omega_2$ である和形の結合調波振動についてはすでに述べたが⁽²⁾, 二つの強制外力の振動数 Ω_1, Ω_2 と発生する結合調波振動の振

動数 Ω の間に

$$\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = p \cdots \cdots (1)$$

の関係のあるいわゆる“差形結合調波”振動 (differential tone) は和形結合調波振動とはかなり振動の性質が異なっており, ここではこの差形結合調波振動について解析的, 実験的にえられた結果を述べる.

2. 運動方程式

ばね特性が線形項のほかに二次の非対称性非線形項と三次の対称性非線形項をもち, 粘性減衰が作用する1自由度の振動系に周期の異なった二つの強制外力が作用するときの運動方程式は,

$$m\ddot{X} + C\dot{X} + kX + E_1X^2 + E_2X^3 = P_0 \cos \Omega_1 t + Q_0 \cos (\Omega_2 t + \varphi) \cdots \cdots (2)$$

となる. ここに m は振動体の質量, X は振動体の変位, C は粘性減衰係数, E_1, E_2 は二次と三次の非線形

* 昭和 38 年 4 月 1 日 第 40 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 38 年 7 月 17 日.

** 正員, 名古屋大学工学部 (名古屋市千種区不老町).

項の係数, k はばね定数, P_0, Q_0 は二つの強制外力の振幅, Ω_1, Ω_2 は二つの強制外力の振動数, φ は位相角である。(2) 式を無次元化するために次の変換を行なう。

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= k/m, & a &= P_0/k, & x &= X/a, & t' &= pt, \\ c &= C/\sqrt{mk}, & \varepsilon_1 &= E_1 a/k, & \varepsilon_2 &= 3E_2 a^2/4k, \\ \omega_1 &= \Omega_1/p, & \omega_2 &= \Omega_2/p, & \omega &= \Omega/P, \\ Q_0/P_0 &= Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに p は系の固有振動数, a は力 P_0 による静たわみである。(3) 式を(2)式に代入して t' の右肩のダッシュを省略すると無次元表示による次式をうる。

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x + \varepsilon_1 x^2 + (4/3)\varepsilon_2 x^3 = P \cos \omega_1 t + Q \cos(\omega_2 t + \varphi) \dots\dots\dots (4)$$

また(1)式の関係は無次元表示では

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

となる。以下この運動方程式にもとづいて差形結合調波振動の振動数 ω が固有振動数 p にほぼ等しい場

$$\left. \begin{aligned} (1 - \omega_1^2)A + \varepsilon_1 UB \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \varepsilon_2(A^3 + 2AB^2 + 2AU^2) &= P \cos \alpha \\ -c\omega_1 A - \varepsilon_1 UB \sin(\alpha - \beta + \gamma) &= P \sin \alpha \\ (1 - \omega_2^2)B + \varepsilon_1 UA \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \varepsilon_2(B^3 + 2BA^2 + 2BU^2) &= Q \cos(\beta - \varphi) \\ -c\omega_2 B - \varepsilon_1 UA \sin(\alpha - \beta + \gamma) &= Q \sin(\beta - \varphi) \\ (1 - \omega^2)U + \varepsilon_2(U^3 + 2UA^2 + 2UB^2) &= \varepsilon_1 AB \cos(\alpha - \beta + \gamma + \pi) \\ -c\omega U &= \varepsilon_1 AB \sin(\alpha - \beta + \gamma + \pi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式において $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ を消却すると

$$\left. \begin{aligned} U^2[(1 - \omega^2) + \varepsilon_2(U^2 + 2A^2 + 2B^2)]^2 + c^2 \omega^2 &= (\varepsilon_1 AB)^2 \\ [A^2\{(1 - \omega_1^2) + \varepsilon_2(A^2 + 2B^2 + 2U^2)\} - U^2\{(1 - \omega^2) + \varepsilon_2(U^2 + 2A^2 + 2B^2)\}]^2 \\ + (c\omega_1 A^2 - c\omega U^2)^2 &= P^2 A^2 \\ [B^2\{(1 - \omega_2^2) + \varepsilon_2(B^2 + 2A^2 + 2U^2)\} - U^2\{(1 - \omega^2) + \varepsilon_2(U^2 + 2A^2 + 2B^2)\}]^2 \\ + (c\omega_2 B^2 - c\omega U^2)^2 &= Q^2 B^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

(7) 式を U, A, B について解けば共振曲線がえられる。

(7) 式の第 1 式の右辺にある $\varepsilon_1 AB$ は和形結合調波振動で述べたように見掛けの外力とよぶものである⁽²⁾。二つの外力の協同作用により, その結果として一つの強制振動を生ずる結合調波振動の場合, 二次の非線形係数 ε_1 の影響, 共振曲線の骨格曲線 (backbone curve), 強制外力と振動との間の位相差などの意味が明確でないが, この $\varepsilon_1 AB$ を強制振動の一種である和形結合調波振動に対する見掛け上の外力であると考え, これらをよく説明することができた。このことは差形結合調波振動の場合についても同様であるので, ここでも $\varepsilon_1 AB$ を見掛けの外力と考えることにする。

二つの強制外力の振動数の比 ω_2/ω_1 を K とおくと, $\omega_2 > \omega_1$ ($\Omega_2 > \Omega_1$) であるから $K > 1$ であり, ω_1, ω_2 はそれぞれ

$$\omega_1 = \omega/(K-1), \quad \omega_2 = K\omega/(K-1) \dots\dots\dots (8)$$

で表わしうる。

共振曲線を与える (7) 式において, 諸係数を $\varepsilon_1 = 0.015$, $\varepsilon_2 = 0.001$, $c = 0.002$, $P = Q = 1$ とした場合の共振曲線は, 二つの強制外力の比 $K = \omega_2/\omega_1$ の値の変化に応じて第 1 図に示すように変化する。すなわち振動数比 K は下限値 1 から ∞ までの間を変化しうるのであるが, K の値が小さくて 1 よりわずかに大きい範囲内にあるときは $\omega \approx p = 1$ の共振点付近では (8) 式からわかるように, ω_1, ω_2 は $p = 1$ に比べて大きくなり, 固有振動数 p から遠

合, すなわち $\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx p = 1$ のときに発生する差形結合調波振動をとりあつかうことにする。

3. 差形結合調波振動の共振曲線

後述する実験からも明らかなように, 差形結合調波振動はその振動数 ω が系の固有振動数 p にほぼ等しくなると, かなり大きな振幅の振動となり, 二つの強制外力による調和振動の振幅とほぼ同程度の大きさになる。したがって (4) 式に対する $\omega \approx p$ 付近の第 1 近似解として

$$x = A \cos(\omega_1 t + \alpha) + B \cos(\omega_2 t + \beta) + U \cos(\omega t + \gamma) \dots\dots\dots (5)$$

とおく。(5) 式の第 1 項, 第 2 項は強制外力によって生ずる調和振動で, 第 3 項が差形結合調波振動である。(5) 式を(4)式に代入し (1・a) 式の関係を参照しつつ, $\cos(\omega_1 t + \alpha)$, $\sin(\omega_1 t + \alpha)$, $\cos(\omega_2 t + \beta)$, $\sin(\omega_2 t + \beta)$, $\cos(\omega t + \gamma)$, $\sin(\omega t + \gamma)$ の項の係数を比較すると次式をうる。

さかることになるので調和振動の振幅 A, B は非常に小さくなり, したがって見掛けの外力 $\varepsilon_1 AB$ も小さな値となるので, 差形結合調波振動の振幅 U も小さくなり, 第1図(a)の $K=1.50$ の場合のように小さなピークをもった跳躍現象 (jump phenomena) を起さない共振曲線となる. K が大きくなり, 2 に近づくにしたがい, 強制外力の振動数 ω が p に近づき, 見掛けの外力 $\varepsilon_1 AB$ もしだいに大きくなるので, 共振曲線 U は大きなピークをもった hard spring 形の跳躍現象を生ずる共振曲線, たとえば第1図(a)の $K=1.8$ の場合のようになる.

(a) 共振曲線 (I)

(b) 共振曲線 (III)

(c) 共振曲線 (II)

$$\varepsilon_1 = 0.015, \varepsilon_2 = 0.001, c = 0.002, P = Q = 1$$

第1図 振動数比 $K = \omega_2/\omega_1$ の共振曲線への影響

三次の対称性非線形係数 ε_2 が正である今の場合は共振曲線は hard spring 形であるが, 負なら soft spring 形となる. さらに $K=2$ 付近になると後述するように全く別種の共振曲線となるが, K の値が 2.18 を越えるとふたたび第1図(a)の $K=2.25, K=2.50, K=4.00$ の場合に示すように共振曲線は跳躍現象を起す hard spring 形の曲線となる. 後述するように振動に安定なものと不安定なものがあり, 第1図において実線が安定な振動の, 点線は不安定な振動の共振曲線を示している. (a) 図には書き加えてないが調和振動の振幅 A, B は結合調波振動の振幅 U に比べてかなり小さい.

$2.10 < K < 2.18$ の範囲では共振曲線は第1図(b)のような橋状の共振曲線となる. 図中 U 曲線が結合調波振動の共振曲線で, A, B 曲線が調和振動の共振曲線である. 図において $1.05 < \omega < 1.18$ の間では一つの ω に対して三つの U の値 U_1, U_2, U_3 ($U_1 > U_2 > U_3$) が存在するが, このうち後述するように U_1, U_3 は安定で U_2 が不安定である. この図においても実線が安定, 点線は不安定な共振曲線であることを示している.

K の値が 2 に非常に近い場合は, 強制外力の振動数 ω_1 が $p=1$ にかかなり接近するので見掛けの外力は大きくなるが, 同時に差形結合調波振動の振幅を小さくする作用のある (7) 式の第1式中の $2(A^2 + B^2)$ の項も非常に大きくなるので, 第1図(b)に示すように高速側で振幅の減少が起る.

$2.0 < K < 2.10$ では第1図(b)の中央のだ円状の共振曲線が一点に縮退した後消失し, 共振曲線は第1図(c)に示すような, ならぬ丘状の曲線となり, すべて安定な振動となる. この場合には調和振動 ω_1 の振幅 A は結合調波振動の振幅 U よりはるかに大きくなる.

以上のように差形結合調波振動の共振曲線には和形の場合と同様な3種類があるが, K の値に対するその存在範囲は和形の場合とかなり異なっている.

差形結合調波振動の共振曲線の最大振幅 $U_{\max}$ と, そのときの振動数 $\omega_{\max}$ と外力の振動数比 $K = \omega_2/\omega_1$ との関係を, それぞれ実線と点線で第2図に示す. 図において AC 間 ($K > 2.18$) では共振曲線は第1図(a)の I 形の跳躍現象をとまうもので, B 点 ($K = 2.75$) で振幅 $U_{\max}$ は極小値をとる. AC 間の $U_{\max}$ の変化の様子は第3図に示す見掛けの外力の AB 間に

おける変化とほぼ同じ傾向である。第 3 図は $\omega=1$ における見掛けの外力 $|\epsilon_1 AB|$ と外力の振動数比 K の間の関係を示したものである。和形結合調波振動では

$|\epsilon_1 AB|$ は K に対して一様に増大している簡単な曲線であったが、差形の場合には図に示すように $K=2.0$ 付近で不連続となり複雑な変化をしている。

第 2 図に示すように $U_{\max}$ は B 点から K の減少にしたがって急激に増加して C 点 ($K \approx 2.18$) にいたる。CD 間 ($2.18 > K > 2.10$) では共振曲線は第 1 図 (b) の III 形となり、 $U_{\max}$ は K の減少とともに急激に減少してゆき、D 点 ($K \approx 2.10$) から第 1 図 (c) の II 形の共振曲線になる。DE 間 ($2 < K < 2.10$) では共振曲線は II 形で K の減少につれ $U_{\max}$ は減少し続け、E 点では著しく小さな値となる。 $K=2$ の場合は $\omega=\omega_1$ となり結合調波の振動数と調和振動の振動数が一致する。この場合についてはあらためて述べる。EG 間 ($1 < K < 2$) では共振曲線は再び I 形となり、 $1.75 > K > 2$ では跳躍現象をとまう共振曲線となっているが、これ以下の K の値では前述のように見掛けの外力が著しく小さくなり、したがって跳躍現象は現われない。第 2 図の点線 $\omega_{\max}$ - K 曲線は $U_{\max}$ - K 曲線の変化とほぼ同じ傾向をもっている、 $U_{\max}, \omega_{\max}$ の K に対する変化は和形の場合に比べてかなり複雑である。

第 5 図

以上は二つの強制外力の振動数比 $K=\omega_2/\omega_1$ を一定として求めた共振曲線を K の値をいろいろ変えて比較検討したのであるが、第4図は ω_1 を一定として ω_2 をかえて共振曲線を求め、いろいろの一定値 ω_1 の場合を比較したものである。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, c, P, Q$ などの諸係数は第1図の場合と同じにした。

第5図(a)は ε_2, c, P, Q を第1図の場合と同じ値にし、 $K=2.5$ におけるいろいろな ε_1 の値に対する共振曲線群を示し、あわせて不安定領域も図示した。この図から第1図(a)のI形の共振曲線の場合において ε_1 を大きくすることは一般の非線形系の強制振動において、強制力を大きくするのと同じこととなる。これは見掛けの外力の大きさが $\varepsilon_1 AB$ であることから明らかである。

第5図(b)は $K=2.5$ で $\varepsilon_1, \varepsilon_2, P, Q$ の値が第1図と同じ値のときの減衰係数 c の共振曲線に対する影響を示したものである。 c が小さければピークは大きくなり跳躍現象を起すが、非常に大きな c に対しては共振曲線は跳躍現象をともしない形になる点など、一般の非線形系における強制振動に対する減衰係数の影

(a) 位相遅れ曲線 (外力の振動数比 $K = \omega_2/\omega_1$ を一定とした場合)

(b) 位相遅れ曲線 (ω_1 を一定とし ω_2 を変化させた場合)

第 6 図

響と定性的には同じである。

差形結合調波振動の位相遅れは、和形結合調波振動の場合と同様に見掛けの外力を考えることにより、(6)式の第5, 6式から次式によって与えられる。

$$(\alpha - \beta + \gamma + \pi) = \tan^{-1} \left\{ \frac{-c\omega}{(1 - \omega^2) + \varepsilon_2(U^2 + 2A^2 + 2B^2)} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

第6図に(9)式からの計算結果を図示する。第6図(a)は第1図(a)に、第6図(b)は第4図に対応している。いずれも位相遅れの値は $\omega \ll 1$ ではほとんど零、 $\omega \gg 1$ ではほとんど π にひとしい。この点では一般の強制振動の場合と同様である。後述の骨格曲線と共振曲線の交点〔たとえば第5図(a)のA点〕に対応する位相遅れはちょうど $\pi/2$ で、安定、不安定の境界線と共振曲線の交点〔たとえば第5図(a)のB点〕に対する位相遅れは $\pi/2$ よりわずかに大きな値となる。このA, B点に対応する点を第6図においても、 $K=2.5$ の場合についてやはりA, B点として示してある。第6図(a), (b)の実線は安定な振動に、点線は不安定な振動に対応した位相遅れを示す。

(7)式の第1式の見掛けの外力 $\varepsilon_1 AB$ と減衰係数 c を零とおいた式で示される曲線を、調和振動の共振曲線における骨格曲線に対応させて差形結合調波振動の骨格曲線とすると、この曲線は(7)式の第1式から

$$(1 - \omega^2) + \varepsilon_2(U^2 + 2A^2 + 2B^2) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

となる。 $K = \omega_2/\omega_1$ をパラメータとして求めた骨格曲線を第7図に示す。(10)式は ε_1, c をふくんでないので第5図の曲線群は図に示すように骨格曲線を共有している。 $\varepsilon_2 > 1$ であるから $K=1$ の場合をのぞいて、この曲線と横軸との交点は固有振動数 $p=1$ より高い振動数領域に存在し、 $\varepsilon_2 < 0$ の場合は $p=1$ より低い所にある。骨格曲線は $1 < K < 2$ の間では ω の増加にしたがって単調に増加する曲線で、 K が大きくな

第7図 骨格曲線

るにしたがって $U=0$ の点が高速側にずれている。 $K>2.18$ での骨格曲線の形は前と同じであるが、 $U=0$ の点は $2.18<K<2.75$ では K の増加とともに低速側に移動し、 $K>2.75$ では高速側に移動している。 $2.10<K<2.18$ では骨格曲線は極大値をもつ丘状の曲線となり、第1図(b)のⅢ形の共振曲線に対応している。 $K=2.095$ で骨格曲線は一点に縮退し、 $2<K<2.095$ では存在しない。第1図(c)のⅡ形の共振曲線がこの領域での共振曲線である。

4. 差形結合調波振動の安定性について

差形結合調波振動の振幅 U 、位相遅れ γ の定常値からのわずかなずれを ξ, η とし、 ξ, η を時間の関数と考え、(5)式の U, γ の代りに $U+\xi, \gamma+\eta$ とおいたものを(4)式に代入して、 $\xi, \eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, c$ の二次以上の項を微小量として無視すると

$$\left. \begin{aligned} 2\omega U \frac{d\eta}{dt} &= \{(1-\omega^2) + \varepsilon_2(3U^2+2A^2+2B^2)\}\xi - c\omega U\eta \\ 2\omega \frac{d\xi}{dt} &= -c\omega\xi - U\{(1-\omega^2) + \varepsilon_2(U^2+2A^2+2B^2)\}\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

となり、安定条件は、

$$\left. \begin{aligned} 2\omega c &> 0 \\ c^2\omega^2 + \{(1-\omega^2) + \varepsilon_2(3U^2+2A^2+2B^2)\} \\ &\times \{(1-\omega^2) + \varepsilon_2(U^2+2A^2+2B^2)\} > 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

第8図 振動系図

となる。この振動系に作用するのは粘性減衰であり、 $c>0$ は常になりたつ。したがって(12)式の第2式を等号でおきかえたもののみが、安定域と不安定域の境界線を与える式となる。この式を書きなおすと、

$$U^2 = \frac{1}{3\varepsilon_2} [2(\omega^2-1) - 4\varepsilon_2(A^2+B^2) \pm \sqrt{\{(\omega^2-1) - 2\varepsilon_2(A^2+B^2)\}^2 - 3c^2\omega^2}] \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。この式で表わされる曲線は、結合調波振動の共振曲線への接線が垂直となる点を結んでえられる曲線でもある。このことは差形の場合においても和形の場合と同様である。減衰係数 $c=0$ のときの境界線のうち(12)式の2番めの $\{ \}$ を零とおいたものは(10)式の骨格曲線の式と一致する。また(13)式において複号中+をえらべば骨格曲線の式をうる。第5図(a)には(13)式によって求めた不安定領域が細い点線で示してある。

5. K の特殊な値に対する差形結合調波振動

外力の振動数比 $K=\omega_2/\omega_1$ ($\omega_2>\omega_1$) が有理数であれば、かならず高次の分数調波あるいは高調波振動と差形結合調波振動の振動数が一致するのであるが、そのような高次の分数調波あるいは高調波振動の振幅は高次の微小量となるから、第1近似までに考慮に入れなければならない $1/2$ 次あるいは $1/3$ 次の分数調波、あるいは高調波振動は次のようである。

第9図 ばね特性曲線

$K=1$ のとき $\omega_1:\omega_2:\omega=1:1:0$

$K=4/3$ のとき $\omega_1:\omega_2:\omega=3:4:1$ 差形結合調波振動は ω_1 の $1/3$ 次分数調波振動である。

$K=3/2$ のとき $\omega_1:\omega_2:\omega=2:3:1$ 差形結合調波振動は ω_1 の $1/2$ 次, ω_2 の $1/3$ 次分数調波振動である。

$K=2$ のとき $\omega_1:\omega_2:\omega=1:2:1$ 差形結合調波振動は ω_1 の調和振動で ω_2 の $1/2$ 次分数調波振動である。

$K=4$ のとき $\omega_1:\omega_2:\omega=1:4:3$ 差形結合調波振動は ω_1 の三次の高調波振動である。

$K=\infty$ のとき $\omega_1:\omega_2:\omega=0:1:1$ 差形結合調波振動は ω_2 の調和振動である。

$K=1$ の場合には (8) 式からわかるように $\omega_1=\infty$ となる。したがって (7) 式から $A=B=U=0$ となる。一方 $K=1$ は $\omega_1=\omega_2$ であり, 周期的外力が一つだけ振動系に加わる場合であるから (4) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + c\dot{x} + x + \varepsilon_1 x^2 + (4/3)\varepsilon_2 x^3 &= F \cos(\omega_1 t + \theta), \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{Q \sin \varphi}{P + Q \cos \varphi} \right), \\ F^2 &= P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

.....(14)

第10図 差形結合調波振動の共振曲線 (実験結果)

この方程式の解は

$$A^2 \{ (1 - \omega_1^2) + \varepsilon_3 A^2 \}^2 + c^2 \omega^2 A^2 = F^2 \dots\dots\dots (15)$$

となり結合調波振動は発生せず、したがって $U=0$ 、 $\omega_1=\infty$ のときには明らかに $A=0$ 、また単一外力であるから $B=0$ である。この場合は (7) 式からえられる解と (15) 式からえられる解とは一致しているが、その他の場合は K の値を上記のごとくおいてえられた第 1 近似解と (7) 式とは一般に一致せず、分岐現象 (bifurcation phenomenon) を生ずる。この間の事情は定性的には和形結合調波振動の場合と同じである。

6. 実験装置および実験結果

実験に用いた振動系は厚さ 1 mm、幅 10 mm、長さ 130 mm の鋼板の先に 0.0718 kg のおもりを取りつけたもので、第 8 図に示すようにコイルばね S とそ

の上方に鋼板 S' を入れてばね特性に非対称性非線形特性が与えられている。外力は強制変位として与え、

第 11 図 差形結合調波振動の共振曲線 (実験結果)

その振幅は $P_0/k=Q_0/k=0.03\text{ mm}$ である。ばね特性曲線は第9図のようになる。減衰係数は自由振動の記録から求めると $C=1.54\times 10^{-6}\text{ kg s/mm}$ で固有振動数は $p=13.6\text{ c/s}$ となった。

実験は二つの方法でおこなった。第1は $K=\Omega_2/\Omega_1$ を一定とし $\Omega=\Omega_2-\Omega_1$ を変化させて共振曲線を求め、第2には低いほうの振動数 Ω_1 を一定とし Ω_2 を変化させて共振曲線を求めた。第1の方法による実験結果は第10図に、第2の方法による結果を第11図に示してある。第10, 11図とも縦軸に差形結合調波振動の振幅をとり、横軸に差形結合調波振動の振動数 $\Omega=\Omega_2-\Omega_1$ をとってある。特に第11図では横軸に外力の振動数比 $K=\Omega_2/\Omega_1$ もとってある。

実験にもちいた振動系のばね特性は、第9図からわかるように hard spring であるので、実験でえられた共振曲線はいずれも跳躍現象をとまなう hard spring 形の共振曲線となった。 K = 一定とした第10図では $K=1.77$ の場合に最大のピークを形成し、 K をこの値より大きくするとしだいにピークは低くなって行く。また K を $K=1.77$ より小さくすると共振曲線の最大振幅は急激に減少し、差形結合調波振動は調和振動にかくれてほとんど認められなかったのが図示しなかった。一方 Ω_1 を一定とした第11図では $\Omega_1=17.86\text{ c/s}$ = 一定の場合にピークは最大となる。図からもわかるように、このときの強制外力の振動数比 $K=\Omega_2/\Omega_1$ はほぼ $K=1.7$ の値の前後で変化しており、 Ω_1 をこの値より小さくすると共振曲線のピーク

はしだいに低くなり、 Ω_1 をこの値より大きくすると最大振幅が急激に減少し、差形結合調波振動の発生は認めがたくなることなどで、 K の値の増加が Ω_1 の値の減少と対応していることを考えあわせると、第1の方法による実験結果と第2の方法による実験結果はよく一致している。

第12図はオシログラフ紙上に記録した差形結合調波振動の波形を示す。縦の太い白線はゆっくりした外力の振動数 Ω_1 を、細い白線ははやいほうの外力の振動数 Ω_2 を示している。第12図(a)は $K=1.77$ = 一定の場合でマークAごとにはほとんど同じ状態をくりかえしている。AA間の二つの外力の振動数は22と39で、発生している振動の振動数は17である。したがってこの間には $39-22=17$ の関係がある。第12図(b)の $\Omega_1=8.56\text{ c/s}$ 一定の場合ではこの関係は $34-13=21$ となっている。いずれの場合にも強制外力の振動数 $\Omega_1, \Omega_2 (\Omega_2 > \Omega_1)$ と差形結合調波振動の振動数 Ω の間には $\Omega=\Omega_2-\Omega_1$ の関係が正確になりたっていることがわかる。そのときの差形結合調波振動は(a)の場合 $\Omega=14.19\text{ c/s}$ で(b)の場合は $\Omega=13.81\text{ c/s}$ となり、いずれも系の固有振動数 $p=13.6\text{ c/s}$ よりやや大きい値となる。

hard spring の場合ピークは固有振動数より高い所に形成されることが実験的にたしかめられた。

7. 結 論

非対称性非線形ばね特性をもった1自由度の振動系

$K=1.77, \Omega_1=18.35\text{ c/s}, \Omega_2=32.53\text{ c/s}, \Omega=14.18\text{ c/s}, K=\text{一定}, \Omega_1:\Omega_2:\Omega=22:39:17$
(a)

$\Omega_1=8.56\text{ c/s}, \Omega_2=22.36\text{ c/s}, \Omega=13.80\text{ c/s}, \Omega_1=\text{一定}, \Omega_1:\Omega_2:\Omega=34:13:21$
(b)

第12図 差形結合調波振動の波形

に、振動数の異なる二つの外力が作用した場合に発生する差形結合調波振動は、次のような性質をもっている。

(1) 振動数 $\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ ($\Omega_2 > \Omega_1$) が系の固有振動数にほぼ等しくなったところで差形結合調波振動の共振曲線はピークを形成し、その振幅は調和振動の振幅に比較してかなり大きくなる。

(2) 振動数比 $K = \Omega_2 / \Omega_1$ を一定として Ω を変化させた場合、 Ω_1 (あるいは Ω_2) を一定として Ω を変化させた場合はほぼ同傾向の共振曲線群がえられる。

(3) K の値により 3 種の共振曲線をうる点は和形の場合と同様であるが、それぞれの形の共振曲線が発生する K の領域は和形の場合と非常に異なっている。

(4) 差形結合調波振動の振幅は $K=2$ 付近で大きくなり、 K の値が 2 をわずかに越えて大きくなったところで振幅は非常に小さくなる。また K の値が十分大きいときには再び振幅は大きくなる。

(5) K の値が 1 に近いときには差形結合調波振動

の振幅は調和振動の振幅とともにほとんど零であり、共振曲線はピークを形成しない。一方 $K=2$ 付近では調和振動の振幅は差形結合調波振動の振幅に比較してかなり大きくなる。

(6) 差形結合調波振動の振幅は非対称性非線形係数 ϵ_1 が大きいほど大きくなり、I 形の共振曲線ではこの ϵ_1 の値が大きく、減衰係数が比較的小さいとき跳躍現象を起す。また $\epsilon_1=0$ の場合は跳躍現象を起さない連続な共振曲線となる。

(7) 差形の場合も和形の場合と同様、見掛けの外力という考え方が有効で、これを用いて骨格曲線、位相遅れ曲線、結合調波振動の振幅の大小関係を明らかにできた。

以上の結論はすべて差形結合調波振動数 $\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ が系の固有振動数 p 付近にある場合についてのものである。

文 献

- (1) J.J. Stoker, *Nonlinear Vibrations*, (1950), 112, Interscience Publ.
- (2) 山本・中尾, 機械学会論文集, 29-197 (昭 38-1), 202.

第 10 回国際自動車技術会議 (その 2)

◇ イギリス=▽フオッグ (マイラ自動車研究組合所長)「自動車の空気抵抗とところがり抵抗の測定」▽A. E. モウルトン (モウルトン開発会社)「4 輪車および 2 輪車のゴム懸架」▽R. H. マクミラン (ウェールズ大学, スウォンジー大学教授)「自動車における無段変速機構の制御と、この機構を利用した蓄力装置への可能性」▽J. H. ピッチフォード (前 FISITA 会長, リカード会社顧問)「自動車用小形ディーゼル機関をばむものはなにか」▽L. J. リチャーズ (シェル石油研究所)「潤滑油の発達と機関設計」。

◇ アメリカ=▽L. レイモンド (ソコニ・モビール石油研究所長, 元 SAE 会長)「自動車と大気汚染」▽W. E. マイヤー (ペンシルバニア大学)「スキッド防止に関する研究」▽J. M. スミス (アルコア会社)「自動車用アルミ・エンジンの設計、製作およびその合理性」▽F. D. ベルステッタ (エチル会社)「自動車にもっとも満足できるオクタン価について」▽K. P. イエイツ (ピュアー石油会社)「気化器の帯電効果とその清浄作用」

◇ ベルギー=▽F. P. マルスヘルト (自動車検定協会, ベルギー支部長)「自動車の検査技術」

◇ スペイン=▽W. P. リカルト (スペイン自動車

技術中央研究所長)「強力ブレーキ」▽V. ブュアン (航空工学技師)「車両の転覆 およびすべりに対する統一的安定判別」

◇ オランダ=▽H. H. J. ルドフ (ファンデルネ自動車会社)「乗用車用無段自動変速機」

【ティー・トークス】

(1) 「自動車におけるガスタービンの将来性」アメリカのカリフォルニア州立大教授スタークマン, スペインのサンチェス・タリファほか, (2) 「サービス・フリー乗用車の設計」アメリカ, フォード会社取締役国際技術部長クーンほか 2 名。

なお、日本側の役員つぎのとおり

▽議長=浅原源七, ▽自動車技術会会長=荒牧寅雄
▽組織委員会委員長=吉城肇樹, ▽運営委員会委員長=前田利一, ▽財務委員会委員長=豊田英二, ▽学術委員会委員長=川田正秋, ▽広報委員会委員長=新山春雄, ▽婦人委員会委員長=豊田寿子, ▽京都委員会委員長=渡辺輝雄。

また、同会議の事務局は東京都千代田区四番町四, 日本染色会館自動車技術会市ヶ谷事務所内である。

(服 部 敏 夫)