531.383.011

フ リ ー ジャ イ ロ の 章 動 に よ る ド リ フ ト *

三 浦 宏 文 **

Drift of Free-Gyro Caused by Nutation

by Hirofumi MIURA

A method of solution applying Hamilton's canonical equations is outlined for the equation of motion of free vibration of a two-gimbal gyro.

The term of main interest is the term in the solution for the outer gimbal which is proportional to time and indicates a steady rate of change of the central position of the oscillations of the outer gimbal.

To solve the equation of motion of free vibration of a free gyro, B.T. Plymale and R. Goodstein used a classical, well established perturbation method at the expense of any physical significance and they got an approximate solution of the steady-rate term of the outer gimbal of a free gyro subjected to an impulse. The author gets the steady-rate term in the form of the series for any initial conditions.

By using phase-plane he could show with physical significance that the solution of the inner gimbal is a periodic function of time and the solution of the outer gimbal is the sum of the periodic term and steady-rate term.

1. 緒 言

本論文はフリースジャイロ(3自由度をもつジャイロスコープ)の自由振動についての報告である。

フリースジャイロでは、章動によりドリフト(ジャイロロータの回転軸の方向が絶対空間に対して時間の経過に従って移動してゆくこと)が発生することが見出されている⁽³⁾⁽⁴⁾。このドリフトレート(drift-rate ドリフトの速度)について特に詳しく検討する。

B.T. Plymale と R. Goodstein はフリースジャイロのラグランジュ運動方程式に摂動法を応用することにより特別な場合のドリフトレートの近似値を求めた⁽¹⁾⁽²⁾。Kurt Magnus も彼らとは別によく似た方法によってドリフトレートを計算している⁽⁵⁾。

しかしそれらは、不完全なものであり、物理的意味の不明確な点がある。著者はハミルトン正準方程式から出発して、一般的な場合のドリフトレートの値を得た。また位相平面を用いてフリースジャイロの章動によるドリフトの物理的意味を明確にはあくした。

記 号

- A: 外わくの外わく回転軸まわり慣性モーメント
B: 外わくの内わく回転軸まわり慣性モーメント
C: 外わくの平面に垂直な軸まわりの慣性モーメント

ント

- D: 内わくの内わく回転軸まわりの慣性モーメント
E: 内わくのロータ回転軸まわりの慣性モーメント
F: 内わくの平面に垂直な軸まわりの慣性モーメント

- G: ロータのロータ回転軸まわりの慣性モーメント
H: ロータの回転軸と直角な軸まわりの慣性モーメント

t: 時間

 φ : 外わくの角変位 θ : 内わくの外わくに対する角変位 ψ : ロータの内わくに対する角変位 θ_0 : θ の初期値 φ_0 : φ の初期値 $\dot{\varphi}$: $\dot{\varphi}$ の初期値 $\dot{\theta}$: $\dot{\theta}$ の初期値 $\bar{\varphi}$: ドリフトレート

2. フリースジャイロの章動

本論文で対象とするジャイロは第1図に示すようなフリースジャイロである。回転輪(ロータ)、内わく、外わくはそれぞれの回転軸のまわりに完全につりあいととられていて、すべての重心は三つの回転軸の交点と一致している。また、すべての軸受部には摩擦がないものとする。

* 昭和38年4月2日 第40期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和38年4月11日。

** 准員, 東京大学大学院(東京都文京区本富士町1)。

このような条件を満たしているならば、ロータが回転しているときに、内わく、外わくを静止させれば、外からトルクを与えぬ限りロータの回転軸の方向は絶対空間に対して静止しつづける。このとき、内わくか外わくに衝撃を与える (φ か θ に初速度 Ω または A を与える) と、ぶるぶると震えるようにロータ回転軸は空間に円すいを描く。

すなわち、第 1 図に示したようにロータ回転軸 Z はある軸 Z' のまわりに $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と巡回する。この運動をフ リ ー ジ ャ イ ロ の 章 動 (nutation) という。この系にはエネルギーの散逸するところはないから、運動はいつまでも続く。

この運動がいつも同じところで行なわれるならば、すなわち、ロータ回転軸がいつも同じ軌道を通るならばドリフトは生じない。

ところが精密な実験などの結果、ロータ回転軸の先端が描く図形 BCDA は絶対空間に対して固定したものでなく、徐々に移動してゆくことが確かめられている⁽¹⁾⁽²⁾。

第 1 図ではロータ回転軸の描く図形を閉曲線として描いてあるが、実際には、 A から出発すれば再び A へもどることはないのである。

この運動は内わくと外わくのおのおのの振動の合成として考えることができるが、内わくの角変位 θ はある一定位置を中心に振動し、外わくの角変位 φ の振動中心のみが一定速度で移動することも測定されている。この移動速度をドリフトレート ($\dot{\varphi}$) と呼ぶ。

一般にドリフトの原因とされている不つりあいトルクとか軸受摩擦などの付加トルクがなくても、このようなドリフトが生ずるということは、特に精度を要求されるジャイロ機器においては注意すべきことである。

前記 R. Goodstein らは摂動法を用いて、ドリフトレートを計算したが、計算の途中に φ, θ が永年項を含むこととなり、厳密さを欠いている。

また、計算が複雑であるため、一部分だけしか計算しないで、誤った結論を導いているので、著者はもっと簡潔な計算法を用いてこれを修正せんとするものである (最後の 7. 結論 を参照)。

3. 摂動法による解 (B. T. Plymale, R. Goodstein の方法)

摂動法によるドリフトレートの算出について簡単に説明する。

第 1 図の系のラグランジュ運動方程式は次のとおり。

$$[A+E+(F+H-E)\sin^2\theta]\ddot{\varphi}-Gs\ddot{\theta}\sin\theta+2(F+H-E)\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta=0 \quad (1)$$

$$(D+H)\ddot{\theta}+Gs\dot{\varphi}\sin\theta-(F+H-E)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=0 \quad (2)$$

$$\dot{\varphi}+\dot{\theta}\cos\theta=s(=\text{const.}) \quad (3)$$

初期条件を次のようにおく

$$t=0 \text{ にて } \varphi=\varphi_0, \theta=\theta_0, \dot{\varphi}=\Omega, \dot{\theta}=0, \Omega \ll \dot{\varphi} \text{ と仮定し, } \varphi, \theta \text{ の解を次のような形に表わす.}$$

$$\varphi=\varphi^0+\varphi'\Omega+\varphi''\Omega^2 \quad (\Omega^3 \text{ 以上の項は省略}) \quad (4)$$

$$\theta=\theta^0+\theta'\Omega+\theta''\Omega^2 \quad (\Omega^3 \text{ 以上の項は省略}) \quad (5)$$

ここで、 $\varphi^0, \varphi', \varphi'', \theta^0, \theta', \theta''$ は時間 t の関数である。(4), (5) 式を (1), (2) 式に代入し、各式において左右両辺の Ω の同次項を等しく置くことにより $\varphi^0, \varphi', \dots$ などを求めてゆく。

φ, θ は初期条件として上記のものを満たさねばならない。まずこのことから φ^0, θ^0 の満たすべき初期条件は

$$t=0 \text{ にて } \varphi^0=\varphi_0, \theta^0=\theta_0, \dot{\varphi}^0=0, \dot{\theta}^0=0$$

この初期条件より定められる φ^0, θ^0 の解は

$$\varphi^0=\varphi_0, \theta^0=\theta_0 \quad (6)$$

Ω に関する項の係数比較より次の方程式を得る。

$$I_0\ddot{\varphi}'-Gs\dot{\theta}'\sin\theta_0=0 \quad (7)$$

$$I_1\ddot{\theta}'+Gs\dot{\varphi}'\sin\theta_0=0 \quad (8)$$

ここで $I_0=A+E+(F+H-E)\sin^2\theta^0$

$$I_1=D+H$$

φ', θ' についての初期条件は

$$t=0 \text{ にて } \varphi'=0, \dot{\varphi}'=1, \dot{\theta}'=0, \theta'=0$$

ゆえに φ', θ' は次のようになる。

$$\varphi'=\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} \quad (9)$$

$$\theta'=\frac{I_0}{Gs\sin\theta_0}(\cos\omega_n t-1) \quad (10)$$

第 1 図

$$\text{ただし } \omega_n = \frac{Gs \sin \theta_0}{\sqrt{I_0 I_i}}$$

φ'', θ'' についての初期条件は $t=0$ にて $\varphi'' = \dot{\varphi}'' = \theta'' = \dot{\theta}'' = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \varphi'' = & \frac{\sin \omega_n t}{Gs \cos \theta_0 \omega_n} [2I_0 \cot \theta_0 - 3(F+H-E) \sin \theta_0 \cos \theta_0] \\ & + \frac{\sin 2\omega_n t}{Gs \cos \theta_0 \omega_n} \left[\frac{3}{4} (F+H-E) \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{4} I_0 \cot \theta_0 \right] \\ & + \frac{t \cos \omega_n t}{Gs \sin \theta_0} [(F+H-E) \sin \theta_0 \cos \theta_0 - I_0 \cot \theta_0] - \frac{t(A+E) \cos \theta_0}{2Gs \sin^2 \theta_0} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta'' = & \frac{1}{I_i \omega_n^2} \left[\frac{3}{2} (F+H-E) \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{5}{4} \cot \theta_0 \right] \\ & + \frac{\cos \omega_n t}{I_i \omega_n^2} [-(F+H-E) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + I_0 \cot \theta_0] \\ & + \frac{\cos 2\omega_n t}{I_i \omega_n^2} \left[-\frac{1}{2} (F+H-E) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{1}{4} I_0 \cot \theta_0 \right] \\ & - \frac{t \sin \omega_n t}{I_i \omega_n} [-(F+H-E) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + I_0 \cot \theta_0] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

(12) 式で見ると、内わくの振動中心の移動はない。外わくの振動中心の移動を表わす項は (11) 式の最後の項である。移動速度を $\bar{\varphi}$ (ドリフトレート) と表わすと

$$\bar{\varphi} = -\frac{(A+E) \cos \theta_0}{2Gs \sin^2 \theta_0} \Omega^2 \dots\dots\dots (13)$$

これが、初期条件として外わくに Ω の初期速度を与えた場合のドリフトレートである。これと同様に内わくに初期速度 A を与えた場合、すなわち下記の初期条件の場合のドリフトレートは (14) 式のように求まる。

$$t=0 \text{ にて } \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = 0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = A$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{Gs \cos \theta_0}{2I_0 \omega_n^2} \left(\frac{A+E}{I_0} \right) A^2 \dots\dots\dots (14)$$

(13), (14) 式のようにドリフトレートが計算されたとはいうものの、(11), (12) 式において、いわゆる永年項がはいっているのは不可解である。この永年項が出るような計算方法でなければ、ドリフトレートが導かれないというのも厳密さを欠くものである。

K. Magnus の解も不完全なことはこれと同様であり、物理的な現象との対応が不鮮明である。この不完全さを除くのが次に述べる著者の計算方法である。

4. 正準方程式

第1図の系の正準方程式を導く。ラグランジュ関数 (Lagrangian) を L とすると

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} [G(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + (H+D)\dot{\theta}^2 \\ & + (H+F-E)\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + (A+E)\dot{\varphi}^2] \dots\dots (15) \end{aligned}$$

一般座標は φ, θ であり、それぞれの共役角運動量を p_φ, p_θ とする。

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = G(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = & G(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta \\ & + (H+F-E)\dot{\varphi} \sin^2 \theta + (A+E)\dot{\varphi} \dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (H+D)\dot{\theta} \dots\dots\dots (18)$$

(16), (17), (18) 式より $\dot{\varphi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}$ を $p_\varphi, p_\varphi, p_\theta, \varphi, \varphi, \theta$ で表わすと、

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{G} - \frac{(p_\varphi - p_\varphi \cos \theta) \cos \theta}{(A+E) + (H+F-E) \sin^2 \theta} \dots\dots (19)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\varphi \cos \theta}{(A+E) + (H+F-E) \sin^2 \theta} \dots\dots\dots (20)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{H+D} \dots\dots\dots (21)$$

ハミルトン関数 (Hamiltonian) を $H(\theta, \varphi, \varphi, p_\theta, p_\varphi, p_\varphi)$ とすると

$$\begin{aligned} H = & p_\varphi \dot{\varphi} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_\varphi^2}{G} \right. \\ & \left. + \frac{(p_\varphi - p_\varphi \cos \theta)^2}{(A+E) + (H+F-E) \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{H+D} \right\} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

第1図の系の正準方程式は (19)~(21) 式と次の (23)~(25) 式の6式である。

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \therefore p_\varphi = \text{const.} \dots\dots\dots (23)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \therefore p_\varphi = \text{const.} \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta = & -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ = & \frac{\sin \theta (p_\varphi - p_\varphi \cos \theta) \{ (H+F-E)p_\varphi - (A+H-F)p_\varphi \}}{\{(A+E) + (H+F-E) \sin^2 \theta\}^2} \dots\dots (25) \end{aligned}$$

(23) 式はロータ回転速度が一定であることを示し、
(24) 式はこの系の角運動量の外わく回転軸方向の成分が不変であることを示す(全角運動量は変化する)。
ハミルトン関数について調べると次のことがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial H}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial H}{\partial p_{\psi}} \dot{p}_{\psi} \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} \dot{p}_{\varphi} + \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} \dot{p}_{\theta} \\ &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \left(\frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} \right) + \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} \left(-\frac{\partial H}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore H(\theta, \psi, \varphi, p_{\theta}, p_{\psi}, p_{\varphi}) = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (26)$$

この系の運動について論ずるには、変数が6個($\theta, \varphi, \psi, p_{\theta}, p_{\psi}, p_{\varphi}$)であるから、(19)~(21)式、(23)~(25)、(26)式の内から六つの関係式を用いれば良い。
ここでは次の六つを用いる。

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\psi}} = \frac{p_{\psi}}{G} - \frac{(p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta) \cos \theta}{a + b \sin^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta}{a + b \sin^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{c} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$p_{\psi} = G \cos \theta + b \psi \sin^2 \theta + a \dot{\varphi} = C_1 \text{ (一定)} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$p_{\varphi} = G(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = Gs \text{ (一定)} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{(p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta)^2}{a + b \sin^2 \theta} + \frac{p_{\theta}^2}{c} = C_2 \text{ (一定)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし $a = A + E$

$$b = H + F - E$$

$$c = H + D$$

また初期条件を

$t=0$ にて $\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = \Omega, \dot{\theta} = A$ とすると、

$$C_1 = G \cos \theta_0 + b \Omega \sin^2 \theta_0 + a \Omega \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$C_2 = (a + b \sin^2 \theta_0) \Omega^2 + c A^2 \quad \dots\dots\dots (34)$$

(32) 式は系の運動エネルギーが一定であることを示す。

5. 位 相 平 面

まず、 φ, θ の変化するようすを位相平面上の軌跡により考えてゆく。このとき φ は方程式に含まれて

第 2 図

いないから、 $(\dot{\theta}, \theta), (\dot{\varphi}, \varphi)$ を座標と考える。したがって、 θ に関しては普通の位相平面軌跡であるが、 φ に関しては少し異なったものである。(28)、(29)、(32) 式より

$$\dot{\varphi} = \frac{C_1 - G \cos \theta}{a + b \sin^2 \theta} = f(\theta) \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{1}{c} \left\{ C_2 - \frac{(C_1 - G \cos \theta)^2}{a + b \sin^2 \theta} \right\}} = g(\theta) \quad \dots\dots\dots (36)$$

(35)、(36) 式を $(\theta, \dot{\varphi}), (\theta, \dot{\theta})$ を座標として図示すると第 2 図を得る。

θ の状態点は曲線 $\dot{\theta} = g(\theta)$ 上に矢印の方向に動くから、 θ は明らかに t の周期関数となるはずである。この周期を T とする。

一方 φ は θ の値が 3 と 4 の間を往復する間に 1 から 2 の間を変化する。したがって、 φ はあきらかに周期 T の周期関数である。

$t=t_1$ における $\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}$ の値を $\theta_{t1}, \dot{\theta}_{t1}, \varphi_{t1}, \dot{\varphi}_{t1}$ とし、時間が T 秒経過するごとの各値の変化は第 1 表のようになる。

φ は他の 3 変数と違って、 t の周期関数であるとはいえない。しかし、次式が成り立つ。

$$\varphi_{ti} = \varphi_{ti-T} + \int_{ti-T}^{ti} \dot{\varphi} dt$$

ここで $\dot{\varphi}$ は周期 T の周期関数であるから

$$\int_{t1}^{t2} \dot{\varphi} dt = \int_{t2}^{t3} \dot{\varphi} dt = \dots = \int_{ti-T}^{ti} \dot{\varphi} dt = \dots = \text{const.}$$

$$\therefore \varphi_{ti} - \varphi_{ti-T} = \text{const.}$$

$$\therefore \varphi_{t2} - \varphi_{t1} = \varphi_{t3} - \varphi_{t2} = \dots$$

$$= \varphi_{tn} - \varphi_{t(n-1)} = \dots = \varphi_T \quad \dots\dots\dots (37)$$

(37) 式の φ_T とは 1 周期 (θ に関して) に変化する φ の値である。

第 1 表

t	θ	$\dot{\theta}$	φ	$\dot{\varphi}$
t_1	θ_{t1}	$\dot{\theta}_{t1}$	φ_{t1}	$\dot{\varphi}_{t1}$
$t_2 = t_1 + T$	$\theta_{t2} = \theta_{t1}$	$\dot{\theta}_{t2} = \dot{\theta}_{t1}$	$\varphi_{t2} = \varphi_{t1}$	$\dot{\varphi}_{t2} = \dot{\varphi}_{t1}$
$t_3 = t_1 + 2T$	$\theta_{t3} = \theta_{t1}$	$\dot{\theta}_{t3} = \dot{\theta}_{t1}$	$\varphi_{t3} = \varphi_{t1}$	$\dot{\varphi}_{t3} = \dot{\varphi}_{t1}$
.....				
$t_n = t_1 + (n-1)T$	$\theta_{tn} = \theta_{t1}$	$\dot{\theta}_{tn} = \dot{\theta}_{t1}$	$\varphi_{tn} = \varphi_{t1}$	$\dot{\varphi}_{tn} = \dot{\varphi}_{t1}$

第 3 図

第1表および(37)式を考慮して、 φ を t の関数として図に描くと、第3図のようになることがわかる。すなわち次の式で表わされる。

$$\varphi = \bar{\varphi}t + \phi(t) \quad (38)$$

一方、 φ は θ の関数として、次のように表わすことができる。

$$\varphi = \int_0^t \dot{\varphi} dt = \int_0^t f(\theta) dt = \int_0^\theta \frac{f(\theta)}{\dot{\theta}} d\theta = \int_0^\theta \frac{f(\theta)}{g(\theta)} d\theta$$

$$\bar{\varphi}; \quad \frac{\varphi_T}{T} (= \text{const.}) \quad (39)$$

$$\phi(t); \quad t \text{ の周期関数, 周期は } T \quad (40)$$

(38)式より、 $\bar{\varphi}$ にドリフトを発生させるのは(38)式の第1項のみであり、一定速度で発生するものであることがわかる。 $\bar{\varphi}$ は次式により求められる。

$$\bar{\varphi} = \frac{(1 \text{ 周期における } \varphi \text{ の増加})}{(\text{周期})}$$

$$= \frac{\int_t^{t+T} \dot{\varphi} dt}{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}} = \frac{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{f(\theta)}{|g(\theta)|} d\theta}{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{|g(\theta)|}} = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(C_1 - Gs \cos \theta) d\theta}{\sqrt{\{C_2(a + b \sin^2 \theta) - (C_1 - Gs \cos \theta)^2\} (a + b \sin^2 \theta)}}}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{C_2 - \frac{(C_1 - Gs \cos \theta)^2}{a + b \sin^2 \theta}}}} = \frac{\varphi_T'}{T'} \quad (41)$$

6. ドリフトレートの計算

(41)式の θ についての積分を $\cos \theta$ についての積分に変換することは容易である。すなわち

$$d\theta = -\frac{d(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (42)$$

を用いれば良い。

$$\cos \theta = \cos \theta_0 + x \quad (43)$$

とおけば、(41)式に含まれる各項は次のように書ける。

$$C_1 - Gs \cos \theta = \delta - \varepsilon x \quad (44)$$

$$C_2(a + b \sin^2 \theta) - (C_1 - Gs \cos \theta)^2 = -\alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (45)$$

$$\alpha = bC_2 + G^2 s^2 \quad (46)$$

$$\beta = 2Gs(C_1 - Gs \cos \theta_0) - 2bC_2 \cos \theta_0 \quad (47)$$

$$\gamma = C_2(a + b \sin^2 \theta_0) - (C_1 - Gs \cos \theta_0)^2 \quad (48)$$

$$\delta = C_1 - Gs \cos \theta_0 \quad (49)$$

$$\varepsilon = Gs \quad (50)$$

$$\sqrt{a + b \sin^2 \theta} = \sqrt{a + b \sin^2 \theta_0} \{1 - Kx - Lx^2 - Mx^3 - Nx^4 - \dots\} \quad (51)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + b \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{a + b \sin^2 \theta_0}} \{1 + Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \dots\} \quad (52)$$

$$K = \frac{b \cos \theta_0}{a + b \sin^2 \theta_0} \quad (53)$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{b}{a + b \sin^2 \theta_0} + \frac{1}{2} \frac{b^2 \cos^2 \theta_0}{(a + b \sin^2 \theta_0)^2} \quad (54)$$

$$M = \frac{1}{2} \frac{b^2 \cos \theta_0}{(a + b \sin^2 \theta_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{b^3 \cos^3 \theta_0}{(a + b \sin^2 \theta_0)^3} \quad (55)$$

$$N = \frac{1}{8} \frac{b^2}{(a + b \sin^2 \theta_0)^2} + \frac{3}{4} \frac{b^3 \cos^2 \theta_0}{(a + b \sin^2 \theta_0)^3} + \frac{5}{8} \frac{b^4 \cos^4 \theta_0}{(a + b \sin^2 \theta_0)^4} \quad (56)$$

$$P = \frac{b \cos \theta_0}{a + b \sin^2 \theta_0} \quad (57)$$

$$Q = \frac{1}{2} \frac{b}{a + b \sin^2 \theta_0} + \frac{3}{2} \frac{b^2 \cos^2 \theta_0}{(a + b \sin^2 \theta_0)^2} \quad (58)$$

$$R = \frac{3}{2} \frac{b^2 \cos \theta_0}{(a+b \sin^2 \theta_0)} + \frac{5}{2} \frac{b^3 \cos^3 \theta_0}{(a+b \sin^2 \theta_0)^3} \quad (59)$$

$$S = \frac{3}{8} \frac{b^2}{(a+b \sin^2 \theta_0)^2} + \frac{15}{4} \frac{b^3 \cos^2 \theta_0}{(a+b \sin^2 \theta_0)^3} + \frac{35}{8} \frac{b^4 \cos^4 \theta_0}{(a+b \sin^2 \theta_0)^4} \quad (60)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta_0} \{1 + Vx + Wx^2 + Yx^3 + Zx^4 + \dots\} \quad (61)$$

$$V = \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \quad (62)$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_0} + \frac{3}{2} \frac{\cos^2 \theta_0}{\sin^4 \theta_0} \quad (63)$$

$$Y = \frac{3}{2} \frac{\cos \theta_0}{\sin^4 \theta_0} + \frac{5}{2} \frac{\cos^3 \theta_0}{\sin^6 \theta_0} \quad (64)$$

$$Z = \frac{3}{8} \frac{1}{\sin^4 \theta_0} + \frac{15}{4} \frac{\cos^2 \theta_0}{\sin^6 \theta_0} + \frac{35}{8} \frac{\cos^4 \theta_0}{\sin^8 \theta_0} \quad (65)$$

以上の (44)~(65) 式を (41) 式の $\varphi_{T'}$, T' に代入して次式を得る.

$$\varphi_{T'} = \frac{1}{\sin \theta_0 \sqrt{a+b \sin^2 \theta_0}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2 + \phi_3 x^3 + \phi_4 x^4 + \dots)}{\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} dx \quad (66)$$

$$T' = \frac{\sqrt{a+b \sin^2 \theta_0}}{\sin \theta_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(T_0 + T_1 x + T_2 x^2 + T_3 x^3 + T_4 x^4 + \dots)}{\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} dx \quad (67)$$

$$\phi_0 = \delta \quad (68)$$

$$\phi_1 = \delta(P+V) - \varepsilon \quad (69)$$

$$\phi_2 = \delta(PV+Q+W) - \varepsilon(P+V) \quad (70)$$

$$\phi_3 = \delta(R+Y+VQ+PW) - \varepsilon(PV+Q+W) \quad (71)$$

$$\phi_4 = \delta(S+Z+VR+PY+QW) - \varepsilon(R+Y+VQ+PW) \quad (72)$$

$$T_0 = 1 \quad (73)$$

$$T_1 = V - K \quad (74)$$

$$T_2 = W - L - VK \quad (75)$$

$$T_3 = Y - M - KW - VL \quad (76)$$

$$T_4 = Z - N - KY - VM - LW \quad (77)$$

$$x_1 = \frac{1}{2\alpha} (\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}) \quad (78)$$

$$x_2 = \frac{1}{2\alpha} (\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}) \quad (79)$$

(66), (67) 式は初等関数の積分であるから容易に実行できる.

$$\bar{\phi} = \frac{\varphi_{T'}}{T'} = \frac{1}{a+b \sin^2 \theta_0} \times \frac{m_0 \phi_0 + m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2 + m_3 \phi_3 + m_4 \phi_4 + \dots}{m_0 T_0 + m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 + m_4 T_4 + \dots} \quad (80)$$

$$m_0 = 1 \quad (81)$$

$$m_1 = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (82)$$

$$m_2 = \frac{3}{8} \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\alpha} \quad (83)$$

$$m_3 = \frac{5}{16} \frac{\beta^3}{\alpha^3} + \frac{3}{4} \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} \quad (84)$$

$$m_4 = \frac{35}{128} \frac{\beta^4}{\alpha^4} + \frac{15}{16} \frac{\beta^2 \gamma}{\alpha^3} + \frac{3}{8} \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \quad (85)$$

(80) 式に (33), (34), (46), (50), (53)~(60), (68)~(77) 式を代入すると

$$\bar{\phi} = l_1 \Omega^2 + l_2 \Lambda^2 + l_3 \Omega^3 + l_4 \Omega \Lambda^2 + (\Omega, \Lambda \text{ について四次以上の項}) \quad (86)$$

$$l_1 = -\frac{a \cos \theta_0}{2Gs \sin^2 \theta_0} \quad (87)$$

$$l_2 = -\frac{ac \cos \theta_0}{2Gs(a+b \sin^2 \theta_0) \sin^2 \theta_0} \quad (88)$$

$$l_3 = -\frac{\left[\frac{a^2(2-\sin^2 \theta_0)}{+ab \sin^2 \theta_0(1-\sin \theta_0)(4-\sin \theta_0)} \right]}{2G^2 s^2 \sin^4 \theta_0} \quad (89)$$

$$l_4 = -\frac{\left[\frac{ac\{a(2-\sin^2 \theta_0) + b(1-\sin \theta_0)(4-\sin \theta_0)\}}{2G^2 s^2 \sin^4 \theta_0(a+b \sin^2 \theta_0)} \right]}{2G^2 s^2 \sin^4 \theta_0(a+b \sin^2 \theta_0)} \quad (90)$$

(86) 式が, 正準方程式から求められたドリフトレートである. (86) 式の第 1 項は (13) 式と第 2 項は (14) 式と一致する.

7. ま と め

(1) 本論文の第 1 の目的であったジャイロのドリフトレートは (86) 式の形で求められたことになる.

摂動法においては, 初期速度が, 内わく, 外わくのいずれか一方のみに働いた場合以外は計算が非常に複雑となる. 著者が用いたこの方法では, 計算過程が簡単で, しかも, 精度を高めるためには $[\Omega, \Lambda]$ についての高次の項まで (86) 式で計算するためには] 非常に有効であることがわかる.

(2) B. T. Plymale, R. Goodstein, K. Magnus, Лунц⁽⁶⁾などは, (13), (14) 式の形のドリフトレートを求めることにより, $\theta_0=90^\circ$ の場合は章動によるドリフトは発生せぬと結論した。

しかし, (89), (90) 式は $\theta_0=90^\circ$ のときも 0 にはならず, ドリフトは発生することは明らかであり, この点においては, 本論文の解は前者のものを改良したと思う。

(3) (35), (36) を図に描くと第2図が得られるのであるが, この図より, θ は完全な周期運動であることがはっきりわかる。これは (36) 式の $\dot{\theta}$ のグラフが θ 軸に関して対称であることからめいりょうである。

また, ϕ がやはり周期関数であることも明らかとなった。したがって, φ の発散項は t の一次式で表わされることとなり [(38) 式参照], 文献 (1), (2) における φ, θ の解の中に, 永年項がはいっているのは誤りであることがわかる。そして, φ の発散項が存在するのは, $\dot{\phi}$ のグラフが θ に関して非対称でありゆがんだ曲線となっているのが, $\bar{\varphi}$ の発生する原因であることがわかる。たとえば, 内わく, 外わくの慣性がな

い場合とか, 微小項 ($\Omega, A, \phi, \dot{\theta}$ など) の一次のみしかとらない場合は $g(\theta)$ は円に, $f(\theta)$ は直線となり, $\bar{\varphi}=0$ となる。

(4) 高速飛しょう体の誘導機器などの検出部として用いられるジャイロは, 超精密に仕上げられ, 機械的な原因による外乱 (軸受摩擦とか, 不つりあい) トルクは極度に小さくなっているが, 本論文で検討したような, 純力学的な原因によるドリフトは不可避であるので, 特に深く検討しておかねばならないと思われる。

本研究にあたり, 終始, ご激励, ご指導を賜った東京大学 渡辺 茂教授に深く感謝の意を表させていただきます。

文 献

- (1) B. T. Plymale & R. Goodstein, *J. Appl. Mech.*, **22** (1955), 365.
- (2) R. Goodstein, *Trans. ASME, Ser. E*, **26-3** (1959), 349.
- (3) R. N. Arnold, *Chart. Mech. Engr.*, **8** (1961-10), 480.
- (4) R. N. Arnold & L. Maunder, *Gyro Dynamics*, (1961), 281, Academic Press.
- (5) Kurt Magnus, *Z. AMM*, **35** (1955), 23.
- (6) Я. Л. Лунц, *Р.М.М.* **24-4** (1960), 763.

29 卷 206 号 (昭 38-10) 正 誤 表

執 筆 者	ページ	欄	行	誤	正
松 崎 淳	1616	左	20	ここは	ここに
	1619	右	(44)式	$\sqrt{4c\left(\frac{A_p^2}{m} + b'gk_p - (b'gc + k_p)^2\right)}$	$\sqrt{4c\left(\frac{A_p^2}{m} + b'gk_p\right) - (b'gc + k_p)^2}$
	〃	〃	(45)式	$\sqrt{4c\left(\frac{A_p^2}{m} + b'gk_p\right) - (b'gc + k_p)^2}$	$\sqrt{4c\left(\frac{A_p^2}{m} + b'gk_p\right) - (b'gc + k_p)^2}$
	1624	右	下 10	〔質問〕(2)の最後に次のことばを入れる: (付図 2)	
竹 内 勝 治	1625	右	5	た小とえば	たとえば
	1627	右	25	切欠きである	切欠きである。
世古口 言 彦 他	1629	第5図	縦 軸	σ/ρ	応力 σ
	1719	第6図	図説明	……および度かわき X_0 ……	……およびかわき度 X_0 ……
	1723	付図1	横 軸	$t/T_e \ln Y$	$t/T_e \ln Y_0$
	〃	付図2	縦 軸	$\int qdt/\nabla d$	$\int g_0 dt/\Delta p$
	〃	〃	横 軸	$t/T_e \ln Y$	$t/T_e \ln Y_0$
	〃	付図5	縦 軸	$-\frac{1}{T_e} \int \frac{q_s}{\Delta d} dt$	$-\frac{1}{T_e} \int \frac{g_s}{\Delta p} dt$
	1724	左	4	q の応答にはパルスがはいるので $\int qdt$ で表わしたほうがよいと思う。	g_0 の応答にはパルスがはいるので $\int g_0 dt$ で表わしたほうがよいと思う。