534.114.011

U 形 棒 の そ の 面 内 の 振 動*

高 橋 伸**

Vibration of a U-bar in its Plane

by Shin TAKAHASHI

The vibration of a U-bar which occurs in its plane is studied. The U-bar is consisted of one circular arc bar and two straight bars or of three straight bars. The ends of U-bar are built in and the material and the sectional dimensions of two legs are homogeneous and uniform respectively. The frequency equations and the boundary values are obtained by minimizing the Lagrangian. The frequencies of U-bar with an arc are calculated and shown with graphs. The experiments are carried out and their results are compared with the theoretical ones.

1. 緒 言

U形棒の両脚が固定され、U形棒の面内で振動する場合を調べる。U形棒は2本のまっすぐ棒と1本の円弧形棒とからなり、左右対称形とする。

方法は筆者が前に発表したまっすぐ棒のラグランジュアン⁽¹⁾と円弧形棒のその面内振動のラグランジュアン⁽²⁾とを組合わせて、これを未定境界値について極小にする条件より振動数方程式を求める方法である。第3章にこの方法で求めた振動数方程式を示し、振動はU形棒の対称軸について、対称と反対称の両振動のあることを示している。

第4章では特別な場合として、U形棒が3本のまっすぐ棒よりなる場合の振動数方程式を求めている。

第5章では数値計算例として、特別な形のU形棒の振動数を対称、反対称振動の一次、二次振動まで計算した結果を図で示している。また実験も行ない、実験と理論との比較も示している。

なお付録には振動数方程式を求める過程を簡単に示し、また3本のまっすぐ棒よりなるU形棒の場合に、既知の解との差異について示している。

筆者は前にU形棒のその面に垂直な振動を調べたが⁽³⁾、それとこの論文とをあわせると、同一平面上にある2本のまっすぐ棒と、1本の円弧形棒とよりなる対称形のU形棒の両端固定の場合の振動は、いちおう解析されたことになる。

2. 記 号

l, R : まっすぐ棒の長さ、円弧形棒の中心線の半径
 $EI, ES, \gamma S$: 曲げと縦の剛性、単位長さあたりの重量 (まっすぐ棒)

$EI_0, ES_0, \gamma S_0$: 同上 (円弧形棒)

α, α_0, ζ : 無次元振動数, $\alpha^4 = \gamma S p^2 l^4 / EI g$,

$\alpha_0^4 = \gamma S_0 p^2 R^4 / EI_0 g$, $\zeta^2 = \gamma S p^2 l^2 / ES g$

s_0 : 円弧形棒の細長比, $s_0^2 = ES_0 R^2 / EI_0$

ω : 円弧形棒の円弧の中心角の半分

x, z, ϕ, x_0, z_0 : 座標軸および角度 (第1図参照)

u, w : まっすぐ棒の z, x 方向の変位

u_0, w_0 : 円弧形棒の x_0, z_0 方向の変位

m, ρ : $m = l / \alpha R$, $\rho = 1 / (1 - \cos \alpha \cosh \alpha)$

$\lambda, \lambda', \kappa$: $\lambda = EI \left(\frac{\alpha}{l} \right)^3 R^3 N / EI_0 = EIN / EI_0 m^3$,

$\lambda' = EIN' / EI_0 m^3$, $\kappa = ES l^2 \zeta \cos \zeta / EI \alpha^3 \sin \zeta$

P : $P = \alpha_0^4 / \xi_n \xi_p \xi_r$

g_n, k_n : $g_n = (M_p \xi_p - M_r \xi_r) / M_n$,

$k_n = (M_n \xi_n - M_p \xi_p - M_r \xi_r) / M_p M_r$

$A, B, C, D, J, K, a, b, c, a', b', c'$: 境界値およびその

組合せ, $\left(u' = \frac{du}{dx}, u_0' = \frac{du_0}{d\phi} \right)$ $2A = u(0)$,

$2C = u(l)$, $2B(\alpha/l) = u'(0)$, $2D(\alpha/l) = u'(l)$,

$2J = w(0)$, $2K = w(l)$, $2A_0 = u_0(-\omega)$,

$2C_0 = u_0(\omega)$, $2B_0 = u_0'(-\omega)$, $2D_0 = u_0'(\omega)$,

$2J_0 = w_0(-\omega)$, $2K_0 = w_0(\omega)$, $a = C_0 + A_0$,

$b = D_0 - B_0$, $c = K_0 - J_0$, $a' = C_0 - A_0$,

$b' = D_0 + B_0$, $c' = K_0 + J_0$

ξ_n, M_n, N, Ψ_{np} : 文献(2)と同じ、詳しくは同文献参照

* 昭和 38 年 11 月 2 日 第 41 期東京秋期講演大会において講演, 原稿受付 昭和 38 年 11 月 12 日.

** 正員, 山形大学工学部 (米沢市元中馬口旁町).

$$-L = \frac{ZEI_0}{R^3N} + \frac{Z'EI_0}{R^3N'} \dots\dots\dots (5)$$

上式の Z は次の形をしている。

$$\begin{aligned} Z = & \lambda \rho [(a^2 \cos^2 \psi + c^2 \sin^2 \psi - 2ac \sin \psi \cos \psi)(\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) \\ & + m^2 b^2 (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) + 2m(ab \cos \psi - bc \sin \psi) \sin \alpha \sinh \alpha] \\ & + \lambda \kappa [a^2 \sin^2 \psi + c^2 \cos^2 \psi + 2ac \sin \psi \cos \psi] + a^2 \sum \frac{\xi_p \xi_r \Psi_{pr}}{M_n \xi_n} \sinh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\ & + b^2 \sum \frac{\Psi_{pr}}{M_n \xi_n} \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega + c^2 \sum M_n \xi_n \Psi_{pr} \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\ & - 2ab \sum \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_p \Psi_{np}}{M_r \xi_r} + \frac{\xi_r \Psi_{rn}}{M_p \xi_p} \right) \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\ & - 2bc \sum \Psi_{pr} \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\ & - 2ca \sum \frac{\xi_p \xi_r}{\xi_n} \Psi_{pr} \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

(6) 式の a, b, c, λ の代りに a', b', c', λ' とし, $\xi_n \omega, \xi_p \omega, \xi_r \omega$ の $\sinh, \cosh$ を $\cosh, \sinh$ と変えると Z' になる。

未定境界値 a, b, c, a', b', c' はラグランジュアン L を極小にすべきなので, 次の両式,

$$\partial L / \partial a, b, c = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\partial L / \partial a', b', c' = 0 \dots\dots\dots (8)$$

より振動数方程式および境界値が求まる。(7) 式より求まる 3 個の連立一次同次方程式において, a, b, c のすべては同時に零でないとすると, 次の式が求まる(付録 1 参照)。

$$\begin{aligned} & \lambda^3 m^2 \kappa (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) \\ & - \lambda^2 m^2 [\sin^2 \psi (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \kappa \cos^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha)] \\ & \quad \times P g_n g_p g_r \sinh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\ & + \lambda^2 \kappa (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) P \sum g_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\ & + \lambda^2 m^2 [\cos^2 \psi (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \kappa \sin^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha)] \\ & \quad \times P \sum (M_n \xi_n)^2 g_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\ & + \lambda^2 m \kappa \cos \psi \sin \alpha \sinh \alpha P \sum M_n g_n k_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\ & + 2 \lambda^2 m^2 \sin \psi \cos \psi [-(1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \kappa (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha)] \\ & \quad \times P \sum M_n \xi_p \xi_r g_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\ & - 2 \lambda^2 m \kappa \sin \psi \sin \alpha \sinh \alpha P \sum M_n \xi_n g_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\ & + \lambda [\cos^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) + \kappa \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha \cosh \alpha)] \\ & \quad \times N P^2 g_n g_p g_r \cosh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\ & - \lambda m^2 (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) N P^2 \sum \xi_p^2 \xi_r^2 g_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\ & - \frac{1}{4} \lambda [\sin^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) + \kappa \cos^2 \psi (1 - \cos \alpha \cosh \alpha)] \\ & \quad \times N P^2 \sum g_n k_n^2 \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\ & - \lambda m \cos \psi \sin \alpha \sinh \alpha N P^2 \sum M_n \xi_n^2 g_n k_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\ & - \lambda \sin \psi \cos \psi [-(\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) + \kappa (1 - \cos \alpha \cosh \alpha)] \\ & \quad \times N P^2 \sum \xi_n g_n k_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\ & - \lambda m \sin \psi \sin \alpha \sinh \alpha N P^2 \sum \xi_p \xi_r g_n k_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\ & - \frac{1}{4} (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) N^2 P^3 \sum \xi_n^2 g_n k_n^2 \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega = 0 \dots\dots\dots (F. E. 1) \end{aligned}$$

振動数方程式 (F. E. 1) が成立するときには (8) 式より $a' = b' = c' = 0$ となる。すなわち

$$C_0 - A_0 = D_0 + B_0 = K_0 + J_0 = 0 \dots\dots\dots (9)$$

となる。(9) 式と境界条件の (1) 式, 連続条件の (2), (3) 式とを用いると, 変位 $u, w^{(1)}$ および $u_0, w_0^{(2)}$ は U 形棒の対称軸に関して対称であることがわかる。すなわち (F. E. 1) 式は U 形棒の対称振動の振動数方程式である。

同様にして(8)式から次の振動数方程式が求まる.

$$\begin{aligned}
 & \lambda'^3 m^2 \kappa (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) \\
 & - \lambda'^2 m^2 [\sin^2 \psi (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \kappa \cos^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha)] \\
 & \quad \times P g_n g_p g_r \cosh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\
 & + \lambda'^2 \kappa (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) P \sum g_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\
 & + \lambda'^2 m^2 [\cos^2 \psi (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \kappa \sin^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha)] \\
 & \quad \times P \sum (M_n \xi_n)^2 g_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\
 & + \lambda'^2 m \kappa \cos \psi \sin \alpha \sinh \alpha P \sum M_n g_n k_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\
 & + 2 \lambda'^2 m^2 \sin \psi \cos \psi [-(1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \kappa (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha)] \\
 & \quad \times P \sum M_n \xi_p \xi_r g_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\
 & - 2 \lambda'^2 m \kappa \sin \psi \sin \alpha \sinh \alpha P \sum M_n \xi_n g_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\
 & + \lambda' [\cos^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) + \kappa \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha \cosh \alpha)] \\
 & \quad \times N' P^2 g_n g_p g_r \sinh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\
 & - \lambda' m^2 (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) N' P^2 \sum \xi_p^2 \xi_r^2 g_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\
 & - \frac{1}{4} \lambda' [\sin^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) + \kappa \cos^2 \psi (1 - \cos \alpha \cosh \alpha)] \\
 & \quad \times N' P^2 \sum g_n k_n^2 \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\
 & - \lambda' m \cos \psi \sin \alpha \sinh \alpha N' P^2 \sum M_n \xi_n^2 g_n k_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\
 & - \lambda' \sin \psi \cos \psi [-(\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) + \kappa (1 - \cos \alpha \cosh \alpha)] \\
 & \quad \times N' P^2 \sum \xi_n g_n k_n \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega \\
 & - \lambda' m \sin \psi \sin \alpha \sinh \alpha N' P^2 \sum \xi_p \xi_r g_n k_n \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega \\
 & - \frac{1}{4} (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) N'^2 P^3 \sum \xi_n^2 g_n k_n^2 \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega = 0 \quad \text{.....(F. E. 2)}
 \end{aligned}$$

振動数方程式 (F. E. 2) は U 形棒の対称軸に関し反対称振動の振動数方程式である. なお, (F. E. 1) 式で N, λ を N', λ' に, $\xi_n \omega, \xi_p \omega, \xi_r \omega$ の $\sinh, \cosh$ を $\cosh, \sinh$ に変え, (F. E. 2) 式になる.

4. 3 本のまっすぐ棒からなる U 形棒のその面内の振動

振動数方程式 (F. E. 1), (F. E. 2) の特別な場合として, $R \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0, 2R\omega \rightarrow l'$ (有限) の場合を考える. この場合は長さ l の 2 本のまっすぐ棒と長さ l' のまっすぐ棒とよくなる両端固定 U 形棒のその面内の振動数方程式になる.

$0(R^n)$ で R^n のオーダーを表わすすると,

$$\alpha_0^4 = 0(R^4), \quad \alpha_0^4 / s_0^2 = 0(R^2) \quad \text{.....(10)}$$

となり, ξ に関する 6 次の代数方程式は次のようになる.

$$\xi^6 + \frac{\alpha_0^4}{s_0^2} \xi^4 - \alpha_0^4 \xi^2 - \frac{\alpha_0^8}{s_0^2} = 0 \quad \text{.....(11)}$$

長さ l' のまっすぐ棒の無次元振動数の半分を次のようにおく.

$$\alpha' = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma S_0 p^2 l'^4}{EI_0 g} \right)^{1/4}, \quad \zeta' = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma S_0 p^2 l'^2}{ES_0 g} \right)^{1/2} \quad \text{.....(12)}$$

(11) 式の根を α', ζ' であらわすと次のようになる.

$$\xi_n = i \frac{\zeta'}{\omega} = 0(R), \quad \xi_p = \frac{\alpha'}{\omega} = 0(R), \quad \xi_r = i \frac{\alpha'}{\omega} = 0(R) \quad \text{.....(13)}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ である. (F. E. 1), (F. E. 2) の各式にあらわれる諸量を α', ζ', ω であらわすと $0(R^{16})$ の項が最も大きいので, そのオーダーの項のみ考え, また下記の記号を用いると,

$$\left. \begin{aligned}
 EI_0 (2\alpha' / l')^3 / EI (\alpha / l)^3 &= \lambda_0, \\
 \mu &= (l' / 2\alpha') / (l / \alpha), \\
 \kappa' &= \lambda_0 \frac{\alpha' \cos \zeta'}{\zeta' \sin \zeta'}, \\
 \kappa'' &= \lambda_0 \frac{\alpha' \sin \zeta'}{\zeta' \cos \zeta'}
 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(14)}$$

振動数方程式 (F. E. 1), (F. E. 2) はそれぞれ次のようになる (付録 2 参照).

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{\lambda_0} \frac{\alpha'^6}{\omega^6} m^2 \sin \zeta' (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) \\ & \times [\kappa \kappa' \sin^2 \psi (b_1 q_2 + \lambda_0 \mu^2 k_2) + (\kappa + \kappa' \cos^2 \psi) (d_1 q_2 + \lambda_0 \mu^2 a_1 k_2) \\ & - 2 \lambda_0 \mu \cos \psi (\kappa + \kappa') c_1 r_2 - \lambda_0 (\kappa \cos^2 \psi + \kappa') (b_1 h_2 + \lambda_0 \mu^2 q_2) \\ & - \lambda_0 \sin^2 \psi (d_1 h_2 + \lambda_0 \mu^2 a_1 q_2)] = 0 \quad \dots\dots\dots (F.E. 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda'^2}{\lambda_0} \frac{\alpha'^6}{\omega^6} m^2 \cos \zeta' (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) \\ & \times [-\kappa \kappa'' \sin^2 \psi (b_1 r_2 + \lambda_0 \mu^2 h_2) + (\kappa - \kappa'' \cos^2 \psi) (d_1 r_2 + \lambda_0 \mu^2 a_1 h_2) \\ & + 2 \lambda_0 \mu \cos \psi (\kappa - \kappa'') c_1 q_2 + \lambda_0 (\kappa \cos^2 \psi - \kappa'') (b_1 k_2 - \lambda_0 \mu^2 r_2) \\ & + \lambda_0 \sin^2 \psi (d_1 k_2 - \lambda_0 \mu^2 a_1 r_2)] = 0 \quad \dots\dots\dots (F.E. 4) \end{aligned}$$

(F.E. 3), (F.E. 4) 式の [] 内が同一平面上にある 2 本の長さ l の棒と, 1 本の長さ l' の棒とよりなる両端固定の対称形 U 形棒のその面内の振動の振動数方程式で, 前者は対称振動, 後者は反対称振動を表わす. なお, 直接 3 本のまっすぐ棒よりなる U 形棒の振動数方程式を求めても, (F.E. 3), (F.E. 4) 式の [] 内の式に一致する (付録 3 参照).

なお (F.E. 3), (F.E. 4) 式で, $\psi=0$, $\lambda_0=\mu=1$ とおくと次の式になる.

$$\begin{aligned} & \sin(\zeta + \zeta') [\sin(\alpha + \alpha') \cosh(\alpha + \alpha') + \cos(\alpha + \alpha') \sinh(\alpha + \alpha')] = 0, \\ & \cos(\zeta + \zeta') [\sin(\alpha + \alpha') \cosh(\alpha + \alpha') - \cos(\alpha + \alpha') \sinh(\alpha + \alpha')] = 0 \end{aligned}$$

これらの式は両端固定まっすぐ棒の対称, 反対称の縦, 横の振動数方程式で既知の解に一致する.

また $l' \rightarrow 0$ とすると $\kappa' \rightarrow \infty$, $\kappa'' \rightarrow 0$ となる. ゆえに (F.E. 3) 式および (F.E. 4) 式はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} & \kappa \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) + \cos^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) = 0, \\ & \kappa \cos^2 \psi (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) + \sin^2 \psi (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) = 0 \end{aligned}$$

両式の左辺を掛算して, $\pi - 2\psi = \psi'$ とおくと,

$$\begin{aligned} & \kappa^2 \sin^2 \psi' (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) \\ & + \sin^2 \psi' (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) \\ & + \kappa (1 + \cos^2 \psi') [(1 + \cos \alpha \cosh \alpha) (1 - \cos \alpha \cosh \alpha) \\ & + (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha)] + 2\kappa \cos \psi' \sin^2 \alpha \sinh^2 \alpha = 0 \end{aligned}$$

となる. この式は文献 (1) の両端固定 L 形棒の平面内振動において, 2 本の脚の材質, 断面寸法が等しい場合の振動数方程式に一致する.

5. 数値計算例および実験との比較

数値計算はまっすぐ棒も円弧形棒も同一断面寸法, 同一材質で, とともに細長比が十分大きい場合について行なった. また円弧形棒の中心角 $2\omega = \pi$ の場合のみを取扱った.

この場合は

$$EI = EI_0, \quad ES = ES_0, \quad \gamma S = \gamma S_0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ゆえ

$$m = 1/\alpha_0, \quad \lambda = \alpha_0^3 N, \quad \lambda' = \alpha_0^3 N' \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる. また

$$\kappa = \frac{ES l^2}{EI} \frac{\zeta \cos \zeta}{\alpha^3 \sin \zeta} = \frac{ES_0 R^2}{EI_0} \frac{\zeta \cos \zeta}{\alpha \alpha_0^2 \sin \zeta} \quad \dots\dots\dots (17)$$

で, 右辺の第 1 項は細長比の 2 乗で, 細長比が大きいときは κ は非常に大きくなる. 右辺の第 2 項は細長比が大きいときはほぼ $1/\alpha^3$ または $1/\alpha \alpha_0^2$ の大きさである (付録 4 参照). ゆえに (F.E. 1), (F.E. 2) 式で κ をふくむ項のみを考えればよい. なお $M_n, P,$

g_n, k_n は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} M_n &= \xi_n, \quad P = -i\alpha_0^2, \\ g_n &= \frac{\xi_p^2 - \xi_r^2}{\xi_n}, \quad k_n = \frac{\xi_n^2 - \xi_p^2 - \xi_r^2}{\xi_p \xi_r} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

計算にはまず 13 個の α_0 に対して ξ_n を詳しく計算し, ψ の値を $0, \pi/2, -\pi/2, \pi$ として, (F.E. 1), (F.E. 2) 式を零にする α の値を求めた. その結果は第 3, 4 図に示している. 図で A 1, A 2 は反対称 1 次, 2 次の振動数を, S 1, S 2 は対称 1 次, 2 次の振動数を示す. ただし, たとえば $\psi = \pi$ の第 2 次振動数のように, 計算点の数が不足して, 単に傾向をあらわすにすぎないものもある.

実験は軟鋼棒の試験片で $\psi = -\pi/2$ の場合を行なった. 試験片は 2 本で厚さと半径がそれぞれ $h = 0.30 \text{ cm}$, $R = 9.7 \text{ cm}$ と $h = 0.29 \text{ cm}$, $R = 4.8 \text{ cm}$ (幅は約 2.2 cm) である. 振動はすべて反対称 1 次振動で, 計算と実験との比較は第 5 図に示している. 実験値から α を求めるとき材料の Eg/γ の値が必要であるが, それは同じ材

料の両端固定まっすぐ棒の実験を行ない, $2\alpha=4.730$ として Eg/γ の値をきめた.

6. 結 言

Love⁽⁴⁾ が指摘しているように, 棒の中心線が同一平面上にあるときは, その面が主面となり, 振動はその面内の振動とその面に垂直な振動とに分けて考えることができる. ゆえに文献(3)と本論文をあわせると, 2本のまっすぐ棒と1本の円弧棒とよりなる同一平面上にある対称形の両端固定U形棒の振動が解析できる.

終りに卒業研究の一部として筆者とともに実験を行なった菊地, 舟山の両君(昭和34年度)に感謝する.

付録1 振動数方程式の求め方

Z の初めの2項の $a^2, b^2, c^2, 2ab, 2ca, 2bc$ の係数をそれぞれ $(A), (B), (C), (P), (Q), (R)$ とし, 残りの6項の係数を $(a), (b), (c), (p), (q), (r)$ とおくと, 振動数方程式は文献(3)の(23)式と同じである. この式に表われる二次形式の式は次のように簡単化される.

$$\sin^2 \alpha \cosh^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sinh^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sinh^2 \alpha = (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) / \rho,$$

より,

$$(B)(C) - (R)^2 = \lambda^2 m^2 \sin^2 \psi \rho (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \lambda^2 m^2 \kappa \cos^2 \psi \rho (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha),$$

$$(C)(A) - (Q)^2 = \lambda^2 \kappa \rho (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha),$$

$$(A)(B) - (P)^2 = \lambda^2 m^2 \cos^2 \psi \rho (1 + \cos \alpha \cosh \alpha) + \lambda^2 m^2 \kappa \sin^2 \psi \rho (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha),$$

$$(Q)(R) - (C)(P) = -\lambda^2 m \kappa \cos \psi \rho \sin \alpha \sinh \alpha,$$

$$(R)(P) - (B)(Q) = \lambda^2 m^2 \sin \psi \cos \psi \rho [(1 + \cos \alpha \cosh \alpha) - \kappa (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha)],$$

$$(P)(Q) - (A)(R) = \lambda^2 m \kappa \sin \psi \rho \sin \alpha \sinh \alpha$$

が求まる. また次の関係

$$-\sum \frac{\xi_p \xi_r \Psi_{pr}}{M_n \xi_n} = \frac{\alpha_0^4}{M_n M_p M_r \xi_n \xi_p \xi_r} (M_n \xi_n - M_p \xi_p)(M_p \xi_p - M_r \xi_r)(M_r \xi_r - M_n \xi_n),$$

$$\frac{\xi_p \Psi_{np}}{M_r \xi_r} + \frac{\xi_r \Psi_{rn}}{M_p \xi_p} = \frac{\alpha_0^4}{M_n M_p M_r \xi_n \xi_p \xi_r} M_n (M_p \xi_p - M_r \xi_r)(M_n \xi_n - M_p \xi_p - M_r \xi_r),$$

$$\sum \xi_n \xi_p \Psi_{np} = 0, \quad \sum \Psi_{np} / \xi_r = 0,$$

第3図 $\omega = -\pi/2, \psi = \pi/2$ の場合の振動数
S, A は対称, 反対称振動
1, 2 は1次, 2次を表す

第4図 $\omega = \pm\pi, \psi = 0$ の場合の振動数

より,

$$\begin{aligned}
 (b)(c)-(r)^2 &= \frac{N\alpha_0^8}{M_n M_p M_r (\xi_n \xi_p \xi_r)^2} (M_n \xi_n - M_p \xi_p)(M_p \xi_p - M_r \xi_r)(M_r \xi_r - M_n \xi_n) \\
 &\quad \times \cosh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega, \\
 (c)(a)-(q)^2 &= \frac{-N\alpha_0^8}{M_n M_p M_r (\xi_n \xi_p \xi_r)^2} \sum M_p M_r \xi_p^2 \xi_r^2 (M_p \xi_p - M_r \xi_r) \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega, \\
 (a)(b)-(p)^2 &= \frac{-N\alpha_0^8}{4(M_n M_p M_r)^2 (\xi_n \xi_p \xi_r)^2} \sum M_n (M_p \xi_p - M_r \xi_r)(M_n \xi_n - M_p \xi_p - M_r \xi_r)^2 \\
 &\quad \times \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega, \\
 2[(q)(r)-(c)(p)] &= \frac{-N\alpha_0^8}{M_n M_p M_r (\xi_n \xi_p \xi_r)^2} \sum M_n \xi_n^2 (M_p \xi_p - M_r \xi_r)(M_n \xi_n - M_p \xi_p - M_r \xi_r) \\
 &\quad \times \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega, \\
 2[(r)(p)-(b)(q)] &= \frac{-N\alpha_0^8}{M_n M_p M_r (\xi_n \xi_p \xi_r)^2} \sum \xi_n (M_p \xi_p - M_r \xi_r)(M_n \xi_n - M_p \xi_p - M_r \xi_r) \\
 &\quad \times \sinh \xi_n \omega \cosh \xi_p \omega \cosh \xi_r \omega, \\
 2[(p)(q)-(a)(r)] &= \frac{N\alpha_0^8}{M_n M_p M_r (\xi_n \xi_p \xi_r)^2} \sum \xi_p \xi_r (M_p \xi_p - M_r \xi_r)(M_n \xi_n - M_p \xi_p - M_r \xi_r) \\
 &\quad \times \cosh \xi_n \omega \sinh \xi_p \omega \sinh \xi_r \omega
 \end{aligned}$$

が求まる。これらの二次形式の式を文献 (3) の (23) 式に代入整理すると (F.E. 1) 式が求まる。(F.E. 2) 式も同様にして求まる。

付録 2 3 本のまっすぐ棒よりなる U 形棒の振動数方程式

$R \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$, $2R\omega = l'$ (有限) の場合は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 M_n &= i \frac{\omega}{\xi'} \frac{\xi'^4 + \alpha'^4}{\xi'^4 - \alpha'^4} = 0(R^{-1}), & M_p &= -\frac{\alpha'}{\omega} \frac{\xi'^2 + \alpha'^2}{\xi'^2 - \alpha'^2} = 0(R), \\
 M_r &= -i \frac{\alpha'}{\omega} \frac{\xi'^2 - \alpha'^2}{\xi'^2 + \alpha'^2} = 0(R), \\
 N &= \frac{\alpha'^3}{\omega^3} \sin \xi' (\sin \alpha' \cosh \alpha' + \cos \alpha' \sinh \alpha') = 0(R^3), \\
 N' &= \frac{\alpha'^3}{\omega^3} \cos \xi' (\sin \alpha' \cosh \alpha' - \cos \alpha' \sinh \alpha') = 0(R^3), \\
 \lambda &= \frac{1}{\lambda_0} \frac{\alpha'^6}{\omega^6} \sin \xi' (\sin \alpha' \cosh \alpha' + \cos \alpha' \sinh \alpha') = 0(R^6), \\
 \lambda' &= \frac{1}{\lambda_0} \frac{\alpha'^6}{\omega^6} \cos \xi' (\sin \alpha' \cosh \alpha' - \cos \alpha' \sinh \alpha') = 0(R^6), \\
 m &= \frac{1}{\mu} \frac{\omega}{\alpha'} = 0(R^{-1}), & P &= -\frac{\alpha'}{\omega} \frac{\alpha'}{\xi'} = 0(R), \\
 g_n &= 2i \frac{\xi' \alpha'^2}{\omega^3} = 0(R^3), & g_p &= -\frac{\alpha'}{\omega} \left(\frac{\xi'^2 - \alpha'^2}{\xi'^2 + \alpha'^2} \right)^2 = 0(R), & g_r &= i \frac{\alpha'}{\omega} \left(\frac{\xi'^2 + \alpha'^2}{\xi'^2 - \alpha'^2} \right)^2 = 0(R), \\
 k_n &= -i \frac{4\xi'^2 \alpha'^2}{\xi'^4 - \alpha'^4} = 0(1), & k_p &= -\frac{2\xi' \alpha'}{\omega^2} \frac{\xi'^2 + \alpha'^2}{\xi'^2 - \alpha'^2} = 0(R^2), & k_r &= i \frac{2\xi' \alpha'}{\omega^2} \frac{\xi'^2 - \alpha'^2}{\xi'^2 + \alpha'^2} = 0(R^2)
 \end{aligned}$$

ゆえに (F.E. 1), (F.E. 2) 式の各項を順に [1], [2], …… [14] とおくと次のようになる。

[1] = 0(R^{16}), [2] = 0(R^{16}), [3] = 0(R^{16} または R^{14}), [4] = 0(R^{14} または R^{16}), [5] = 0(R^{14} または R^{16}), [6] = 0(R^{15}), [7] = 0(R^{15}), [8] = 0(R^{16}), [9] = 0(R^{16} または R^{14}), [10] = 0(R^{14} または R^{16}), [11] = 0(R^{14} または R^{16}), [12] = 0(R^{15}), [13] = 0(R^{15}), [14] = 0(R^{14} または R^{16}).

上の式で 0(R^m または R^q) と記したのは, g_n を含む項が 0(R^m) で, g_p, g_r を含む項が 0(R^q) であることを示す。

ゆえに R^{16} が最も大きいので、 R^{16} のオーダーの項だけを計算すると (F.E. 3) 式および (F.E. 4) 式が求まる。

付録 3 3本のまっすぐ棒よりなる U 形棒の振動数方程式を直接求める方法

第6図に示す3本のまっすぐ棒よりなる対称形のU形棒の振動数方程式は、文献(3)の第4章に述べたと同様の方法で求めることができる。座標系および曲げ変位の正の方向は第6図のとおりである。文献(3)の(16), (17) 式に相当する式は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} & \left(a_1 - \lambda_0 \cos^2 \psi \frac{h_2}{q_2} + \lambda_0 \kappa' \sin^2 \psi \right) (A_1 + A_3) + \left(c_1 + \lambda_0 \mu \cos \psi \frac{r_2}{q_2} \right) (B_1 + B_3) \\ & - \lambda_0 \sin \psi \cos \psi \left(\frac{h_2}{q_2} + \kappa' \right) (J_1 + J_3) = 0, \\ & \left(c_1 + \lambda_0 \mu \cos \psi \frac{r_2}{q_2} \right) (A_1 + A_3) + \left(b_1 + \lambda_0 \mu^2 \frac{k_2}{q_2} \right) (B_1 + B_3) + \lambda_0 \mu \sin \psi \frac{r_2}{q_2} (J_1 + J_3) = 0, \\ & - \lambda_0 \sin \psi \cos \psi \left(\frac{h_2}{q_2} + \kappa' \right) (A_1 + A_3) + \lambda_0 \mu \sin \psi \frac{r_2}{q_2} (B_1 + B_3) \\ & + \left(-\lambda_0 \sin^2 \psi \frac{h_2}{q_2} + \kappa + \lambda_0 \kappa' \cos^2 \psi \right) (J_1 + J_3) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(a_1 + \lambda_0 \cos^2 \psi \frac{k_2}{r_2} - \lambda_0 \kappa'' \sin^2 \psi \right) (A_1 - A_3) + \left(c_1 - \lambda_0 \mu \cos \psi \frac{q_2}{r_2} \right) (B_1 - B_3) \\ & + \lambda_0 \sin \psi \cos \psi \left(\frac{k_2}{r_2} + \kappa'' \right) (J_1 - J_3) = 0, \\ & \left(c_1 - \lambda_0 \mu \cos \psi \frac{q_2}{r_2} \right) (A_1 - A_3) + \left(b_1 + \lambda_0 \mu^2 \frac{h_2}{r_2} \right) (B_1 - B_3) - \lambda_0 \mu \sin \psi \frac{q_2}{r_2} (J_1 - J_3) = 0, \\ & \lambda_0 \sin \psi \cos \psi \left(\frac{k_2}{r_2} + \kappa'' \right) (A_1 - A_3) - \lambda_0 \mu \sin \psi \frac{q_2}{r_2} (B_1 - B_3) \\ & + \left(\lambda_0 \sin^2 \psi \frac{k_2}{r_2} + \kappa - \lambda_0 \kappa'' \cos^2 \psi \right) (J_1 - J_3) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

上記 (19), (20) の両式から (F.E. 3), (F.E. 4) 式が求まる。

妹沢・金井⁽⁵⁾は多張間か構のその面内の振動を研究しているが、棒の縦振動を省略して計算を行なっている。文献(5)の(64), (65) 式の連続条件(これは二張間か構の場合である)のうち、変位、角変位の連続条件は筆者のそれと同じで、曲げモーメントの連続条件をU形棒として計算整理すると、(19), (20) 各式の第2式に等しくなる。妹沢・金井は縦振動を省略したので、せん断力はU形棒の橋の部分の棒の半分が質量として脚の部分に働く〔文献(5)の(64)式の第1行第2式および第3行第2式〕としているので、筆者の(18), (19) 各式の第1, 第3式とは違った式を用いて振動数方程式を求めている。

第5図 理論と実験との比較

第6図

付録 4 ζ と α との大きさの比較

文 献

無次元振動数 ζ と α との大きさを比較すると、

$$\alpha^4/\zeta^2 = ES^2/EI = s^2 \quad (s: \text{細長比})$$

ゆえに細長比が十分大きく、 α はあまり大きくないときは、 ζ は非常に小さい。ゆえに(17)式の $\zeta \cos \zeta / \sin \zeta$ は 1 に近い値である。

- (1) 高橋, 機械学会論文集, 27-182 (昭 36-10), 1489.
- (2) 高橋, 機械学会論文集, 29-197 (昭 38-1), 179.
- (3) 高橋, 機械学会論文集, 29-206 (昭 38-10), 1725.
- (4) Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (4th ed), (1952), 451, Cambridge Univ. Press.
- (5) 妹沢, 振動学 (昭 14), 610, 岩波書店.

絶 縁 用 高 分 子

テトラ炭素環式酸二無水物とジアミンとを反応させたポリアミド酸からできるポリアミドは耐熱性, 耐放射線性, 耐溶剤性, 電気特性がすぐれている。1959 年来ポリアミド系高分子がしだいに電気絶縁材料として用いられ始めた。その製品としてエナメル線, ガラス繊維含浸材, 絶縁ワニスおよび耐熱性ポリアミドフィルムなどが開発された。

イギリス電気学会の S2 専門グループの会合が 64 年 1 月下旬に開かれたが, この時ポリアミド系の耐熱性樹脂について討議された。

このポリアミド系のエナメル線および含浸ワニスの各種の試験結果が発表された。種々の温度のもとで行なわれた耐熱性試験の結果によれば 220°C の運転温度に十分耐えることが実証された。

加水分解に対する鋭敏性を評価するために蒸気および熱帯性湿気にさらされた。ポリエステルエナメルと比較した結果, よく焼付けられたポリアミドエナメル

フィルムは同程度であったが, あまりよく焼付けてなかったポリアミド被覆は強い影響を受けた。ポリアミド含浸ワニスで処理したポリアミドエナメル線を巻いたコイルの機械的強さは高く, 260°C の温度のもとに長時間置いてもその低下は認められなかった。

またこのエナメル線の電氣的強さは, 耐はく離性, 耐溶剤性, きびしい曲げの繰返し後の耐熱性などの種々の試験条件においても十分満足できるものであった。

シリコン, エポキシ, 不飽和ポリエステルおよびポリアミドワニスで含浸したポリアミドエナメル線の巻線を持つ各種の電気機械の用途は, よく停動することのある電動工具用電動機, 起動電流の大きい分相電動機の補助巻線, また高速度, 高温で運転される航空機用の電気機械などにその前途は洋々と広い。

(Elec. Times, 1964, Vol. 145, No. 5, p. 159)

(日本科学技術情報センター提供)

新発電方式による小形電源 2 種

最近新しい方式の発電が盛んに研究されてきているが昨年 12 月 IEE の科学一般部門で二つのこれに関係した報告がなされた。その一つは熱電発電でエネルギー変換素子として従来テルル化物系半導体を用いたものが非常に能率がよいとされて開発されて来たが, この報告によると二けい化鉄を用いたものがその性能, 構造上きわめて有望であるという。これは二けい化鉄基板の一部をコバルトで置換して N 形とし, シリコンをアルミで置換えて P 形としたもので, これらの不純物は 2~5% と多くて, その製造に純度の厳格さを必要としないことが強みである。

またテルル化鉛系のものは酸化や熱膨張にともなう構造上の難問がひかえていたが二けい化鉄のものは酸化の心配がないのでカプセルの必要がない。また熱電素子の N および P 形の材質が同一なので熱膨張の問題も解決された。この素子を用いて現在 50W の発電が試みられている。加熱はガスバーナで行ない加熱端は 700~750°C に熱せられ冷却端はアルミのひれで放熱

している。このとき単位素子当りの出力電圧は 0.2 V を示した。

現在 50W, 15V のもので熱素子の重量は 700 g, 加熱用バーナ, 冷却ひれの重量は 7500 g で, 燃焼エネルギー対発電エネルギーによる効率は 1~2% で, テルル化鉛系の 2 1/2 % の効率に比較してそれほどひけをとらない。このときの出力対自重の比は 3 W/lb である。第二の報告は地上で用いる太陽電池電源であって, ニッケルカドミウム二次電池と定電圧回路を並用して, 天候や季節の変動を防いで電源としてほぼ一定の出力を得ることができる。現在太陽電池素子 PCML 2 を 5 個直列につなぎ年間平均 100 Wh/cm² の太陽入力条件で年間 225 Wh の出力が得られた。これはワット時当り 4 ペンスの電力コストであるがさらに同一条件で電池の改善だけで 1.5 ペンスまで下げることができる。

(Elec. Times, 1963-12-12, Vol. 144, No. 24, p. 899~900)

(日本科学技術情報センター提供)