534.121.1.01:539.377.039

長方形平板の自由振動特性に及ぼす温度変化 および振幅の影響*

砂 川 惠**

Influences of Temperature Changes and Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates

by Megumi SUNAKAWA

The fundamental equations of nonlinear flexural vibration for a rectangular elastic plate are solved approximately by employing a method of successive approximation, and the influences of temperature changes and large amplitudes on the period of free vibrations are established. Some numerical examples are given for a plate with hinged and immovable edges, and it is shown that the above effects are considerably large and cannot be neglected even when the temperature changes are small.

1. ま え が き

温度変化を受ける薄板の振動特性は、高速飛行体の空力弾性的諸問題とも関連し⁽¹⁾、構造要素の設計に際して慎重に検討する必要がある。

棒や板等が横振動を行なう場合に、その周期は材料の内部粘性、空気抵抗、回転慣性あるいは振幅等によって当然影響をうける^{(2)~(11)}。振幅以外のものの影響はいちおう微小振動として論ずることができるが、普通われわれが経験する諸種の振動、あるいはわれわれが微小振動として取扱っている振動においても、既に微小振動の範囲を逸脱しているものが多く、振幅の影響をできる限り厳密に論じておくことは重要と考えられる⁽²⁾⁽³⁾。

最近、急激な加熱あるいは冷却によって誘起される熱応力および振動が重要な問題となっている。過渡的な加熱状態における構造要素の熱変形および熱応力については既に筆者らも検討した^{(12)~(17)}。また、熱衝撃によって生ずる振動現象については村およびBoleyらの解がある。村⁽¹⁸⁾は急激に加熱または冷却される半無限体および無限長の円柱の熱ひずみおよび熱応力をLaplace変換を用いて運動方程式を解いて解析し、温度変化(熱層)の進行速度と弾性波の進行速度との相互関係より、焼入れ等の場合における弾性体の挙動を説明した。Boleyら^{(19)~(22)}は急速加熱を受ける棒および板の振動現象をMindlin & Goodmanの

方法⁽²³⁾を用いて解析し、慣性項を考慮したいいわゆる“dynamic” solutionを慣性項を無視した“static” solutionと対比して与えている。Mindlin & Goodmanの方法は、境界条件が時間とともに変化する場合の運動方程式における空間座標と時間座標に関する量を変数分離して解く巧妙な方法であるが、その適用は線形の場合に限られている。一方、有限変位を考慮すると基礎方程式が非線形になるが、一般の非線形振動問題においては、前述の空間および時間に関する変数を分離することも困難であり、線形振動問題を解析する場合の有力な手掛りであるnormal modeの意味がはっきりせず、厳密に解くことはほとんど不可能である。したがって、逐次近似法、摂動法、Galerkin法あるいはエネルギー法等の近似解法にたよらざるを得ない。

本論文においては、熱衝撃をうける構造要素の過渡的振動現象を有限変位を考慮して解析する準備として、加熱あるいは冷却された長方形平板の自由振動特性におよぼす温度変化および振幅の影響を検討する。

記 号

a, b, d : 長方形平板の半長, 半幅, 板厚

c_b : 平板内の縦波の速度, $c_b^2 = E/(1-\nu^2)\rho$

f, f', g : (35)式; (27)式, (28)式; (31)式, (32)式

k : (55)式

t : 時間

u, v, w : 中立面の x, y, z 方向の変位

$z(\theta, t)$: 平板中央の変位

$\bar{z}$: 温度変化をうけた状態 ($\theta = \text{const.}$)にお

* 昭和37年10月29日 第40期全国大会講演会において講演, 原稿受付 昭和38年10月8日。

** 正員, 東京大学宇宙航空研究所(東京都目黒区駒場町856)。

ける平板中央の無次元振幅

z_0 : 温度変化のみによる平板中央の無次元変位

z_1, z_2 : 無次元振幅 ($\bar{z}$) の最大値 および 最小値の絶対値

C, I : 積分定数, (22) 式, (23) 式; (20) 式, (21) 式

D : 平板の曲げ剛性, $D \equiv Ed^3/12(1-\nu^2)$

E, G : 板材料の縦弾性係数, 剛性率

E : 振動系の全エネルギー

$K(k)$: 第 1 種の完全だ円積分

M_1, M_2, M_{12} : 変形後の曲げモーメントおよびねじりモーメント, (4) 式

N_1, N_2, N_{12} : 変形後の断面力およびせん断力, (4) 式

T, T^* : 線形周期, 非線形周期

α, ρ : 板材料の線膨張係数, 密度

β, η : (38) 式, (39) 式

τ, ξ, ζ : 無次元時間, (25) 式, (33) 式, (36) 式

θ : 無ひずみ無応力状態よりの温度上昇

$\bar{\theta}, \tilde{\theta}$: 平均温度, 温度モーメント, (6) 式, (7) 式

λ : 長方形平板のアスペクト比, $\lambda \equiv a/b$

ν : ポアソン比

χ : Airy の応力関数

ω, ω^* : 線形円振動数, 非線形円振動数

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

添字 “ x ”, “ y ” はそれぞれ x, y に関する偏微分を意味する。

添字 “ S ”, “ C ” はそれぞれ四辺単純支持および四辺固定の場合に関する量を示す。

2. 基礎方程式

温度変化をうける長方形平板の基礎運動方程式は次式のごとく与えられる⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。なお, 内部粘性, 空気

抵抗および回転慣性等の影響はここでは省略する。

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = \rho d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = \rho d \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Ed}{(1-\nu^2)} \left[\left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right) \right] - \frac{Ed\alpha}{(1-\nu)} \bar{\theta}, \\ N_2 &= \frac{Ed}{(1-\nu^2)} \left[\left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right] - \frac{Ed\alpha}{(1-\nu)} \bar{\theta}, \\ N_{12} &= Gd(u_y + v_x + w_x w_y) \\ &= \frac{Ed}{2(1+\nu)} (u_y + v_x + w_x w_y), \\ M_1 &= -D(w_{xx} + \nu w_{yy}) - \frac{Ed^2\alpha}{(1-\nu)} \tilde{\theta}, \\ M_2 &= -D(w_{yy} + \nu w_{xx}) - \frac{Ed^2\alpha}{(1-\nu)} \tilde{\theta}, \\ M_{12} &= -D(1-\nu)w_{xy} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots\dots (5) \\ \bar{\theta} &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \theta(x, y, z) dz \quad \dots\dots\dots (6) \\ \tilde{\theta} &= \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} z \theta(x, y, z) dz \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

境界条件は, 四辺単純支持 および 固定の場合に対し, それぞれ次式で与えられる。

四辺単純支持の場合,

$x=0, 2a$ において,

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ D(w_{xx} + \nu w_{yy}) + \frac{Ed^2\alpha}{(1-\nu)} \tilde{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

第 1 図 長方形平板

$y=0, 2b$ において

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ D(w_{yy} + \nu w_{xx}) + \frac{Ed^2\alpha}{(1-\nu)} \tilde{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

四辺固定の場合,

$x=0, 2a$ において,

$$w = w_x = 0 \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

$y=0, 2b$ において,

$$w = w_y = 0 \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

いま, 非線形性があまり大きくないとして板面内の慣性を無視すると, (1) 式および (2) 式は次のようになり,

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)'$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (2)'$$

次式で定義される Airy の応力関数 χ を導入することができる.

$$\frac{N_1}{d} = \chi_{yy}, \quad \frac{N_2}{d} = \chi_{xx}, \quad \frac{N_{12}}{d} = -\chi_{xy} \dots\dots\dots (10)$$

(4) 式および (10) 式を用いると, z 方向の運動方程式 (3) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w &= d(\chi_{yy}w_{xx} - 2\chi_{xy}w_{xy} + \chi_{xx}w_{yy}) \\ &\quad - \frac{Ed^2\alpha}{(1-\nu)} \nabla^2 \tilde{\theta} - \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

この場合, (3) 式のいわゆる buoyancy terms が消失するが, これは非線形性があまり大きくないという上述の仮定に起因する.

また, 適合条件式は次式となる⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾.

$$\nabla^4 \chi = E(w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy}) - E\alpha \nabla^2 \tilde{\theta} \dots\dots\dots (12)$$

結局, (11) 式および (12) 式を解くことによって, 温度変化をうける長方形平板の垂直変位および振動周期 (あるいは円振動数) が求められることになる.

板面内の温度分布は中央に関して対称形を仮定し, 次式で与える.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta} &= \sum_i \sum_j \bar{\theta}_{ij} \cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{j\pi y}{2b}, \\ (i, j &= 0, 2, 4, \dots\dots\dots \text{even}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\theta} &= \sum_p \sum_q \tilde{\theta}_{pq} \sin \frac{p\pi x}{2a} \sin \frac{q\pi y}{2b}, \\ (p, q &= 1, 3, 5, \dots\dots\dots \text{odd}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

(14) 式においては, 右辺に $\tilde{\theta}_0$ (周辺における温度モーメント) を加えておくのが一般的であり, 以下に述べる方法で同様に解くことができるが, いたずらに計算が繁雑になるのみであるので省略する. すなわち, 長方形平板は周辺において板厚方向の温度こう配は存在しないと仮定する. なお, 振動によって温度分布が変化することも考えられるが, ここではその影響を無視する.

本論文では, 温度変化をうけた後における長方形平板の不減衰自由振動を論ずる. 基礎方程式の非線形項は温度変化による有限変位および有限振幅による影響を意味するが, このために振動波形が微小変位の振動と根本的に異なった状態を示すとは思われないので⁽⁸⁾, その最低次の振動波形を温度変化のみによる変形波形と同一と仮定し, 任意の時点における平板の垂直変位を温度変化のみによる変位と, その状態からの振幅の和として (15) 式で与える. Chu & Herrmann⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ らが摂動法を用いた解析において, 非線形項が小さいとして最低次の運動方程式のみを解いているのも, 同様な観点に立つものと思われる.

$$w(x, y; \theta, t) = z(\theta, t)w(x, y) \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$z(\theta, t)/d = z_0(\theta) + [\bar{z}(t)]_{\theta=\text{const.}} \dots\dots\dots (16)$$

$$w_S(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b} \dots\dots\dots (17)$$

$$w_C(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi y}{b} \right) \dots\dots\dots (18)$$

であり, $z(\theta, t)$ は平板中央の変位である. (17) 式および (18) 式は境界条件 (8) 式および (9) 式をそれぞれ満足している. なお, (14) 式で省略した $\tilde{\theta}_0$ を考慮すると, 四辺単純支持の場合の変位波形 (17) 式は (8) 式の周辺におけるモーメントつりあいの条件を満足しないので, $\nabla^4 w_S = 0$ の complementary solution を用い, (8) 式を満足するように積分定数を定めて (17) 式に加えればよい⁽¹³⁾. 四辺固定の場合には $\tilde{\theta}_0$ は解に関係しない⁽¹⁴⁾.

(13) 式および (15) 式を (12) 式に代入して積分すると, 応力関数は次のようになる.

$$\chi = \frac{1}{2} C_1 x^2 + \frac{1}{2} C_2 y^2 + I \dots\dots\dots (19)$$

ここに

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{Ez^2}{32} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{b} \right] + E\alpha \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{i0}}{\left(\frac{i\pi}{2a} \right)^2} \cos \frac{i\pi x}{2a} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{0j}}{\left(\frac{j\pi}{2b} \right)^2} \cos \frac{j\pi y}{2b} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{ij}}{\left[\left(\frac{i\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{2b} \right)^2 \right]} \cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{j\pi y}{2b} \right\} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_C = & \frac{Ez^2}{32} \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{16} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \right. \\
& - \frac{2 \left(\frac{a}{b} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^2}{\left[1 + 4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^2}{\left[4 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \Big\} \\
& + E\alpha \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{i0}}{\left(\frac{i\pi}{2a} \right)^2} \cos \frac{i\pi x}{2a} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{0j}}{\left(\frac{j\pi}{2b} \right)^2} \cos \frac{j\pi y}{2b} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{ij}}{\left[\left(\frac{i\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{2b} \right)^2 \right]} \cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{j\pi y}{2b} \right\} \\
& \dots\dots\dots(21)
\end{aligned}$$

積分定数 C_1 および C_2 は面内変位に関する条件から決定される。いま、 $x=0, 2a$ において $u=0$; $y=0, 2b$ において $v=0$ とすると次式のようになる。

$$C_{1,s} = -\frac{E\alpha\bar{\theta}_{00}}{(1-\nu)} + \frac{\pi^2 Ez^2}{32(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \quad C_{2,s} = -\frac{E\alpha\bar{\theta}_{00}}{(1-\nu)} + \frac{\pi^2 Ez^2}{32(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \dots\dots\dots(22)$$

$$C_{1,c} = -\frac{E\alpha\bar{\theta}_{00}}{(1-\nu)} + \frac{3\pi^2 Ez^2}{128(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \quad C_{2,c} = -\frac{E\alpha\bar{\theta}_{00}}{(1-\nu)} + \frac{3\pi^2 Ez^2}{128(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \dots\dots\dots(23)$$

長方形平板の面内変位を許す場合には、近似的に C_1 および C_2 を求めることができる⁽²⁴⁾。

ここで自由振動の方程式を求める。すなわち、(11) 式において、変数は温度変化のみによる変位状態に対するものと、その状態からの自由振動状態に対するものの和として表わされるので、(11) 式において前者に対する平衡式を消去した式に Galerkin 法を適用し整理すると、結局次式が得られる。

$$\frac{d^2 \bar{z}}{d\tau^2} + (f_1' + 3f_3' z_0^2) \bar{z} + 3f_3' z_0 \bar{z}^2 + f_3' \bar{z}^3 = 0 \dots\dots\dots(24)$$

ここに

$$\tau = \frac{c_b}{\sqrt{12}} \frac{d}{(2b)^2} t = \frac{1}{(2b)^2} \sqrt{\frac{D}{d\rho}} t \dots\dots\dots(25)$$

$$c_b^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho} \dots\dots\dots(26)$$

$$\left. \begin{aligned} f'_{1,s} &= \pi^4 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 - 12(1+\nu)\pi^2 \left(\frac{2b}{d} \right)^2 \alpha \left[\left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \bar{\theta}_{00} - \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\bar{\theta}_{02}}{\lambda^2} + \bar{\theta}_{20} \right) \right], \\ f'_{3,s} &= 3\pi^4 \left[\frac{(3-\nu^2)}{4} \left(1 + \frac{1}{\lambda^4} \right) + \frac{\nu}{\lambda^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$$\left. \begin{aligned} f'_{1,c} &= \frac{16\pi^4}{9} \left(3 + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^4} \right) - \frac{8}{3} (1+\nu)\pi^2 \left(\frac{2b}{d} \right)^2 \alpha \left\{ 6 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \bar{\theta}_{00} \right. \\ & \quad \left. - (1-\nu) \left\{ \left[\frac{1}{\lambda^2} (4\bar{\theta}_{02} - \bar{\theta}_{04}) + (4\bar{\theta}_{20} - \bar{\theta}_{40}) \right] + \frac{4\bar{\theta}_{22}}{(1+\lambda^2)} - 2 \left[\frac{\bar{\theta}_{24}}{(1+4\lambda^2)} + \frac{\bar{\theta}_{42}}{(4+\lambda^2)} \right] \right\} \right\}, \\ f'_{3,c} &= 3\pi^4 \left\{ \frac{(35-17\nu^2)}{36} \left(1 + \frac{1}{\lambda^4} \right) + \frac{\nu}{\lambda^2} + \frac{2(1-\nu^2)}{9} \left[\frac{4}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{1}{(1+4\lambda^2)^2} + \frac{1}{(4+\lambda^2)^2} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

$$\lambda = \frac{a}{b} \dots\dots\dots(29)$$

$z_0(\theta)$ は static solution であり、次式の解として得られる。

$$f_1' z_0 + f_3' z_0^3 = g \dots\dots\dots(30)$$

ここに

$$g_s = 12(1+\nu)\pi^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{2b}{d} \right)^2 \alpha \bar{\theta}_{11} \dots\dots\dots(31)$$

$$g_c = \frac{4}{3} \frac{096}{(1+\nu)} \left(\frac{2b}{d} \right)^2 \sum_{p,q:\text{odd}} \sum \frac{(p^2 + \lambda^2 q^2)}{\lambda^2 p q (p^2 - 4)(q^2 - 4)} \alpha \bar{\theta}_{pq} \dots\dots\dots(32)$$

(30) 式の解は既に報告したので⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾、自由振動の基礎方程式 (24) 式の解について以下に論ずる。

3. 長方形平板の非線形自由振動におよぼす 温度変化および振幅の影響

いま

$$\xi = \sqrt{f_1' + 3f_3' z_0^2} \tau \quad (33)$$

の変換を行なうと, (24) 式は次のようになる.

$$\frac{d^2 \bar{z}}{d\xi^2} + \bar{z} + f_2 \bar{z}^2 + f_3 \bar{z}^3 = 0 \quad (34)$$

ここに

$$f_2 = \frac{3f_3' z_0}{f_1' + 3f_3' z_0^2}, \quad f_3 = \frac{f_3'}{f_1' + 3f_3' z_0^2} \quad (35)$$

非線形自由振動の方程式 (34) 式はだ円関数を用いて解くことができるが, その解は一般にきわめて複雑であり, 数学的厳密性は別として問題を物理的に吟味するのに適当でない, ここでは逐次近似法⁽²⁵⁾で解く.

(34) 式において,

$$\zeta = \sqrt{1+\beta} \xi \quad (36)$$

とおくと, 次式が得られる.

$$(1+\beta)\ddot{\bar{z}} + \bar{z} = -f_2 \bar{z}^2 - f_3 \bar{z}^3 \quad (37)$$

ここに“.”は ζ に関する微分を意味する.

(37)式は垂直変位 $\bar{z}$ についての運動方程式であるが, この振動は振幅の最大値 z_1 および最小値 $-z_2$ [$z_2 > 0$, 一般に $z_2 > z_1$ であるが (34) 式において $\bar{z}$ の even power がないと $z_2 = z_1$] を有する [第1図 (b)]. そこで β および $\bar{z}$ を z_2 のべき級数で展開する. すなわち,

$$\beta = -\beta_1 z_2 + \beta_2 z_2^2 - \beta_3 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 - \dots \quad (38)$$

$$\bar{z} = -\eta_1(\zeta) z_2 + \eta_2(\zeta) z_2^2 - \eta_3(\zeta) z_2^3 + \eta_4(\zeta) z_2^4 - \dots \quad (39)$$

(38) 式および (39) 式を (37) 式に代入し, 両辺

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \cos \zeta, & \eta_2 &= -\frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{3} f_2 \cos \zeta + \frac{1}{6} f_2 \cos 2\zeta, \\ \eta_3 &= -\frac{1}{3} f_2^2 + \left(-\frac{1}{32} f_3 + \frac{29}{144} f_2^2\right) \cos \zeta + \frac{1}{9} f_2^2 \cos 2\zeta + \left(\frac{1}{32} f_3 + \frac{1}{48} f_2^2\right) \cos 3\zeta, \\ \eta_4 &= \left(\frac{21}{32} f_2 f_3 - \frac{25}{48} f_2^3\right) + \left(-\frac{35}{96} f_2 f_3 + \frac{119}{432} f_2^3\right) \cos \zeta + \left(-\frac{1}{3} f_2 f_3 + \frac{2}{9} f_2^3\right) \cos 2\zeta \\ &\quad + \left(\frac{1}{32} f_2 f_3 + \frac{1}{48} f_2^3\right) \cos 3\zeta + \left(\frac{1}{96} f_2 f_3 + \frac{1}{432} f_2^3\right) \cos 4\zeta, \\ \eta_5 &= \left(\frac{29}{24} f_2^2 f_3 - \frac{25}{36} f_2^4\right) + \left(\frac{23}{1024} f_3^2 - \frac{1607}{2304} f_2^2 f_3 + \frac{7103}{20736} f_2^4\right) \cos \zeta + \left(-\frac{5}{9} f_2^2 f_3 + \frac{8}{27} f_2^4\right) \cos 2\zeta \\ &\quad + \left(-\frac{3}{128} f_3^2 + \frac{11}{384} f_2^2 f_3 + \frac{31}{576} f_2^4\right) \cos 3\zeta + \left(\frac{1}{72} f_2^2 f_3 + \frac{1}{648} f_2^4\right) \cos 4\zeta \\ &\quad + \left(\frac{1}{1024} f_3^2 + \frac{5}{2304} f_2^2 f_3 + \frac{5}{20736} f_2^4\right) \cos 5\zeta \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

における z_2 の等しいべきの係数を等置すると次式が得られる.

$$\ddot{\eta}_1 + \eta_1 = 0 \quad (40 \cdot a)$$

$$\ddot{\eta}_2 + \eta_2 = -\beta_1 \ddot{\eta}_1 - f_2 \eta_1^2 \quad (40 \cdot b)$$

$$\ddot{\eta}_3 + \eta_3 = -\beta_2 \ddot{\eta}_1 - \beta_1 \ddot{\eta}_2 - 2f_2 \eta_1 \eta_2 - f_3 \eta_1^3 \quad (40 \cdot c)$$

$$\ddot{\eta}_4 + \eta_4 = -\beta_3 \ddot{\eta}_1 - \beta_2 \ddot{\eta}_2 - \beta_1 \ddot{\eta}_3 - f_2(2\eta_1 \eta_3 + \eta_2^2) - 3f_3 \eta_1^2 \eta_2 \quad (40 \cdot d)$$

$$\ddot{\eta}_5 + \eta_5 = -\beta_4 \ddot{\eta}_1 - \beta_3 \ddot{\eta}_2 - \beta_2 \ddot{\eta}_3 - \beta_1 \ddot{\eta}_4 - 2f_2(\eta_1 \eta_4 + \eta_2 \eta_3) - 3f_3(\eta_1^2 \eta_3 + \eta_1 \eta_2^2) \quad (40 \cdot e)$$

われわれは自由振動を論じているので, η 's に設定すべき初期条件として次式を採用する.

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(0) &= 1, \quad \eta_2(0) = \eta_3(0) = \eta_4(0) = \dots = 0, \\ \dot{\eta}_1(0) &= \dot{\eta}_2(0) = \dot{\eta}_3(0) = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

(41) 式を考慮して (40 · a) 式を解くと,

$$\eta_1 = \cos \zeta \quad (42)$$

が得られる.

(42) 式を用いると, (40 · b) 式は次のようになる.

$$\ddot{\eta}_2 + \eta_2 = \beta_1 \cos \zeta - \frac{1}{2} f_2 (1 + \cos 2\zeta) \quad (43)$$

(43) 式の解に secular term がはいらないためには,

$$\beta_1 = 0 \quad (44)$$

とならねばならない. (44) 式を (43) 式に代入し,

(41) 式を考慮すると, 次式が得られる.

$$\eta_2 = -\frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{3} f_2 \cos \zeta + \frac{1}{6} f_2 \cos 2\zeta \quad (45)$$

以下同様にして, 解に secular term がはいらないように (40) 式を逐次解いて行くと, 次の諸式が得ら

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= \frac{3}{4}f_3 - \frac{5}{6}f_2^2, & \beta_3 &= \frac{1}{2}f_2f_3 - \frac{5}{9}f_2^3, \\ \beta_4 &= -\frac{3}{128}f_3^2 + \frac{185}{96}f_2^2f_3 - \frac{235}{288}f_2^4, & & & & \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

$$\frac{d^2 \bar{z}}{d\tau^2} + f_1' \bar{z} + f_3' \bar{z}^3 = 0 \quad \dots\dots\dots(53)$$

(53) 式はエネルギー積分を経て

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{\sqrt{2E - f_1' \bar{z}^2 - (f_3' \bar{z}^4)/2}} \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{f_1' + f_3' z_2^2 (1 - \cos^2 \varphi/2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{f_1' + f_3' z_2^2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \quad \dots\dots\dots(54) \end{aligned}$$

ここに

$$k^2 = \frac{f_3' z_2^2}{2(f_1' + f_3' z_2^2)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_1'}{f_3' z_2^2} \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots(55)$$

したがって、周期は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} T^*(\tau) &= \frac{4}{\sqrt{f_1' + f_3' z_2^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{f_1' + f_3' z_2^2}} K(k) \quad \dots\dots\dots(56) \end{aligned}$$

あるいは、

$$T^*(t) = \frac{4(2b)^2}{\sqrt{f_1' + f_3' z_2^2}} \sqrt{\frac{d\rho}{D}} K(k) \quad \dots\dots\dots(57)$$

ここに、 $K(k)$ は第1種の完全だ円積分である。もちろん、(57) 式を展開すれば(50) 式において $z_0=0$ とおいたものと一致する。

4. 数値計算例

前項により、長方形平板の自由振動におよぼす温度変化および振幅の影響が解析的に与えられたので、次に、簡単な数値計算例によってその模様を具体的に示す。

長方形平板は四辺において単純支持されており、次式で与えられる温度変化をうけるものとする。

第2図 平板中央における温度上昇とたわみの関係、四辺単純支持

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \bar{\theta} = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b}, \\ \bar{\theta} &= 0, \text{ i.e. } g=0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(58)$$

したがって、長方形平板は臨界温度 θ_{cr} において熱座屈するので、座屈の前後に分けて考える。なお、 $\bar{\theta} \neq 0$ の場合は加熱と同時にたわみ始めるが、定常状態となった後では4.1節あるいは4.2節のいずれかと同様にして取扱うことができるので省略する。

まず、臨界温度 θ_{cr} および座屈後の平板中央のたわみを、(58) 式を用いて(30) 式より求め第2図に示す。また、臨界温度 θ_{cr} のアスペクト比 λ による変化を第3図に示す。ここでポアソン比 ν は $\nu=1/3$ とする。

4.1 $\theta < \theta_{cr}$ ($z_0=0$) の場合 振幅および温度変化による周期の変化を(50) 式 ($z_0=0$ とおく) ある

第3図 熱座屈係数のアスペクト比による変化、四辺単純支持

第4図 振動周期に及ぼす振幅の影響、四辺単純支持

いは (57) 式より求め、第 4～6 図に示す。振幅の増大および温度上昇によって周期は著しく変化することがわかる。なお、 $\theta=0$ の場合 (第 4 図) の結果はもちろん Chu & Herrmann⁽⁹⁾ によって得られているものと一致している。また、アスペクト比 λ による周期の変化を第 7 図に示す。振幅および温度上昇が大きい

第 5 図 振動周期に及ぼす振幅の影響, 四辺単純支持

第 6 図 振動周期に及ぼす振幅の影響, 四辺単純支持

ほど、線形理論の解と非線形理論の解との差が大きくなるのは上述のとおりである。次に、円振動数が温度変化によって変化する模様を求めると、 $\lambda=1$ に対して振幅をパラメータとして第 8 図が得られる。第 8 図は面内応力ある場合の板の振動特性と同様の傾向を示し、線形理論の解で $\omega=0$ すなわち復元力が消失する温度は熱座屈温度と一致する。

4.2 $\theta > \theta_{cr}$ ($z_0 \neq 0$) の場合 (30) 式より得られた z_0 (第 2 図) を用いて、(50) 式より円振動数が温度変化によって変化する模様を $\lambda=1$ に対して求め、振幅をパラメータとして $\theta < \theta_{cr}$ の場合と同時に第 8 図に示す。円振動数は温度上昇とともに増大するが、有限の振幅を考慮すると、座屈前の傾向とは逆に線形理論による値よりも減少することが示されている。また、この場合における振幅の最大値 z_1 と最小値 $-z_2$ との関係を (52) 式より求め第 9 図に示す。第 9 図は $-z_2/z_0 = -1$ に関して左右対称であるが、この点は無ひずみ無応力状態における平板の位置を示し、座屈による変位は上下いずれの方向でも自由にと

第 7 図 加熱長方形平板の振動周期のアスペクト比による変化, 四辺単純支持

第 8 図 平板の振動数の温度上昇および振幅による変化, 四辺単純支持, $\lambda=1$

第9図 熱座屈後の z_1 と z_2 の関係,
四辺単純支持, $\lambda=1$

りうるので当然のことである。破線で示した部分は座屈による変位が下向の場合を意味する。非線形振動において、振幅の値によっては自由振動が存在しない温度範囲が存在することが第8図に示されているが、この範囲は第9図において $z_2/z_0 > 1$ に該当するようである。すなわち、 $z_2/z_0 > 1$ は振幅の最小値の絶対値が加熱のみによる変位より大きいことを意味するので、途中で Durchschlag が起り、 $z_2 > z_0$ の振動が存在するためには何らかの外力が加えられることを必要とし、自由振動は存在し得ないものと思われる。振幅の最小値の絶対値がとりうる最大すなわち $z_2 = z_0$ の場合、振幅の最大値は $z_1 = 0.414z_0$ である。

第9図の関係をを用いて第8図を書直すと第10図が得られる。円振動数が温度が上昇するにしたがって減少して座屈温度において最小となり、座屈後はまた増加する模様がわかる。 $\theta > \theta_{cr}$ の状態を示す曲線が横軸を切るのは、その温度における座屈変位 z_0 と等しい z_2 の点であり、この図からも $z_2 > z_0$ の自由振動が存在しないことが明らかである。

5. む す び

長方形平板の自由振動特性におよぼす温度変化および振幅の影響を検討した。温度変化により平板には面内応力が発生した垂直変位が生ずるので、振動特性は大きな影響を受けるが、この振動特性は有限の振幅を考慮することによってさらに著しく変化し、かつ、温度変化が大きいほどその傾向ははなはだしいことを示した。

われわれは諸種の振動問題を取扱う場合に、解析の便宜上微小変位の振動として処理する場合が多く、また一般の工学問題ではだいたいの概念をはあくするのに、それで十分であることはよく知られている。しかしながら、たとえば空力熱弾性学における場合等には、その現象を説明するのに線形理論ではもはや不十分であると考えられ、“in the large” すなわち非線形の問題として解析する必要があると考えられる。

本論文では長方形平板が温度変化を受けた後の状態

第10図 平板の振動数の温度変化および
振幅による変化, 四辺単純支持,
 $\lambda=1$

での振動を論じた。すなわち、振動状態での温度変化は考慮しなかった。熱衝撃によって生ずる振動については、垂直変位を(16)式のようにおくこともできず、(11)式を直接解かなければならない。また、最低次の振動波形のみについて検討したが、高次波形の場合も全く同様にして解くことができる。

本解析の妥当性を検証するため二三の実験を行ない、良好な結果が得られた⁽²⁶⁾。その際初期たわみの影響をも考慮して本論文を拡張したが、その結果は稿を改めて報告する。

本研究において有益なご指導をいただいた東京大学航空研究所 植村益次教授に厚くお礼申上げる。

文 献

- (1) たとえば、小林, CAS 研究報告, No.4 (昭 36), 85.
- (2) 高橋, 日本航空学会誌, 10 (昭 18), 39.
- (3) 吉村・植村, 東京大学理工学研究所報告, 2 (昭 23), 57.
- (4) 植村・竹鼻, 東京大学理工学研究所報告, 7 (昭 28), 99.
- (5) G.F. Carrier, *Quart. Appl. Math.*, 3 (1945), 157.
- (6) G.F. Carrier, *Quart. Appl. Math.*, 7 (1949), 97.
- (7) A.C. Eringen, *Quart. Appl. Math.*, 9 (1951), 361.
- (8) A.C. Eringen, *Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.* 1951, (1952), 139.
- (9) Hu-Nan Chu & G. Herrmann, *J. Appl. Mech.*, 23 (1956), 532.
- (10) Hu-Nan Chu, *J. Aerospace Sci.*, 28 (1961), 602.
- (11) 吉村・植村, 東京大学理工学研究所報告, 3 (昭 24), 117.
- (12) M. Uemura, *Aeron. Res. Inst., Univ. of Tokyo, Report 26* (1960), 33.
- (13) M. Sunakawa & M. Uemura, *Aero. Res. Inst., Univ. of Tokyo, Report 26* (1960), 195.
- (14) 砂川, 日本航空学会誌, 9 (昭 36), 37.
- (15) 砂川, 東京大学航空研究所集報, 2-5 (昭 36-3), 269.
- (16) 砂川, 東京大学航空研究所集報, 2-7 (昭 36-9), 415.
- (17) 砂川, 日本航空学会誌, 10 (昭 37), 105.
- (18) T. Mura, *Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* 1952, (1953), 9.
- (19) B.A. Boley, *J. Aeron. Sci.*, 23 (1956), 179.
- (20) B.A. Boley & A.D. Barber, *J. Appl. Mech.*, 24 (1957), 413.
- (21) B.A. Boley, & J.H. Weiner, *Theory of Thermal Stresses*, (1960), John Wiley & Sons.
- (22) 三浦, 日本航空学会 宇宙科学技術シンポジウム前刷, (昭36-7), 80.
- (23) R.D. Mindlin & L.E. Goodman, *J. Appl. Mech.*, 17 (1950), 377.
- (24) 植村・ほか2名, 日本航空学会誌, 10 (昭 37), 79.
- (25) たとえば植木, 非線形振動論(応用力学講座), (昭33), 共立出版.
- (26) 砂川・ほか3名, 日本航空学会 宇宙科学技術シンポジウム前刷, (昭 38-1), 77.