620.171.5:531.252.3:535.394

新しい三次元応力解析法*

(全反射応力測定法)

岡 村 弘 之**

A New Method for Three-Dimensional Stress Analysis
through Total Reflection of Light

by Hiroyuki OKAMURA

In analyzing the stress at inner point of a body, no method has ever been employed but the photoelastic technique through interference of light. Since the method adopts application of the shear difference method, it is inherently complicated for the determination of the value of stress components, especially when the stress distribution is not axially symmetrical.

In this paper, the author presents a new method to determine the three-dimensional stresses at an inner point directly. After the photoelastic effect is frozen in a model made of photoelastic material, the model is cut and a plane of reflection is set up which contains a point where stress has to be determined, and the plane is dipped in a liquid with higher refractive index than that of the material. Measurement of critical angles and polarization of totally reflected light at the point on the plane is sufficient for determining the values and the directions of three principal stresses at the very point.

1. ま え が き

今日、光弾性実験法は、三次元的な応力分布を解析し得る唯一の方法として、応力測定法中、重要かつ独自の地位を占めているが、もともと光弾性実験法は光の干渉を利用しているため、原理的には応力差の測定法であって、特に非軸対称三次元応力分布の主応力値の分離および主応力方向の決定に当っては、きわめて煩雑な手続きを要し精度も低い。この原理的な欠陥を主応力分離法の改善によって克服することはさておき、ここでは全く異なる原理に基いた三次元応力測定法の可能性を論ずる。

本実験法は光弾性材料からなる試験体に応力を凍結し、これを切断して応力を測定したい点を含む反射面を作り、その点で光の全反射を行なわせ応力を求めようとするものである。応力状態と屈折率の関係はよく知られているので、屈折率の測定によって応力解析を行なうことができる。複屈折性をもつ結晶の屈折率を測定する装置としては、すでに全反射屈折計なるものがあって鉱物の種類の決定などに用いられ、また特殊な方位をもつ反射面については全反射の様相がよくわかっている。E. Orowan*** はこれを用いて焼入

強化ガラスの複屈折率を測定し表面応力を推定している。本論文で扱う三軸応力の測定においては、反射面が必ずしも主応力軸の一つと垂直ではなく、かかる一般的な場合においては入射面の変化に対する全反射臨界角の変化の様相はあまり明らかにされていないと思われる。また著書等に誤りもみうけられる。本研究はこれらを明らかにし、また臨界角のみならず反射光の振動方向を測定することにより屈折率測定法を改良し、主応力の値および方向を決定できることを示す。本測定法によれば、臨界角のみの測定による従来の屈折率測定法では不可能であった主軸方向の決定が可能となり、また3個の主屈折率のうち中間の主屈折率の決定が容易となる。

2. 測 定 装 置

第1図に測定装置の概略を示す。応力を測定せんとする点を含む任意の方位の反射面を、この光弾性材料

第1図 測定装置の概略図

* 昭和 38 年 11 月 1 日 第 41 期東京秋期講演大会において論文講演として講演，原稿受付 昭和 38 年 7 月 10 日。

** 正員，東京大学工学部（東京都文京区本富士町 1）。

*** 東京大学 振助教授談による。

よりも高い屈折率 n_1 をもつ浸し(漬)液にひたし、単色光(Na-D 線)を集光レンズによってコリメータの焦平面(ここに十字線をおいてある)に一度集め、コリメータによってほぼ平行になった光束を、応力を測定せんとする点に入射し全反射を起させる。試験片の回転角 θ を変えながら、望遠鏡 T により全反射臨界角を、偏光板 P により全反射光の振動方向を測定し、これにより反射点に凍結されている 3 主応力の値および方向を求めるものである。

3. 測定法の原理

ある媒質中を伝ばする光の位相速度と真空中での光速度との比 n を屈折率と称する。外力により複屈折性を生ずる光弾性材料からなる物体の光学的性質は、その物質の応力状態により決まる。主応力を σ_1, σ_2 , および σ_3 , ただし $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ とし、この主応力軸の方向に座標軸 x_1, x_2 および x_3 をとる。その点の光学的性質は、主応力軸 x_1, x_2 および x_3 の方向に振動する光の屈折率 n_1, n_2 および n_3 (これを主屈折率と呼ぶ)により完全に表現される。主応力と主屈折率との間には、よく知られている次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} n_1 - n_0 &= C_1 \sigma_1 + C_2 (\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2 - n_0 &= C_1 \sigma_2 + C_2 (\sigma_3 + \sigma_1) \\ n_3 - n_0 &= C_1 \sigma_3 + C_2 (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 n_0 は無応力時の屈折率、 C_1 は直接光弾性定数、 C_2 は横光弾性定数で、これらは使用光の波長などによって定まる光弾性材料固有の定数である。 n_0, C_1 および C_2 はあらかじめ測定しておくことができる。光弾性実験法で通常用いられる光弾性定数は $C = C_1 - C_2$ をさし、多くの光弾性材料について $C_2 < C_1 < 0$, したがって $C > 0$ である。以下の説明では便宜上 $C > 0$ とし、また $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ とする。この時、(1)式により、 $n_1 > n_2 > n_3$ となる。3 主応力のうちいずれか二つあるいは、三つの値が等しい場合は、本論から容易に推定できるので説明は省略する。(1)式は σ_1, σ_2 および σ_3 に関する連立一次方程式であり係数行列式は 0 でない。したがって全反射により主屈折率が測定できれば、この式によって主応力の値が求められる。これが本実験法の原理である。ただし実際の応力測定に当

ては後に説明するように、直接 (1) 式を使って応力を求めることはしない。

4. 結晶光学の予備知識⁽¹⁾

4.1 異方性媒質中を伝ばする平面光波の基本的性質

応力によって複屈折性をおびた光弾性材料は光学的に異方性をもった媒質であって、この中を進行する平面光波は、浸し液や空気等の等方性媒質の中を伝ばする場合よりも複雑な挙動を示す。第2図は波面を横から見たものであるが、波のエネルギーの進行方向をさしているポインティング・ベクトル $\mathbf{S}$ と、波面法線ベクトル $\mathbf{a}$ とのなす角 δ は等方性媒質の場合のように一般には 0 とならない。したがってこれらのベクトルと互に垂直で共面な電界の強さのベクトル $\mathbf{E}$ と電気変位ベクトル $\mathbf{D}$ とのなす角も δ である。本論文ではこれら四つのベクトルを含む面を光の振動面、電気変位 $\mathbf{D}$ の方向を光の振動方向、また $\mathbf{S}$ の方向を光の進行方向とよぶ。磁界の強さのベクトル $\mathbf{H}$ の方向は振動面と垂直である。

4.2 屈折率曲面 異方性媒質中の一点 O を通過する平面光波について、波面法線 $\mathbf{a}$ の方向に屈折率 n を動径として有する点をとる。この点の集まりである曲面を屈折率曲面と称し、任意の方向に波面法線を有する波の屈折率を幾何学的、直観的に表現したものである。一つの波面法線方向について互に振動面が直交する二つの平面偏光が存在することができ、それぞれの屈折率 n が互に異なるから、この屈折率曲面は二重面となる。ただし後述の第1光軸の方向に波面法線が向いている波の振動面は確定せず、屈折率の値はいかなる振動面でも同じである。結晶光学によれば屈折率曲面の方程式は

$$\begin{aligned} & (n_1^2 x_1^2 + n_2^2 x_2^2 + n_3^2 x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ & - n_1^2(n_2^2 + n_3^2)x_1^2 - n_2^2(n_3^2 + n_1^2)x_2^2 \\ & - n_3^2(n_1^2 + n_2^2)x_3^2 + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。この面上に点 P をとると $\vec{OP} = n\mathbf{a}$ であるが、P 点でこの曲面に立てた法線が $\mathbf{S}$ の方向と平行であることがわかっている(第3図参照)。これよりただちに $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ の方向および振動面も求められる(第2図参照)。(2)式は x_1, x_2, x_3 の符号をかえて

第2図 異方性媒質中の平面光波

第3図 屈折率曲面の幾何学的意味

も変わらないから、原点对称かつ主軸面对称な曲面である。屈折率曲面の主軸面断面すなわち x_1x_2 面、 x_2x_3 面および x_3x_1 面による断面の形は、(2)式において $x_3=0, x_1=0, x_2=0$ とおくことにより、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 - n_3^2) \left(\frac{x_1^2}{n_2^2} + \frac{x_2^2}{n_1^2} - 1 \right) &= 0 \quad (x_1 x_2 \text{ 断面}) \\ (x_2^2 + x_3^2 - n_1^2) \left(\frac{x_2^2}{n_3^2} + \frac{x_3^2}{n_2^2} - 1 \right) &= 0 \quad (x_2 x_3 \text{ 断面}) \\ (x_3^2 + x_1^2 - n_2^2) \left(\frac{x_3^2}{n_1^2} + \frac{x_1^2}{n_3^2} - 1 \right) &= 0 \quad (x_3 x_1 \text{ 断面}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となり、円およびだ円となる〔第 14 図 (b), 第 16 図 (b) および第 15 図 (b) を参照〕。屈折率曲面の 1/8 を切りとったものを第 4 図に示す。

$x_1 x_2$ 断面および $x_2 x_3$ 断面では、円とだ円は交差しないが、 $x_1 x_3$ 断面では交わっている。この交点 A は 4 個あり、この点をえくぼという。この点でのみ内外かくが接触しており、この付近で外かくがえくぼのようにくぼんでいる。 $x_1 x_3$ 断面にあらわれる円とだ円に共通接線をひき、接点を第 4 図のように B および C とする。線分 BC を含み x_2 軸の平行な平面は、BC を直径とする円周上で屈折率曲面と接する。この円をえくぼ境界円とよぶことにする。主軸断面にあらわれる半径 n_1, n_2 および n_3 の円を後の説明の便宜上、それぞれ n_1 円、 n_2 円、 n_3 円とよぶことにする。外かくに対応する屈折率は n_1 円上で最大値 n_1 , n_2 円上で最小値 n_2 になり、また内かくでは n_2 円上で最大値 n_2 , n_3 円上で最小値 n_3 をとる。すでにのべたことから n_p 円 ($p=1, 2, 3$) の上の点に相当する光波については、 S は a と平行であって $\delta=0$ であり、 E および D の方向は x_p 軸 ($p=1, 2, 3$) と平行であることがわかる。これらの円の上の点以外では $\delta \neq 0$ である。

4.3 反射および屈折の法則 屈折率 n_l の浸し液から主屈折率が n_1, n_2, n_3 なる異方性媒質の表面に光を入射する場合、入射波、反射波および屈折波の波面法線ベクトル a_a, a_r および a_d の方向に関しては、等方性媒質の場合と同じ Snell の法則が成立する。すなわちこれらのベクトルはともに同一平面内にあり（この平面を入射面と称する）、入射角 i_a は反射角 i_r に等しく、屈折角 i_d と入射角の関係は $n_l \sin i_a = n \sin i_d$ である。ただし n は屈折波の屈折率である。この法則

第 4 図 屈折率曲面の形状

により屈折波の方向を次のようにして作図することができる。第 5 図には屈折率曲面の入射面断面が記入されている。入射光線の延長上に点 P を $\vec{OP} = n_l$ となるようにとり、これから二つの媒質の境界面に垂線をたて、これと屈折率曲面との交点を求めてこれを Q とすると、上記の Snell の法則により屈折波の波面法線方向は $\vec{OQ}$ に平行、屈折波の屈折率は $n = \vec{OQ}$ であることがわかる。すなわち a_d の方向は $\vec{OQ}$ に平行である。Q 点にて屈折率曲面に法線をたてるとこれが屈折波のポインティング・ベクトル S_d の方向、すなわち光の進行方向を示すが、この方向が入射面に含まれるとはかぎらない。屈折率曲面は二重面であるから、普通 Q 点が四つ存在するが、このうち S_d が光弾性体内部に向かうものは通常は二つ存在し（第 5 図の Q および Q*）、この二つがそれぞれ平面偏光である。おのおのの屈折波について a_d, S_d がきまれば E_d, D_d などが求められる（第 2 図を参照）。

5. 全反射の法則

第 5 図において S_d の方向は試験片の内部に向かっているから屈折波が存在する。図において入射角 i_a を大きくしてゆくと、P 点は半径 n_l の円周上を y 軸に向かって近づき、Q 点も同じ方向に動いてゆく。 S_d の方向すなわち光の進行方向が反射面 (xy 面) に平行になると、もはや光のエネルギーは光弾性体中に入らず、この時全反射が起る*。

第 6 図は入射角が全反射臨界角 i_c に等しい場合を示している。ただし簡単のため屈折率曲面の一方しか記入していない。この時 P から y 軸におろした垂線が Q 点で屈折率曲面に接している。したがって、Q 点における曲面の法線すなわち屈折波の進行方向は、入射面 (yz 面) の中にあるとは限らないが反射面 (xy 面) に平行であるから全反射臨界角たる条件をみたし

第 5 図 屈折角の作図法

* Handbuch der Physik の最新版 Kristallogptik, 25-1 (1961), 112, 記載の全反射の法則は本論文とは違っているが、誤りと思われる。

ている。全反射臨界面より大きな入射角で入射した光は、すべて入射角と等しい反射角で反射され、屈折波は存在しない。ところで測定し得るものは臨界面 i_c と浸し液の屈折率 n_l のみであり、屈折角は測定不可能でかつ 90° であるとは限らないから、全反射によって屈折率 $n = OQ$ を直接求めることができず、ただ“みかけの屈折率”ともいふべき

$$n' = OQ' = n \sin i_d = n_l \sin i_c \dots \dots \dots (4)$$

が測定できるだけである。

6. 試験片の回転による臨界面の変化

反射面法線 (z 軸) のまわりに試験片を回転させ(回転角を θ とおく) てゆくと、屈折率曲面も試験片とともに回転し、第6図における Q 点は屈折率曲面上を、 Q' 点は反射面上を移動する。この軌跡をそれぞれ n 曲線、 n' 曲線とよぶことにする。 n' 曲線の形状は θ による n' の変化、あるいは(4)式により臨界面角の変化を示すものである。すなわち屈折率曲面とこれを包絡する垂直柱面との交線が n 曲線、その反射面への正射影が n' 曲線である。ただ煩雑さをさけるため屈折率曲面の内外かくの一方のみで、かつ外にとつた部分に n 曲線が存在する場合を第7図に示してある。

屈折率曲面を透明な膜で作り、 z 軸の方向からみれば輪郭としてみえる曲線が n' 曲線である。見方を変えれば、 n 曲線は、屈折率曲面の法線方向すなわち S の方向が反射面と平行な点の軌跡である。そこで S の方向を z 軸に垂直に回転させた時、その方向に法線を有する点 Q の動きが n 曲線となるから、 S と点 Q との対応を考えても、 n' 曲線の形状を知る参考資

第6図 全反射の法則

第7図 n 曲線、 n' 曲線の直観的意味

第1表 屈折率曲面の法線の方角

屈折率曲面上の 点 Q の 位置	外 か く 上 ($\pi_A + \pi_C$)			え く ぼ 点 (A 点)	内 か く 上 (π_B 面)
	え く ぼ 外 部 (π_A 面)	え く ぼ 境 界 円 上	え く ぼ 内 部 (π_C 面上)		
曲面の法線の方角 (S の 方 向)	立体角 4π に分布	第2光軸方向 (OB 方向)	ω すい面の内部	ω すい面の母線の 方向	ω すい面の外部
			立 体 角 4π に 分 布		

料となる。この対応を第1表に示す。ただし ω すい(錐)面とはえくぼ点 A における曲面の法線群が作るすい面を頂点が原点にくるよう平行移動したもので、第8図に示すように第1光軸 OA に垂直な面で切ると x_1x_3 面内にある EF を直径とする円があらわれ、 $\angle EOF$ を ω とかくと

$$\tan \omega = \frac{1}{n_1 n_3} \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_3^2)} \dots \dots \dots (5)$$

であたえられる⁽²⁾。 a と S とのなす角 δ はえくぼ点で最大となり ω に達する。第2光軸方向をのぞく任意方向の S を与えると、これに平行な法線をもつ屈折率曲面上の点 Q は曲面 π_A および曲面 $\pi_B + \pi_C$ の上に一点ずつ存在する。したがって n 曲線は π_A および $\pi_B + \pi_C$ 上におのおの1組ずつ存在する。特に第2光軸が反射面に含まれる場合はえくぼ境界円が n 曲線の一部となり、 n' 曲線の対応部分は直線となる[第15図(b)を参照]。 ω すい面が反射面と交わらない場合には、 π_C 上の法線は反射面と平行になり得ないから、 π_C 上には n 曲線が存在しない。 π_A および π_B は外にとつた曲面であるから、 n 曲線は第7図に示したようにして求められ、 π_A および π_B の両面にそれぞれ対応して、外にとつた原点对称な n' 曲線が1本ずつ得られる[第12図(b)を参照]。 ω すい面が反射面と交わる場合、反射面に平行な法線が π_C 曲面上に存在するので、第9図に示すように n 曲線が π_C 上に存在し、 n' 曲線上にえくぼ点 A の正射影 A' が n' 曲線の交点としてあらわれる[第13図(b)を参照]。応力測定においては、主屈折率の差がきわめて小さいので ω が $10^{-3} \text{ rad} \approx 0.1 \text{ deg}$ の程度であり、第15図に示したような $\sigma_2 = 0$ なる表面応力の測定する場合以外には、 ω すい面が反射面と交わることはほとんどない。

7. 主屈折率および主臨界面角

全反射臨界面角の測定から得られるものは屈折率 n ではなく、みか

けの屈折率 n' であるが、 n' 曲線上の特殊な位置で n' が主屈折率 n_1, n_2 および n_3 になり、かつこの値を確定できることを示そう。

屈折率曲面の π_A 上に存在する n_1 円、 π_A, π_B, π_C にまたがる n_2 円、および π_B 面上にある n_3 円が反射面 (xy 面) と交わる点を、それぞれ Q_1, Q_2 および Q_3 とする。この Q_p 点 ($p=1, 2, 3$) は原点と対称な位置に 2 個ずつある。この点で曲面にたてた法線は、曲面の対称性より原点を通ることは明らかであり、 S および α は OQ_p に平行で S が反射面に含まれる。したがって全反射の条件をみたし、 Q_p 点は n 曲線および n' 曲線上にある。すなわちこの Q_p 点では $n' = n_p (p=1, 2, 3)$ となっている。 α が反射面内にあることから屈折角は $i_d = \pi/2$ である。 Q_p 点に対応する臨界角を主臨界角とよぶことにし $i_p (p=1, 2, 3)$ とかけば (4) 式により

$$n_p = n_1 \sin i_p \quad (p=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。次に n_p が n' 曲線上のいかなる点にあらわれるか、換言すれば i_p が臨界角 i_c の θ による分布のどこにあらわれるかを考察する。

(i) n' 曲線上に A' 点があられない場合、すなわち ω すい面が反射面と交わらない場合 π_A, π_B, π_C に対応する諸量に添字 A, B, C を付することにする。この場合は、 nc 曲線、 nc' 曲線が存在しない。 π_A, π_B は外にとつた原点对称の曲面であるから、第 7 図を参照すると、 na' 曲線、 nb' 曲線はそれぞれ原点对称で外にとつた曲線であることがわかる。

まず nb' 曲線について考える。 π_B は外にとつてあり、 n_B の最大値は n_2 円上で n_2 、最小値は n_3 面上で n_3 となる。したがって $n_2 \geq nb' \geq n_3$ なる関係式が成立する。特に nb' が n_2, n_3 に等しくなるのは Q_2, Q_3 点のみである。なぜならば、 n_B 曲線上で両点以外には S と α は平行になることがないので Q_2 点以外で $nb' = n_2$ であったとすると $nb' > n_B$ 、したがって $nb' > n_2$ となり上の不等式と矛盾する。また Q_3 点以外で $nb' = n_3$ であ

第 8 図 ω すい面 第 9 図 えくぼ付近の n 曲線の形状

たとすると、 π_B 面が外にとつてあることからこの入射面で y 方向に波面法線をもつ波の屈折率 n_B は n_3 より小さくなってやはり上の不等式に矛盾する。したがって nb' は Q_2 点および Q_3 点においてのみ最大値 n_2 および最小値 n_3 に等しくなる。 π_A 曲面にあって 4 個の円孔を円板でふさいだ曲面を考えると、この曲面と π_A 曲面では垂直包絡面が同じく、したがって na' 曲線はこの仮想の閉曲面によって求めることができる。この仮想の曲面では $n_1 \geq na' \geq n_2$ であるが、外におうでないのと同様論理で $n_1 \geq na' \geq n_2$ が成立し、 na' は Q_1 点においてのみ最大値 n_1 を、 Q_2 点においてのみ最小値 n_2 をとる。

結局 Q_2 点が π_A 面上にある時と π_B 面上にあるときに分けて考えると、

$$\left. \begin{aligned} n_1 \geq na' \geq n_2 > nb' \geq n_3 & \quad (Q_2 \text{ が } \pi_A \text{ 面上}) \\ n_1 \geq na' > n_2 \geq nb' \geq n_3 & \quad (Q_2 \text{ が } \pi_B \text{ 面上}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり、主屈折率については次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} n_1 = \max na', \quad n_2 = \min na', \quad n_3 = \min nb' & \quad (Q_2 \text{ が } \pi_A \text{ 面上}) \\ n_1 = \max na', \quad n_2 = \max nb', \quad n_3 = \min nb' & \quad (Q_2 \text{ が } \pi_B \text{ 面上}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

n_2 が $\min na'$ か $\max nb'$ であるかを判別するには、後に考察するように反射光の振動方向の測定による。2 組の臨界角 i_A, i_B についてもこれと同様な関係が成立し

$$\left. \begin{aligned} i_1 \geq i_A \geq i_2 \geq i_B \geq i_3 & \quad \dots\dots\dots (9) \\ i_1 = \max i_A, \quad i_2 = \min i_A & \quad \dots\dots\dots (10) \\ \text{または } \max i_B, \quad i_3 = \min i_B & \end{aligned} \right\}$$

となる。第 12 図 (b) は n' 曲線を、第 12 図 (c) は試験片を 180° 回転する間の臨界角の変化を示す。ただし Q_2 が π_A 上にある場合の例である。

(ii) n' 曲線上に A' 点があられる場合 ω すい

面が反射面と交わっている。 n' 曲線および臨界角の変化は第 13 図 (b) および (c) に示すようになり、 nc' 曲線があらわれる。 na' 曲線、 nb' 曲線に関しては、(i) と全く同じことがいえる。 Q_2 が π_C 面上にある時は n_2 が nc' 曲線の極値であるとは限らない。

8. 反射光の振動方向と主軸方向

すでに述べたようにある角度 i_a で入射した光は複屈折を起し、二つの屈折波に分かれるが、その屈折波の一方

のみが生ずるような入射平面偏光および反射平面偏光が存在する。これらの偏光の振動面が入射面となす角をそれぞれ φ' および φ とし、エネルギー反射率を μ_r^2 とすると、これらの値は次式であらわされる⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi' &= \frac{\xi \sin(i_d + i_a)}{\left[\eta (\sin i_a \cos i_a \cos i_d + \sin i_d) + \zeta \sin i_a \cos i_a \sin i_d \right]} \\ \tan \varphi &= \frac{\xi \sin(i_d - i_a)}{\left[\eta (\sin i_a \cos i_a \cos i_d - \sin i_d) + \zeta \sin i_a \cos i_a \sin i_d \right]} \\ \mu_r^2 &= \left\{ \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \frac{\sin(i_d - i_a)}{\sin(i_d + i_a)} \right\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

ただし、 i_a は入射角あるいは反射角、 i_d は屈折角、 ξ, η, ζ は屈折波の電界の強さのベクトル E_d の xyz 座標軸に対する方向余弦である。一般の入射光については、二つの屈折波に対応する成分に分けて考えればよい。

同一入射面において観測される全反射臨界角は、一般に1個ないし4個である。すなわち等方体では1個、えくぼ点付近では3個(第15図参照)ないし4個(第13図参照)であり、通常の場合は i_A と i_B の2個(第12図参照)である。最後の2個の場合が最も重要なので以下これについて説明する。

第10図に反射率 μ_r^2 の角度分布を示してある。 π_A 面および π_B 面に対応する二つの反射平面偏光が存在し、臨界角 i_A および i_B において反射率が階段状に変化している。コリメータより出る光は完全な平行光束とはなり得ず、光源があるひろがりをもっているため、光の方向はある程度分布している。したがって望遠鏡の視野には、反射率に比例する強さの光の分布がみられ、明暗の度合の違う三つの領域に分かれる。この領域の境界によって臨界角 i_A および i_B が測定できる。また二つの平面偏光の振動面はほぼ直角ほど開いており、偏光板を回転してゆくと一方の光の強さの階段が消える位置があり、これによって反射光の振動面と入射面のなす角 φ_A あるいは φ_B が測定

第10図 反射光の強度分布

できる。

主臨界角で全反射する光の振動方向と主応力軸の方向との間には簡単な関係がある。主臨界角 i_p ($p=1, 2, 3$) で全反射する光を観測する場合、 n_p 円と反射面との交点たる Q_p 点は y_p 軸上にある。 n_p 円と x_p 軸は垂直である。したがって x_p 軸は xz 面内にある。この主応力軸 x_p と z 軸のなす角すなわち x_p 軸の天頂角を φ_p^* ($p=1, 2, 3$) とする。 Q_p 点に対応する屈折波の E_d の方向余弦は $\xi = \sin \varphi_p^*$, $\eta = 0$, $\zeta = \cos \varphi_p^*$ であり、屈折角は $i_d = \pi/2$, 反射角は $i_a = i_p$ ($p=1, 2, 3$) であるから(11)式に代入してやると、入射波および反射波の振動面が入射面となす角 φ_p' および φ_p について

$$\tan \varphi_p = \tan \varphi_p' = \frac{n_p}{n_l} \tan \varphi_p^* = \tan \varphi_p^* / \sin i_p$$

なる関係が得られる。すなわち x_p 軸の天頂角 φ_p^* は

$$\tan \varphi_p^* = \tan \varphi_p \sin i_p \quad (p=1, 2, 3) \dots\dots (12)$$

で与えられる。この式の幾何学的意味を第11図に示す。すなわち主臨界角で全反射する光の振動面と xz 面との交線が x_p 軸である。

9. 主応力軸および主屈折率の決定法

これまで述べてきた予備知識によって、全反射臨界角と反射光の振動方向から、主応力軸および主屈折率を完全に決めることができる。

(i) A' 点が n' 曲線上に現われない場合 この時試験片の回転角 θ の変化につれて臨界角は、第12図(c)に示すように 180° を周期として単調な増減をする。 n' 曲線は第12図(b)のように原点对称な外にとつた曲線となる。主応力軸および主臨界角を決定するには次の手順による。大きいほうの臨界角 i_A の最大値が i_1 である。この反射光の振動方向 φ_1 を測定すると第11図に示した関係あるいは(6)式から主応力軸 x_1 の方向および天頂角 φ_1^* が得られる。次に小さいほうの臨界角 i_B の最小値から i_3 が決まり、反

第11図 主応力軸の方向

射光の振動方向 φ_3 から x_3 軸の方向およびその天頂角 φ_3^* が求まる。 x_2 軸の方向は x_1 軸および x_3 軸に垂直な方向として容易に求められる。以上の手順はステレオ投影を利用するのが便利であり、第12図(a)は反射面への投影である。中間の主臨界角 i_2 を求めるには、それが i_A の最小値、

i_B の最大値のいずれであるか判別する必要がある。一法として、すでに求めた x_2 軸が xz 面に含まれる位置まで試験片を回転し、この入射面でみられる全反射光の振動方向 φ_A と φ_B を測定し、 x_2 軸に關し第 11 図の關係をもつ全反射光の臨界角をもって i_2 とする。 φ_B と φ_A はほぼ 90° ほど違うので容易に判別できる。あるいはこの入射面で臨界角が極値をとるものを i_2 としてもよい。あるいは i_A が最小、 i_B が最大になる二つの入射面で φ_A あるいは φ_B を測定し、 x_2 軸と第 11 図に示す關係にあるほうの臨界角をもって i_2 としてもよい。こうして主応力軸と主臨界角が得られ、また (6) 式を用いれば主屈折率 n_1, n_2 および n_3 を求めることもできる。

(ii) A' 点が n' 曲線上に現われる場合 第 13 図 (b) および (c) のごとく A' 点が観測される場合も、 x_1 軸、 x_2 軸、 x_3 軸、 i_1 および i_3 は前項と全く同じ方法で求められる。 x_2 軸が xz 軸に含まれる位置で全反射臨界角が i_A および i_B の二つだけならば、 i_2 の決定法も前と同様であるが、この入射面で i_A と i_B のみならず i_C が現われる時は、前の方法では判別できない。この時は A' 点の臨界角 $i_{A'}$ を用いて i_2 を求める。

応力測定の場合には主屈折率の差がきわめて小さく、 $n_1 \div n_2 \div n_3$ 、 $(n_1 - n_2)/n_1 \approx (n_2 - n_3)/n_1 \approx 10^{-3}$ の程

度である。 OA と OA' のなす角は ω より大きくはないから上記の数値を入れると $(OA - OA')/n_2 \leq (OA - OA \cos \omega)/OA \approx \omega^2/2 \approx \{(n_1 - n_2)/n_1\} \{(n_2 - n_3)/n_3\} \approx 10^{-6}$ となる。したがってきわめて高い精度で $i_2 \div i_{A'}$ なる近似式が成立する。結晶の屈折率測定に当っては上記の近似度が悪い。そこでステレオ投影図上に x_1 と x_3 を通る大円をえがくと、えくぼ点 A はこの大円上にあるはずである。 A' のあらわれる位置がわかっているから、 $A'O$ とこの大円の交点として A 点の方向が求まり、 A 点の天頂角 $\varphi_{A'}$ も求まる。 A 点の正射影が A' 点であるから

$$n_2 = OA = OA' / \sin \varphi_{A'} = n_1 \sin i_{A'} / \sin \varphi_{A'} \dots (13)$$

によって n_2 を求めることができる。あるいは、 x_1 軸と第 1 光軸 (OA) のなす角すなわち第 1 光軸角 (第 4 図参照) Ω は (3) 式より

$$\tan \Omega = \frac{n_1}{n_3} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} \dots (14)$$

となることがわかるから、ステレオ投影図より Ω を求めて上式に代入しても n_2 が求められる。

10. 主応力値の決定法

これまで主応力軸と主屈折率の測定法をのべてきたが、この方法は結晶などの複屈折率の高い物質の屈折率測定に應用できる。応力測定の場合、主屈折率の差

第 12 図

第 13 図

がきわめて小さいので主屈折率の個々の値を求めたのち(1)式によって応力を求めるのでは精度が低い。

$n_0 = n_l \sin i_0$, $n_p = n_l \sin i_p$ ($p=1, 2, 3$) であるから, i_0, i_1, i_2, i_3 が互にきわめて近い値であることを考慮すると

$$n_p - n_0 = n_l (\sin i_p - \sin i_0) = 2n_l \cos \left(\frac{i_p + i_0}{2} \right) \times \sin \left(\frac{i_p - i_0}{2} \right) = n_l \cos i_0 (i_p - i_0)$$

となる。したがって(1)式は

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_0 &= C_1' \sigma_1 + C_2' (\sigma_2 + \sigma_3) \\ i_2 - i_0 &= C_1' \sigma_2 + C_2' (\sigma_3 + \sigma_1) \\ i_3 - i_0 &= C_1' \sigma_3 + C_2' (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

となる。ただし $C_1' = C_1/n_l \cos i_0$, $C_2' = C_2/n_l \cos i_0$, i_0 は無応力時の全反射臨界角である。この式によって応力を求めればよいが, 左辺の i_0, i_1, i_2, i_3 の個々の値を測定するのは精度が悪く, またその必要もない。必要な量は $(i_1 - i_0)$, $(i_2 - i_0)$, $(i_3 - i_0)$ であるから, これを望遠鏡の視野に刻んだ角度目盛あるいは望遠鏡微動用のマイクロメータで測定する。このためまず無応力状態の試験片を用い, 試験片およびコリメータの角度を調整して, 臨界角 i_0 およびコリメータの十字線の像を望遠鏡の視野の中央におく。調整後はコリメータを動かさない。応力測定を行なう試験片の臨界角を測

定する際は, 試験片の傾きを調整して, コリメータの十字線の像が前と同じく望遠鏡の中央にくるようにすると, 試験片の表面が, 無応力状態の試験を行なった時とまったく平行になり, 視野の中央が i_0 の位置になる(第10図参照)。この基準になる i_0 の位置から臨界角までの差を読むことにより, $(i_1 - i_0)$, $(i_2 - i_0)$, $(i_3 - i_0)$ の測定を精度高くなるうことができる。(15)式の右辺にある係数についても, 液体の屈折率 n_l および無応力時の全反射臨界角 i_0 を直接求める必要はなく, 応力が既知なる感度検定用試験片について $(i_1 - i_0)$, $(i_2 - i_0)$, $(i_3 - i_0)$ を測定すれば, (15)式により C_1' および C_2' を求めることができる。

ところで浸し液の屈折率の温度係数はかなり大きく, 測定中に温度が変化すると基準となる i_0 の位置が変る。これによる誤差をさけるためには, 恒温装置を使うのも一法である。あるいは温度変化は i_p および i_0 に対して敏感であるが, C_1' , C_2' および $(i_p - i_0)$ (ただし $p=1, 2, 3$) に対しては鈍感であることを利用し, 浸し液中に応力測定用の試験片と i_0 測定用試験片を同時に浸し, 基準となる i_0 をたえずチェックしながら $(i_p - i_0)$ を測定しても温度変化の影響を除くことができる。

第14図 x_3 軸が反射面に垂直な場合

第15図 x_2 軸が反射面に垂直な場合

第16図 x_1 軸が反射面に垂直な場合

11. 自由表面の応力測定

主応力軸の一つが反射面に垂直な場合, 試験片の回転による臨界角の変化は非常に簡単に求められるのですでに18世紀からよく知られていた。その結果は本論文ですでに述べてきたものの特別な場合であるから特別な考慮を必要としないが, 表面応力の測定の場合の便を考えて特に記せば第14, 15, 16図のようになる。

第15図(b)のBC部分にあらわれる nc' 曲線が存在する角度範囲 ω^* はほぼ ω と同程度の大きさで, 応力測定の場合 $\omega^* \approx 10^{-1}$ deg 程度である。したがって大部分の場合には, n' 曲

線は円とだ円からなり、この部分では屈折率曲面の対称性から考えて屈折角は $i_d = \pi/2$ 、したがって、 $n' \equiv n$ である。主応力軸の決定および主応力の値の決定は第 14 ~ 16 図を参照すれば容易にわかる。

特に表面応力の測定では反射面に垂直な主応力が 0 であるから、きわめて容易である。(15) 式の各式の差を作ると

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_2 &= C'(\sigma_1 - \sigma_2) \\ i_2 - i_3 &= C'(\sigma_2 - \sigma_3) \\ i_3 - i_1 &= C'(\sigma_3 - \sigma_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

となる。ただし $C' = C_1' - C_2'$ である。Orowan の測定した焼入ガラスの表面応力の場合、第 16 図に相当し、 $\sigma_1 = 0$ 、 σ_2, σ_3 は圧縮応力であることがあらかじめわかっている。(16) 式に $\sigma_1 = 0$ を代入すると $\sigma_2 = -(i_1 - i_2)/C'$ および $\sigma_3 = -(i_1 - i_3)/C'$ となる。すなわち $(i_A - i_B)$ の最大値、最小値から主応力が求められる。Orowan の応力計では望遠鏡の視野に応力の目盛が刻んであり直接応力値が読みとれるようになっている。ただしこの場合、焼入れでガラスの表面に残留した光弾性効果が、実際の残留応力のみによって生じたものかあるいは応力凍結のように高温におけるひずみによって生じた効果が加わっているか確認されていないので、測定結果の精度には疑問がある。また浸し液にひたす方法ではなく、測定物の表面に屈折率の高いプリズムをのせる方法をとっているのが本実験の装置にくらべ臨界角があまりはっきり見えないようである。

第 14, 15 図の場合についても、応力値、主応力方向の求め方は上と同様である。ただ、 $(i_A - i_B)$ のみを測定する方法では応力の符号がわからない。すなわち、第 14 図と第 15 図とが区別できないわけである。符号を区別するには 8 章にのべた反射光の振動方向を測定する方法によればよい。 n' 曲線が円である場合には $\varphi' = \varphi = 0$ となる。だ円に相当する反射光については $\tan|\varphi'| = \tan|\varphi| = \cot\delta \cos i_0$ であり、 $\delta \leq \omega \approx 10^{-3}$ 、 $i_0 \approx \pi/2$ であるから $|\varphi'| = |\varphi| = \pi/2$ となる。この振動方向を第 14 図 (c)、第 15 図 (c)、第 16 図 (c) に

第 17 図 臨界角の回折像

矢印で示してある。この結果をつかえば $(i_A - i_B)$ の極値と φ の測定により応力の符号も決定できる。

12. 回折による誤差

臨界角の測定に用いる望遠鏡の視野の角度目盛は 10 秒程度のものが容易に得られる。これに対して、浸し液の屈折率を光弾性体の屈折率に近づけることにより $(i_A - i_B)$ を数十分にすることができ、したがって十分広い部分で全反射を行なわせ回折による臨界角の階段のぼけを小さくできる場合には精度の点で問題はない。しかし試験片の大きさには制限があり、応力こう配もあるので、応力状態がほぼ同じだとみなされるようなせまい部分で全反射を行なわせる必要がある。第 1 図に示した反射面の大きさ L 、あるいは反射光束の幅 s が小さくなると、回折現象によって第 10 図に示すような反射光強度の鋭い階段が現われなくなり、臨界角の測定に誤差を生ずるようになる。

入射光束の平行度がきわめて悪かったり、反射光束の幅が大きすぎると Helmholtz の回折があらわれるが、通常のコリメータを用い、 s も常識的な大きさ (数 mm 以下) であれば、Fraunhofer の回折として扱うことができる。

コリメータの焦平面上に面状の一樣な光度の光源があると考える。入射角 i_0 の光が i 方向に出てゆく光の強さを $I^*(i - i_0)$ とし、 $v = \frac{\pi s}{\lambda} \sin(i - i_0)$ とおくと、 $I^*(i - i_0) \propto \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2$ であることが知られている。

すなわちコリメータの焦平面上にある点から出た光は、望遠鏡の焦平面上にこの式であらわされるような角度分布をするわけである。これを第 17 図の B で示してある。ところで焦平面にある各点から発した光は種々の角度で試験片の表面に入射するが反射率が第 10 図に示したように階段状をなしている。したがって実際に望遠鏡の焦平面上に分布する光の強度は、上記の関数に反射率を乗じ、入射角について積分したものとなる。簡単のため反射率を第 17 図の A に示すように仮定し数値積分を行なった結果、望遠鏡の焦平面上における光の強度分布が、第 17 図の曲線 C のように求められた。そこで肉眼で臨界角を測定する場合の誤差 Δi として、曲線 C における強度の分布が 1/4 および 3/4 になる角度の差の半分をとることにとすると

$$\Delta i \approx \lambda/4s = \lambda/4L \cos i_0 \dots\dots\dots(17)$$

で誤差が評価できることがわかった。ただし λ は使用光の波長である。

マイクロフォトメータと X-Y レコーダの組合せによって反射光の強度分布を測定すれば $i_B - i_0$ (ただし

$p=1, 2, 3$) の測定精度を上式よりさらに向上させることができる。

13. あとがき

光弾性材料からなる試験体に応力を凍結したのち、応力を測定したい点を含む反射面を作ると、その点でのみの測定によって応力が求められることがわかった。一点の応力がその点でのみの測定により決定できることが本実験法の利点であって、通常の光弾性実験法のごとき主応力分離の煩雑な手続きを必要としない。

本実験法の測定精度は主として光の回折によりきまり、肉眼による測定では(17)式で評価できる。光の強度分布を測定すれば測定精度をさらに向上できる。

光弾性材料としてエポキシ樹脂、浸し液として二硫化炭素を用いて予備実験を行なったが、その結果次のことがわかった。i) $s=1\text{ mm}$ として 0.05 kg/mm^2 の凍結応力を5パーセント程度の精度で測定し得た。ただし測定例は少ない。ii) 反射面は、紙やすりと通常のバフ研摩によって仕上げた場合でもほぼ十分な平面度が得られるが周辺部がだれてしまう。レンズ研摩に用いるピッチ研摩を行なえば良好な面が得られる。iii) 試験片の切断、研摩により表面に加工層ができるはずであるが、研摩速度をおそくして試験片が二次転移点以上の温度にならないよう注意した結果、表面の光学的状態に対する研摩の影響は予備実験に用いた

測定装置の精度内ではほとんど認められなかった。iv) この光弾性材料と浸し液の組合せで、測定上の支障は特になかった。しかし試験片を浸し液に数時間つけたままにしておくとも表面に微細なきずがみられるようになり、臨界角もみにくくなってくる。10時間以上つけておくと表面の光弾性効果が変わってくる。また二硫化炭素は有毒である。したがって適当な浸し液と材料の組合せを検討する必要がある。

そもそも干渉現象を利用した光弾性実験法が開発された当初においては、光弾性材料の複屈折性がきわめて微弱であったため、その検出には干渉現象を応用せざるを得なかった。ところが干渉を用いたための原理的な欠陥すなわち主応力分離の煩雑さが、光弾性実験法の三次元問題への適用に当ってブレーキになっている。本実験法は感度の高い材料を用い、応力を直接求めようとするものである。精度向上のための技術的な研究は今後にまたねばならぬが、本実験法が三次元応力解析の有用な手段となり得ることが期待される。

終始、ご指導をたまわった東京大学 鵜戸口教授、堀助教授、慶応義塾大学 国尾教授に深く感謝する次第である。なお昭和35年度文部省科学研究費の助成をうけた。

文 献

- (1) M. Planck, *Theory of Light*, (1932), 121, Mac Millan and Co.
- (2) 同上 146 ページ.
- (3) 同上 169 ページ.

討

〔質問〕 (1) 平行偏光光弾性実験法は(1)式およびそれに等価な式より、もっと簡単な式に依存しているようであり、(1)式あるいは(15)式のみ依存する方法については、正負の符号を有する多くの主応力の組合せについて、本実験法を使用する場合のこれらの式の信頼性を確かめる必要があると思うがどうか。

(2) 資料切断面に沿う広がりはかなり大きなものが結果に与えるでしょうが、結果に影響する表面からの深さはどれくらいか。

(3) 測定しようとする点の絶対値が最大である主応力方向がおおよそ見当づけられる場合は、おおよそそれに直角に切断したほうがよいように思われるが、どうか。また精度がでない場合は適当な切断方向をさがすことが考えられる。(秦 謹一)

〔回答〕 (1) 光弾性実験法はすべて(1)式の関係をもとにしており、この点では全反射応力測定法とまったく同じである。ただ前者が干渉により屈折率の差を検出するのに対し、後者は全反射臨界角から屈折

論

率を直接求めているという相違があるだけである。応力の値が小さいかぎり、応力の正負に対し光弾性感度が等しいことが確かめられている。

(2) 測定結果に影響を及ぼす表面からの深さは、電磁光学によれば使用光の波長程度、すなわち 1μ 以下であることが知られている。

(3) いかなる断面で測定しても同じ主臨界角の値が臨界角の極値として求められるので精度は変らない。ただ軸対称問題のように、主応力方向の一つがあらかじめわかっている場合は、この方向に垂直な面で測定すれば、第14~16図に示したように、試験片の回転に対し臨界角の一方が一定、他方が正弦的に変化するので、測定の手順が簡単になる。

〔質問〕 三次元光弾性応力解析法を、オーソドックスな結晶光学的手法を用い、正攻法ともいえるべき解析方法を確立された点にまず敬意を表する。

ここでは理論よりも実際にこれを利用する場合に考えられる誤差と、それに対する対策および従来の方法との得失について伺いたい。

付表 1 三次元凍結応力測定法の比較

	測定原理	特 色	必要な試験片	応力を求める手続き	利 点
光弾性応力 解析法	偏光の干渉	応力差の測定法 (1回の観測により 二次主応力差の分 布が得られる)	3個以上の試験片、 多数のスライス	せん断応力分布を求め微分お よび積分をする。	微弱な応力差の測定が 可能
全反射応力 測定法	偏光の全反射	応力の直接決定法 (一点ごとの応力) の決定法	1個の試験片、測定点 を含む任意の方位の反 射面	反射面法線を軸として試験片 を回転しながら、全反射を観 測	一点の応力とその点の 測定のみで求まる。

(1) せん断応力差積分法と oblique incidence の併用あるいはこれらを改良した国尾の方法は、軸対称問題に対しては現在もっとも確立された三次元光弾性解析法である。もとよりこれらを非軸対称問題に適用するとかなりやっかいである。しかしながら発表の方法が point by point であるのに比べて、上記の方法は、二次主応力差あるいは等傾曲線が試験片全面についてえられる利点を有する。したがって重要な点の応力で、従来の方法では精度が期待できない部分にのみ、本方法を適用するなど、問題の性格に応じた使いわけが必要と思う。そこで、軸対称問題と非軸対称問題とに分けて、本方法と上記の従来の方法との技術上の難易および精度について比較してほしい。

(2) 同じく point by point な方法である収束偏光法と比較した場合の得失はどうか。

(3) i_0 を測定するための無応力試験片は当然模型と同じ応力凍結操作を与えられるものと思うが、普通光弾性実験に用いられるエポキシ樹脂の硬化状態では、凍結操作により(硬化がさらに進行して) i_0 が変化するものかどうか。

(4) この方法は、試験片をスライスせず片面だけがければ良いこと、応力こう配(反射面に直角方向)があっても、表面だけの測定であるから、スライス法(平均化される)より精度がよいこと、 i_0 の測定、浸し液の温度、回折、装置および試験片のアラインメントなどが、測定精度に影響するが、これらは従来法における等傾曲線の測定や図式積分よりも人為的誤差を除きやすいものであることなどがすぐれているように思う。しかし従来法は結晶光学にほとんど無知でも利用できたが、本方法は多少の知識を必要とする。したがって、今後本方法の普及のために、装置の簡易化、演算のノモグラフ化が望ましい。(島村昭治)

【回答】 この論文は主として理論に関するもので、ご指摘の技術上の諸問題は目下研究中である。したがって回答にならないが、だいたいの予想を述べる。

(1) 光弾性応力解析法と全反射応力測定法の一般的な比較は、付表 1 に示すとおりで、お説のとおり、両者の特色を生かして併用するのが良いと思われる。

たとえば、光弾性実験法でせん断応力差積分法を適用する場合、積分の出発点として応力の値のわかっている点が必要であるが、境界条件が変位で与えられていたり、自由表面がスライス面と垂直でない時などは、出発点の応力を求めにくい。この時、適当な点の応力を全反射法により求め、この点を出発点とすることができる。物体の一部分における応力分布だけを測定する場合、光弾性法では、この部分以外の測定値も必要であるが、全反射法では不必要である。全反射法によれば軸対称問題の場合、対称軸を含む一つの断面だけで、この物体内部全体のすべての応力成分が求められる。非軸対称問題で物体内部全体の応力分布を求める場合を除いては、手数は一般に全反射法のほうが少なくすむ。精度の点では、測定技術上の問題点が多数残っているので、両実験法の比較ができないが、軸対称問題では現在のところ光弾性法の精度が高く、非軸対称問題では、全反射法のほうが精度を向上し得る望みが多いと考えている。

(2) 収束光による光弾性実験も、主応力分離にはせん断応力差積分法を用いなければならず、前項に述べた他の光弾性法と特に大きな差はない。

(3) 焼なまし、凍結操作による i_0 の変化が認められる。特に重合度の悪い試験片では、測定精度に影響するような大きな変化がみられ、また浸し液にもおかれやすい。

(4) 光弾性法においては、等色線からしま次数を求めるに際して、特異点付近では応力分布に関するかなり高度の予備知識を要し、またせん断応力差積分法の適用に際してせん断応力の符号の判定も煩雑であるから、複雑な応力分布の解析に当っては十分なる注意が必要である。全反射法においては、予備知識はむしろ不必要で、臨界角の極大、極小から(15)式によって機械的に主応力が(符号も含めて)求められ、(12)式により主応力軸が求められる。(12)式は、平行な三直線上に $\tan \varphi_p^*$, $\tan \varphi_p'$, $\sin i_0$ の対数目盛を刻んだ共線計算図表であらわされるが、別の機会に発表する。

今後は精度の向上と実用化の研究に努めたいと思う。