539.4.019.1:534.211:624.042.8

縦引張衝撃によって生ずる応力とその伝ば*

松本浩之**, 荒井靖平**, 中原一郎***

The Impact Stresses Produced in a Suspended Cylindrical Bar
Due to a Longitudinal Tensile Impact

by Hiroyuki MATSUMOTO, Yasuhei ARAI, and Ichiro NAKAHARA

The upper end of a long cylindrical bar is jointed to a steel block and the bar is vertically suspended in a special testing machine built by the authors.

The impact stresses produced in the bar of which the lower end is suddenly stretched by a falling cylindrical body, are studied theoretically and experimentally.

The impact stresses, and the reflection and transmission of longitudinal waves at a discontinuous plane are analysed.

The condition of the contact of the falling body with the lower end of the bar are derived.

The graphical method developed in a previous paper is extended to treat the propagation of elastic stresses in the bar subjected to longitudinal tensile impact.

Impact stresses are measured by means of the germanium strain gages. The theoretical predictions show excellent agreement with experimental results.

1. 緒 言

弾性波の一次元的伝ばを仮定する丸棒の縦衝撃問題は, E. A. Ripperger⁽¹⁾ を初めとして, 多くの人々によって研究された。とくに E. C. Fischer は, 図式解法によって, 縦衝撃をうけた弾性棒中に生ずる応力を解析する方法を示した⁽²⁾。これらの研究はすべて単純な圧縮衝撃を対象としていて, 過去においては, 引張衝撃問題はほとんど研究されていない。もちろん, 同じような考え方は縦引張衝撃問題にも適用できるはずである。しかし, 衝撃問題においては, 不連続面における弾性波の反射と透過を伴うために, 静的問題におけるように, 全く同一の結果にはならない。

著者たちは, 前報告⁽³⁾において, Fischer の方法よりもより簡便な図式解法を用いて, 丸棒の縦圧縮衝撃によって生ずる応力の時間的変動を解析し, その結果は, Ge ひずみゲージによる測定結果とよく一致することを示した。

本研究においては, 前報告で示した衝撃応力に対する考え方や解法を, より複雑な縦引張衝撃問題に適用し, 不連続面における弾性波の反射と透過の現象は十分に正しく, 著者たちが示した図式解法は, 複雑な衝撃問題に対してはとくに有用であることがわかった。

2. 衝撃応力の大きさとその伝ば

2.1 衝撃応力の大きさ 第1図のような段付弾性棒 I, II の段部に, 円筒状の弾性体 III が V_0 の速度で衝突した場合には, 衝撃の瞬間に衝撃面をはさむ各領域には, それぞれ一定の大きさの応力 $\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$ が生じ, それらは一定の伝ば速度 $c_i = \sqrt{gE_i/\gamma_i}$ をもつ弾性波として, 各領域を伝ばする。ここで E は縦弾性係数, γ は単位体積重量, g は重力加速度であり, 棒 I, II および円筒 III についての値には, それぞれ添字 i ($=1, 2, 3$) をつけて区別することにする。

$$V_0 = \sqrt{2gh}$$

第1図 衝撃の瞬間に
衝撃面に生ずる応力 第2図 不連続断面で
の弾性波の反射と透過

* 昭和38年11月2日 第41期東京秋期講演大会において講演, 原稿受付 昭和39年2月5日。

** 准員, 東京工業大学大学院(東京都目黒区大岡山1)。

*** 正員, 東京工業大学。

前報告におけると同様に、衝撃によってエネルギー損失がなく、衝撃中は衝撃面の変位速度が等しいと仮定し、各領域の運動エネルギーとひずみエネルギーの和は与えられたエネルギーに等しいとして、棒 I, II, III に生ずる弾性波の大きさ σ_i を求めれば、次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \sqrt{\frac{E_1 \gamma_1}{g}} V_0 \\ \sigma_2 &= \frac{A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \sqrt{\frac{E_2 \gamma_2}{g}} V_0 \\ \sigma_3 &= \frac{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \sqrt{\frac{E_3 \gamma_3}{g}} V_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで σ_1 は引張応力、 $-\sigma_2$ 、 $-\sigma_3$ は圧縮応力である。

(1) 式においては、衝撃面に生ずる応力は、静荷重を受けた場合と同様に、 $A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 = A_3 \sigma_3$ の条件を満足している。もしも、棒 I, II および円筒の材質が等しいならば、(1) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &= \frac{A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \sigma^*, \quad \sigma_3 = \sigma^* - \sigma_1 \\ \text{ここで } \sigma^* &= \sqrt{\frac{E \gamma}{g}} V_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

2.2 不連続面における弾性波の反射と透過 棒 I を伝ばする弾性波 σ の波面が、第 2 図のように、材質あるいは断面積の変化した不連続面 AA に到達すると、応力 σ の一部 $\alpha_{11} \sigma$ は反射されて棒 I を伝ばし、のこりの $\beta_{12} \sigma$ 、 $\beta_{13} \sigma$ はその面を透過して、それぞれ棒 II, III を伝ばすると仮定する。いま反射、透過によってエネルギーの損失がなく、不連続面をはさむ各領域の変位速度が等しいとすれば、反射率 α_{11} 、透過率 β_{12} 、 β_{13} は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{-A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \\ \beta_{12} &= \frac{2A_1 \sqrt{E_2 \gamma_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \\ \beta_{13} &= \frac{-2A_1 \sqrt{E_3 \gamma_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで α, β の添字のうち、最初の数字は入射波 σ が伝ばする領域を、次の数字は反射波あるいは透過波の伝ばする領域を示している。

また、棒 II を伝ばする弾性波 σ の波面が不連続面 AA に到達すれば、同様にして、反射率 α_{22} 、透過率 β_{21} 、 β_{23} は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{22} &= \frac{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} - A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \\ \beta_{21} &= \frac{2A_2 \sqrt{E_1 \gamma_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \\ \beta_{23} &= \frac{2A_2 \sqrt{E_3 \gamma_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

また、円筒 III を伝ばする弾性波 σ の波面が不連続面 AA に到達すれば、同様にして反射率 α_{33} 、透過率 β_{31} 、 β_{32} は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{33} &= \frac{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} - A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \\ \beta_{31} &= \frac{-2A_3 \sqrt{E_1 \gamma_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \\ \beta_{32} &= \frac{2A_3 \sqrt{E_2 \gamma_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} + A_3 \sqrt{E_3 \gamma_3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

いずれの場合においても、弾性波が不連続面に到達したときには、この面における力のつりあい条件式

$$\left. \begin{aligned} A_1(1 + \alpha_{11})\sigma + A_3\beta_{13}\sigma &= A_2\beta_{12}\sigma \\ A_1\beta_{21}\sigma + A_3\beta_{23}\sigma &= A_2(1 + \alpha_{22})\sigma \\ A_1\beta_{31}\sigma + A_3(1 + \alpha_{33})\sigma &= A_2\beta_{32}\sigma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

が満足されている。もしも、不連続面をはさむ各領域の材質が等しいならば (4), (5), (6) 式は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{-A_1 + A_2 + A_3}{A_1 + A_2 + A_3}, \quad \beta_{12} = 1 - \alpha_{11} = -\beta_{13} \\ \text{そして } 1 \geq \alpha_{11} > 0, \quad 1 > \beta_{12} = -\beta_{13} \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

また

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{22} &= \frac{A_1 - A_2 + A_3}{A_1 + A_2 + A_3}, \quad \beta_{21} = \beta_{23} = 1 - \alpha_{22} \\ \text{そして } 1 \geq \alpha_{22} \geq -1, \quad 2 \geq \beta_{21} = \beta_{23} \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

また

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{33} &= \frac{A_1 + A_2 - A_3}{A_1 + A_2 + A_3}, \quad \beta_{32} = 1 - \alpha_{33} = -\beta_{31} \\ \text{そして } 1 \geq \alpha_{33} \geq -1, \quad 2 \geq \beta_{32} = -\beta_{31} \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

以上の結果から、反射率と透過率の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} - \alpha_1 &= \frac{\beta_{13} \beta_{31}}{1 + \alpha_{33}}, \quad \alpha_{22} - \alpha_2 = \frac{\beta_{23} \beta_{32}}{1 + \alpha_{33}} \\ \beta_{21} - \beta_2 &= \frac{\beta_{23} \beta_{31}}{1 + \alpha_{33}}, \quad \beta_{12} - \beta_1 = \frac{\beta_{13} \beta_{32}}{1 + \alpha_{33}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2} - A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2}} \\ \beta_1 &= \frac{2A_1 \sqrt{E_2 \gamma_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2}} \\ \alpha_2 &= \frac{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} - A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2}} \\ \beta_2 &= \frac{2A_2 \sqrt{E_1 \gamma_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \gamma_1} + A_2 \sqrt{E_2 \gamma_2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

であり, α_i, β_i は円筒 III が無い場合に, 棒 I あるいは棒 II を伝ばしてきた弾性波が, 不連続面 AA で反射あるいは透過される割合を示し, 添字 $i(=1, 2)$ は入射波の伝ばした領域を示す。

2.3 衝撃面における接触状態の判定 以上の結果は衝撃面において円筒 III と棒 II が接触しているときにのみ適用でき, 接触面圧力が負になったとき円筒 III と棒 II は離れると仮定する。

さて, 第1図のように, 棒 I, II の段部 AA を円筒 III で衝撃した場合に, 衝撃面に生じた応力 $\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$ は各棒を伝ばして他端で反射され, 再び衝撃面にもどってくる。この反射波を $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ とする。いま反射波が到達する直前に, 衝撃面をはさむ各領域に生じていた応力を $\sigma_{I0}, \sigma_{II0}, \sigma_{III0}$ とすれば, 衝撃面に到達した弾性波 $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ は (3), (4), (5) 式で示された割合で反射あるいは透過されるから, 反射波が衝撃面に到達した後に, 衝撃面をはさむ各領域に, 新たに生ずる応力 $\sigma_{I0'}, \sigma_{II0'}, \sigma_{III0'}$ は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{I0'} &= \alpha_{11}\sigma_I + \beta_{21}\sigma_{II} + \beta_{31}\sigma_{III} \\ \sigma_{II0'} &= \beta_{12}\sigma_I + \alpha_{22}\sigma_{II} + \beta_{32}\sigma_{III} \\ \sigma_{III0'} &= \beta_{13}\sigma_I + \beta_{23}\sigma_{II} + \alpha_{33}\sigma_{III} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

になる。結局, 反射波が衝撃面に到達した後は, 円筒衝撃面の応力 σ_D は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_D &= \sigma_{III0} + \sigma_{III} + \sigma_{III0'} \\ &= \sigma_{III0} + \beta_{13}\sigma_I + \beta_{23}\sigma_{II} + (1 + \alpha_{33})\sigma_{III} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

もしも $\sigma_D > 0$ ならば, 衝撃面圧力は負になるから, 実際には入射波の一部 $\sigma_I', \sigma_{II}', \sigma_{III}'$ だけが (3), (4), (5) 式の割合で反射, 透過されたとき, 円筒衝撃面は自由端と同じ状態になり, このときにこの面に生ずる応力を σ_D' とすれば

$$\sigma_D' = \sigma_{III0} + \beta_{13}\sigma_I' + \beta_{23}\sigma_{II}' + (1 + \alpha_{33})\sigma_{III}' = 0 \dots\dots\dots (14)$$

になる。そして残りの応力 $(\sigma_I - \sigma_I'), (\sigma_{II} - \sigma_{II}')$ は, 衝撃面を通過するとき, 棒 I あるいは棒 II のみ反射あるいは透過され, $(\sigma_{III} - \sigma_{III}')$ は衝撃面で全反射される。そこで弾性波 $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ が衝撃面に到達する

ことによって, この面をはさむ各領域に新たに生ずる応力 $\sigma_{I0'}, \sigma_{II0'}, \sigma_{III0'}$ は次式のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{I0'} &= \alpha_{11}\sigma_I' + \beta_{21}\sigma_{II}' + \beta_{31}\sigma_{III}' + \alpha_1(\sigma_I - \sigma_I') \\ &\quad + \beta_2(\sigma_{II} - \sigma_{II}') = (\alpha_{11} - \alpha_1)\sigma_I' + (\beta_{21} - \beta_2)\sigma_{II}' \\ &\quad + \beta_{31}\sigma_{III}' + \alpha_1\sigma_I + \beta_2\sigma_{II} \\ \sigma_{II0'} &= \beta_{12}\sigma_I' + \alpha_{22}\sigma_{II}' + \beta_{32}\sigma_{III}' + \beta_1(\sigma_I - \sigma_I') \\ &\quad + \alpha_2(\sigma_{II} - \sigma_{II}') = (\beta_{12} - \beta_1)\sigma_I' \\ &\quad + (\alpha_{22} - \alpha_2)\sigma_{II}' + \beta_{32}\sigma_{III}' + \beta_1\sigma_I + \alpha_2\sigma_{II} \\ \sigma_{III0'} &= \beta_{13}\sigma_I' + \beta_{23}\sigma_{II}' + \alpha_{33}\sigma_{III}' - (\sigma_{III} - \sigma_{III}') \\ &= \beta_{13}\sigma_I' + \beta_{23}\sigma_{II}' + (1 + \alpha_{33})\sigma_{III}' - \sigma_{III} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

(10), (14) 式を (15) 式に代入すれば, $\sigma_{I0'}, \sigma_{II0'}, \sigma_{III0'}$ は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{I0'} &= \alpha_1\sigma_I + \beta_2\sigma_{II} - \frac{\beta_{31}}{1 + \alpha_{33}}\sigma_{III0} \\ \sigma_{II0'} &= \beta_1\sigma_I + \alpha_2\sigma_{II} - \frac{\beta_{32}}{1 + \alpha_{33}}\sigma_{III0} \\ \sigma_{III0'} &= -\sigma_{III} - \sigma_{III0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

3. 図式解法による応力の時間的変動

(i) 衝突の瞬間に衝撃面に生ずる応力の大きさ,
(ii) 不連続断面における弾性波の反射と透過の割合,
(iii) 衝撃面における接触状態の判定条件, を用いれば, 第3図 (a) のような円筒の衝突によって棒 I の任意断面に生ずる応力の時間的変動を理論的に求めることができる。

第3図 (b) は, 段付棒 I, II の段部 AA に, これと同質の円筒が高さ h から自然落下して $V_0 = \sqrt{2gh}$ の速度で縦方向に衝突した場合に, 棒 I, II および円筒中を弾性波が伝ばするようすを示したもので, 縦軸は棒 I, II および円筒の横断面の位置を, 横軸は時間を示したものである。

まず衝突の瞬間に, 棒 I, II および円筒の衝撃面には, それぞれ (2) 式で与えられる応力 $X_1 = \sigma_1$, 応力 $Y_1 = -\sigma_2$, $Z_1 = -\sigma_3$ が生じ, それぞれ等しい速度 $c_0 = \sqrt{gE/\gamma}$ で固定端 B および自由端 C, D に向かって伝ばする。棒 I, II および円筒 III の長さを l_1, l_2, l_3 とすれば, 時間 $t = l_1/c_0, l_2/c_0, l_3/c_0$ の後には, X_1 は同符号の応力 σ_1 として, Y_1, Z_1 は絶対値が等しい異符号の応力 σ_2, σ_3 として反射され, 衝撃面 AA に向かって伝ばする。

もしも $l_3 > l_2$ であって, l_1 が l_2, l_3 に比べて十分に長いならば, まず棒 II の下端 C において反射された応力 σ_2 は, そこに生じていた圧縮応力 $-\sigma_2$ を消失しながら衝撃端に向かって進み, $2l_2/c_0$ 時間後に衝撃面に到達して円筒に透過する。そして円筒における応

力が $-\sigma_3 + \beta_{23}\sigma_2 \leq 0$ の条件を満足しておれば、その後も棒 II と円筒は接触を保ち、衝撃面をはさむ各領域には $X_2 = \beta_{21}\sigma_2$, $Y_2 = \alpha_{22}\sigma_2$, $Z_2 = \beta_{23}\sigma_2$ の大きさの応力が生じ、それぞれ B, C, D 端に向かって伝ばする。 $t = 2l_3/c_0$ 時間後には、D 端からの反射波 σ_3 が衝撃面に到達する。もしもこのとき $\alpha_{33}\sigma_3 + \beta_{23}\sigma_2 > 0$ ならば、 σ_3 の到達によって、円筒は棒 II を離れる。そして衝撃面をはさむ各領域には、

$$X_3 = \frac{\beta_{31}}{1 + \alpha_{33}} (\sigma_3 - \beta_{23}\sigma_2),$$

$$Y_3 = \frac{\beta_{32}}{1 + \alpha_{33}} (\sigma_3 - \beta_{23}\sigma_2), \quad Z_3 = -\beta_{23}\sigma_2$$

の応力が生ずる。その結果、 $t = 2l_3/c_0$ 時間後に衝撃面の応力は消失して、円筒と棒 II の接触面は自由端の状態になり、この時間以後は引張応力も圧縮応力もすべてこの面で全反射される。それゆえに、C 端で反射されて $t = 4l_2/c_0$ の瞬間に衝撃面 AA に達した応力 $-Y_2$ の一部はこの面で反射されて、 $Y_4 = -\alpha_2(\alpha_{22}\sigma_2)$ の応力が棒 II を C 端に向かって進み、残りの部分は AA 面を透過して $X_4 = -\beta_2(\alpha_{22}\sigma_2)$ の応力が棒 I を B 端に向かって伝ばする。固定端 B で反射され、時間

$2l_1/c_0$ に衝撃面に到達した引張応力 σ_1 の一部 $X_n = \alpha_1\sigma_1$ は、AA 面で反射されて B 端に向かい、残りの部分 $Y_n = \beta_1\sigma_1$ は AA 面を透過して自由端 C に向かう〔第 3 図 (b) においては $n=10$ 〕。したがって棒 I を種々の大きさの応力が伝ばするから、棒 I の各断面に生ずる応力は時間的に変動する。

第 3 図 (c) は、棒 I の EE, FF, GG 断面に生ずる応力の時間的変動を示したもので、まず衝撃面から a_3 だけ離れた GG 断面には、 $t=0$ の瞬間に衝撃面に発生した応力 X_1 が時間 $t = a_3/c_0$ の後に到達し、次いで衝撃面 AA に発生した応力 X_2 は棒 I を伝ばし、GG 断面に到達する。この間 GG 断面の応力 σ は一定値 σ_1 に保たれるから

$$0 \leq t < a_3/c_0 \text{ においては } \sigma = 0$$

$$a_3/c_0 \leq t < (a_3 + 2l_2)/c_0 \text{ においては}$$

$$\sigma = X_1 = \sigma_1$$

である。時間 $t = 2l_3/c_0$ の後に衝撃面に生じた応力 X_3 は、棒 I を伝ばして GG 断面に到達する。この間 σ は一定値 $(X_1 + X_2)$ に保たれるから

$$(a_3 + 2l_2)/c_0 \leq t < (a_3 + 2l_3)/c_0 \text{ においては}$$

$$\sigma = X_1 + X_2 = \sigma_1 + \beta_{21}\sigma_2$$

第 3 図 各測定点における応力変動の図式解析結果と測定結果

同様にして

$(a_3 + 2l_3)/c_0 \leq t < (a_3 + 4l_3)/c_0$ においては

$$\begin{aligned}\sigma &= X_1 + X_2 + X_3 \\ &= \sigma_1 + \beta_{21}\sigma_2 + \frac{\beta_{31}}{1 + \alpha_{33}}(\sigma_3 - \beta_{23}\sigma_2)\end{aligned}$$

である。そして時間 $t = (2l_1 - a_3)/c_0$ (図中矢印で示す) の後には、B端で反射された引張応力 X_1 が GG 断面に到達するから

$(2l_1 - a_3)/c_0 \leq t < (2l_1 + a_3)/c_0$ においては

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(\sum_{n=1}^9 X_n\right) + X_1 \\ &= \sigma_1 + \beta_{21}\sigma_2 + \frac{\beta_{31}}{1 + \alpha_{33}}(\sigma_3 - \beta_{23}\sigma_2) \\ &\quad - \beta_{22}\alpha_{22}\sigma_2(1 - \alpha_2 + \alpha_2^2) \\ &\quad - \beta_2 \frac{\beta_{32}}{1 + \alpha_{33}}(\sigma_3 - \beta_{23}\sigma_2)(1 - \alpha_2 + \alpha_2^2) + \sigma_1\end{aligned}$$

になる。

第4図 (a) は、円筒長さ l_3 のみが異なる場合について、GG 断面に生ずる応力の時間的変動を示したも

第4図 $l_3 = 75$ cm の場合の GG 断面の応力変動

のである。

4. 実験方法

第5図は本研究に用いた実験装置であって、垂直に立てられた高さ 4 m の支柱に固定された 3 本の案内丸棒の間を自由に落下した軟鋼製円筒が、実験棒 I にねじ止めされた棒 II の上端を、正しく軸方向に衝撃するようになっている。

実験棒 I はその上部にねじが切られており、支柱上端に固定された縦、横、高さがそれぞれ 15 cm, 30 cm, 5 cm の鋼ブロックにナットで締付けられ、案内棒の間に鉛直につられている。

実験棒としては直径 20 mm, 長さ 3.5 m の軟鋼丸棒を用い、衝撃端からそれぞれ 25 cm, 1.5 m, 3 m 離れた表面に Ge ひずみゲージをはり付け、前報告⁽³⁾におけると同様な方法によって、衝撃応力を測定した。

5. 実験結果

5.1 衝撃面の面とりの影響

3章における解析結果を実験的に確認するためには、円筒を棒 II に正しく縦方向に衝突させると同時に、円筒および棒 II を面衝突させる必要がある。

円筒の内外径比が比較的小さく、棒 II

第5図 実験装置

の上端を中心近くで打撃する場合には、測定された応力波形の再現性は良好であった。しかし円筒の内外径比が大きく、棒 II の上端を中心から離れて打撃する場合には、円筒衝撃端の外周を第 6 図 (a) のように面とりすることによって、波形の再現性が得られた。

波形におよぼす面とりの影響を知るために、円筒下

端には第 6 図 (b) のような段がついているものとして、波形の立上りを解析した。その結果、第 6 図 (c) のように、弾性波は時間とともに階段状に立上がり、最終的には段がない場合の一定値 σ_1 に一致することになる。したがって、面とりによって波形の立上がりはいくぶん悪くなるけれども、面とり部分の長さ

l_s' が棒 I, II および円筒の全長に比して十分に短いならば、応力波の高さにはほとんど影響がなくなり、第 6 図 (b) の場合には、衝撃後 $15 \mu s$ でほぼ一定値に達し、面とりがある場合とない場合についての波形写真においては、第 6 図 (d), (e) のようにほとんど差異が認められない。

第 6 図 波形の立上りに及ぼす衝撃端の面とりの影響

第 7 図 GG 断面の応力変動に対する測定値と理論値の比較

第 8 図 応力 $\sigma_1(0)$, $\sigma_{max}(X)$ の測定値と理論値の比較

5.2 図式解析結果と実験結果との比較 第3, 4

図は、図式解析結果と測定結果を比較したもので、図式解析においては、上端は完全な固定端とみなしており、図中の矢印は棒Ⅰの上端からの反射波が測定点に到達した瞬間を示している。弾性波が固定端に達すれば、絶対値が等しい同符号の波として反射されるから、この反射波が測定点に到達すれば、理論的には引張応力は増大する。しかし棒Ⅰの上端はねじで固定され、完全な固定端ではないから、理論と実験の結果の比較は、固定端からの反射波が測定点に到達するまでにおいて意味があり、両結果はよく一致している。上端からの反射波が測定点に到達後には、両結果は完全には一致しないけれども、定性的にはほぼ一致する。

第7図は、第3図の場合に、GG断面に生ずる応力と衝撃速度との関係について、解析結果と実験結果とを比較したものである。

第8図は、第3図の各測定点に生ずる初期応力 σ_1 および最大応力 $\sigma_{\max}$ と衝撃速度との関係について、解析結果と実験結果を比較したもので、 σ_1 については両結果はよく一致した。この実験においては、最大衝撃応力 $\sigma_{\max}$ は、棒Ⅰの固定端からの反射波が測定点に到達した後に生じ、そのために、棒Ⅰの上端を完全な固定端と仮定して解析した結果に比べれば、 $\sigma_{\max}$ の実験値は理論値よりかなり小さかった。

第9図は、長さ $l_3=75$ cm の円筒を用いた場合に、GG断面に生ずる応力について、実験値と解析結果を比較したもので、両者はよく一致している。

ここで得られた結果は、通常の教科書の結果とは、定性的にも定量的にも一致しない。なぜならば、通常の教科書においては、衝突の瞬間に一律な応力を生じ、落下円筒のもつエネルギーが、弾性棒Ⅰのひずみエ

ネルギーに変換されると仮定しているからである。

いま衝撃中は、棒Ⅰの変位速度分布は直線的であると仮定して⁽⁴⁾、棒Ⅰの質量 W_1/g に対する相当質量 $W_1/3g$ を求めて、これを棒Ⅱに付加する。そして円筒および棒Ⅱを剛体として、それらの重量をそれぞれ W_3 , $W_2+W_1/3$ とし、衝撃直前の円筒の運動エネルギーに等しいひずみエネルギーが、棒Ⅰにたくわえられると仮定して、棒Ⅰに生ずる最大応力 $\sigma_{S.E}$ を求めれば、次の結果が得られる。

$$\sigma_{S.E} = \sqrt{\frac{W_3}{W_1}} \frac{1}{1 + \frac{W_1 + 3W_2}{3W_3}} \sqrt{\frac{E\gamma}{g}} V_0 \dots (17)$$

ここで $V_0 = \sqrt{2gh}$ は衝撃速度、 E , γ は棒Ⅰの縦弾性係数、単位体積の重量、 g は重力加速度、そして h は落下高さである。しかし $\sigma_{S.E}$ は衝撃物体の重量に関係する。この実験においては、 $W_1=8.51$ kg, $W_2=11.45$ kg, $W_3=9.68$ kg であるから、(17) 式によって $\sigma_{S.E}$ を計算して、第8図中に記入すれば、一点鎖線で示されるようになり、実験値とはかなり相違する。

6. 結 言

一端を固定して、鉛直につるした段付棒の段部を、落下円筒で衝撃的に引張ったときに生ずる応力を求めるために、材質および断面積が異なる3種の棒が、一平面上で接触する場合について、衝撃面に生ずる応力、不連続面における弾性波の反射率、透過率および接触状態の判別式を導き、これらの結果を用いて、図式的に衝撃応力を求めた。この理論結果は、一次元的な弾性波伝播を仮定して得られたものであるが、測定結果ときわめてよく一致する。衝撃応力は落下円筒の衝撃速度に比例するが、落下円筒の重量には直接関係しない。一般に、最大応力は、衝撃の瞬間に衝撃面に生ずる応力よりもかなり大きく、最大応力と最大応力を生ずる時間は、衝撃物体および被衝撃物体の形状などによって、また断面の位置によって異なる。

文 献

- (1) E. A. Ripperger & H.N. Abramson, *Proc. 3rd Midwestern Conf. on Solid Mech.*, (1957), 135.
- (2) H. C. Fischer, *Appl. Sci. Res.*, A-8 (1959), 105, 278; A-9 (1960), 9, 93.
- (3) 松本・ほか3名, 機械学会論文集, 29-197 (昭38-1), 49.
- (4) S. Timoshenko, 北畠・片山訳, 材料力学, 上巻, 3版, (昭27), 182, コロナ社.

第9図 $l_3=75$ cm のときの GG 断面の応力変動に対する測定値と理論値の比較