539.384.4:624.075.2

非線形飛移座屈におけるたわみ波形について*

(外圧による小曲率棒の飛移座屈)

植 村 益 次**

On the Finite Deformation Mode in the Nonlinear Snap Buckling

(Snap Buckling of Curved Beams Having Small Curvature
under Uniform External Pressure)

by Masuji UEMURA

The nonlinear snap buckling problem of curved beams having small curvature due to external pressure, in which it is possible to obtain the exact solution, was taken up as an example to discuss the question (1) whether or not the approximate methods usually used in the analysis of nonlinear elastic problems are proper to define the buckling load and, (2) whether or not an asymmetrical deflection might give a lower buckling value, as pointed out previously.

The comparison of the exact solution with approximate solutions showed that the assumed deflection mode had a great influence on the buckling load. Further, the analytical results that the buckling loads obtained in the asymmetrical mode are smaller compared with those in symmetrical modes are found to be true only within the degree of precision of the approximate solutions themselves. The reason is that the symmetrical deflection mode derived from the exact solution of the nonlinear equation gives the minimum buckling load.

These analytical results seem to suggest the need for scrupulous attention to the assumed deflection mode in the approximation method necessary for the two-dimensional problems, such as problems of plates and shells.

1. は し が き

微少変形に基く線形理論による臨界座屈値は実験値よりはるかに高く, そのため Kármán⁽¹⁾, Tsien⁽²⁾ 以来有限変形に基く非線形理論による研究が多いが, 厳密解を得ることがむづかしく, 境界条件を満足するたわみ波形を仮定して近似解析する場合が多い. 筆者らも以前に球形かく^{(3)~(6)}, 円筒かく⁽⁷⁾⁽⁸⁾の飛移座屈を解析したが, その際対称変形を仮定するにとどまった. しかし曲率棒で矢高が高い場合には, 不伸張変形のほうが実際に起りやすく, 非対称変形も予想され^{(9)~(11)}, 低い座屈値を与えるとの議論もある.

しかし従来の見解はほとんどたわみ変形を仮定した上での結論である. 本文では矢高の低い小曲率棒ではあるが, 均一外圧による飛移座屈を例題として取上げ, 厳密解の得られることを示して従来の近似解と比較し, (1) 普通仮定される対称波形は, 非対称波形と比較して, 上座屈値を問題とする際妥当かどうか,

(2) 厳密解の得られない板・かくなど二次元的部材への適用のためやむなく採用する近似解では, 仮定した各種波形の影響はどうか, (3) 厳密解と比較して近似解の妥当性はどうか, (4) 非対称波形は可能かどうか等を検討し, 非線形問題での有限たわみ波形の重要性和, 解析に際して注意すべき点を指摘したいと思う.

2. 均一外圧による小曲率棒の平衡方程式

簡単のために一様断面の小曲率棒として第1図のご

第1図 均一外圧をうける
小曲率棒

とき円弧棒 (R : 曲率半径)を考え, 均一外圧 q (単位長さ当たり) が作用するものとする. 円弧棒の開き θ は大きくなく一次の微少量とし, 変位成分およびそれらの微係数の大きさについて次数の算定を行ない, 一次

* 昭和 36 年 4 月 5 日 第 38 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 38 年 9 月 11 日.

** 正員, 東京大学宇宙航空研究所 (東京都目黒区駒場町 856).

の量のみをとると、中立軸の伸びひずみ $\bar{\epsilon}$ 、曲率変形 κ は次式で表わされる。

$$\bar{\epsilon} = \dot{u} + w/R + \dot{w}^2/2, \quad \kappa = \ddot{w} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし “ $\cdot$ ” は円弧に沿う座標 s に関する微分を表わす。

u, w : s 方向, 外方垂直方向の変位成分

停留原理に基づき全ポテンシャルエネルギー (II) の最小条件から変分によって平衡方程式を導く。 II は

$$\begin{aligned} II &= \frac{EA}{2} \int_0^l \bar{\epsilon}^2 ds + \frac{EI}{2} \int_0^l \kappa^2 ds + \int_0^l q w ds \\ &= \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\dot{u} + \frac{w}{R} + \frac{\dot{w}^2}{2} \right)^2 ds + \frac{EI}{2} \int_0^l \ddot{w}^2 ds + \int_0^l q w ds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

u, w に関する変分を行ない、 $\delta II = 0$ より、つりあい方程式

$$\text{軸方向: } (d/ds)(\dot{u} + w/R + \dot{w}^2/2) = 0 \quad \dots\dots\dots (3\cdot a)$$

$$\begin{aligned} \text{垂直方向: } EI \ddot{w} - EA (d/ds) \{ \dot{w}(\dot{u} + w/R + \dot{w}^2/2) \} \\ + (EA/R)(\dot{u} + w/R + \dot{w}^2/2) + q = 0 \quad \dots\dots\dots (3\cdot b) \end{aligned}$$

と、自然境界条件として、 $s=0, l$ において

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= 0 \quad \text{or} \quad \dot{u} + w/R + \dot{w}^2/2 = 0 \\ \delta w &= 0 \quad \text{or} \quad A \dot{w}(\dot{u} + w/R + \dot{w}^2/2) - I \ddot{w} = 0 \\ \delta \dot{w} &= 0 \quad \text{or} \quad \ddot{w} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

が得られる。

(3 $\cdot$ a)式の軸方向平衡方程式を積分すれば

$$\dot{u} + w/R + \dot{w}^2/2 = \text{一定} = -e (e > 0: \text{圧縮ひずみ}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となり、(5)式は中立軸ひずみが軸方向に一定であることを意味し、(5)式を用いると、(3 $\cdot$ b)式の垂直方向非線形平衡方程式は線形化され

$$\ddot{w} + \frac{e}{i^2} \ddot{w} = \frac{1}{Ri^2} e - \frac{q}{EAi^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし $i^2 = I/A$; i : 慣性半径

となる。結局本問題は、境界条件(4)式の下で、平衡方程式(6)式を解くことに帰する。

3. 近似解法

本問題は次章で述べるように厳密解が得られるが、板・かくなど二次元構造部材では近似解法にたよるを得ないことを考慮し、その場合のたわみ変形の妥当性と注意事項を検討する意味で、まず近似解法を示す。

例題として、両端固定の境界条件の場合を考え、

$$x = s/l = 0, 1; w = w_x = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

を満足する w を次のようなべき級数で表わす。

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \dots\dots\dots (8)$$

中央点 $x = 1/2$ でのたわみを $w_{x=1/2} = -\delta$ とする。

(i) $i=4$ の場合 この場合には、(7)式を満足する w は

$$w_s = -16\delta x^2(1-x)^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

となり、最も単純な中点に関する対称波形を表わし、停留原理において垂直方向の平衡方程式を導いた際の関係式に対応し、次に Galerkin 法によって解く。すなわち

$$\int_0^1 \left(w_{xxxx} + \frac{el^2}{i^2} w_{xx} - \frac{l^4}{Ri^2} e + \frac{ql^4}{EAi^2} \right) w dx = 0 \quad (10)$$

より、

$$\frac{ql}{EA} = e \left(\frac{l}{R} - \frac{64}{7} \frac{\delta}{l} \right) + 384 \frac{\delta}{l} \frac{i^2}{l^2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

の関係式が得られ、 e は(5)式を積分し、 u についての境界条件 $x=0, 1; u=0$ すなわち

$$\frac{u(1)}{l} = -e - \frac{1}{R} \int_0^1 w dx - \frac{1}{2l^2} \int_0^1 w_x^2 dx = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

より、

$$e = \frac{16}{15} \theta \left(\frac{\delta}{l} \right) - \frac{256}{105} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2, \quad \text{ただし } \theta = \frac{l}{2} R \quad \dots\dots\dots (13)$$

で与えられ、この e を(11)式に代入すれば外圧(q)-たわみ(δ)の関係式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{ql}{EA} &= \frac{32}{15} \theta^2 \left(\frac{\delta}{l} \right) + 384 \frac{i^2}{l^2} \left(\frac{\delta}{l} \right) - \frac{512}{35} \theta \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 \\ &\quad + \frac{16}{735} \left(\frac{\delta}{l} \right)^3 \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$ql/EA \sim \delta/l$ の関係曲線を第2図に θ をパラメータにして、 $i^2/l^2 = 10^{-5}/4$ (以下本文で同様) の場合について示す。三次曲線の極大点と極小点での (δ/l) の値は、微分により

$$\left(\frac{\delta}{l} \right)_{\max}^{\min} = \frac{7}{32} \theta \pm \frac{7}{32\sqrt{3}} \sqrt{\theta^2 - 360(i^2/l^2)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

で与えられ、

$$\theta^2 > 360 i^2/l^2 \quad (i^2/l^2 = 10^{-5}/4 \text{ では } \theta > 0.03) \quad \dots\dots\dots (16)$$

でないと、極大・極小点はなく、飛移座屈現象は起こらない。極大点ではエネルギーのじょう乱がなくとも飛

第2図 外圧とたわみとの関係曲線

移座屈し、極小点では座屈後除荷時に飛移座屈する。負荷時の極大値、すなわち“上座屈値”は、

$$\left(\frac{ql}{EA}\right)_u = 84\theta \frac{i^2}{l^2} + \frac{7}{45\sqrt{3}} \left(\theta^2 - 360 \frac{i^2}{l^2}\right)^{3/2} \dots (17)$$

で与えられる。この他、多少のエネルギーのじょう乱、試験での不完全性を念頭に入れ、球形かくで論じたように⁽⁴⁾、座屈前後の II 値が等しいような外圧値は、可能な座屈値の最小値を与えるものと考え、“下座屈値”と定義でき、

$$\left(\frac{ql}{EA}\right)_e = 84\theta \frac{i^2}{l^2} \dots (18)$$

で与えられる。上・下座屈値の θ に対する変化を第 3 図に示すが、 θ の増加とともに増大し、球形かくの場合⁽⁴⁾と異なり最小値は存在しないことは興味がある。以下本文では理想的な場合を考え、“上座屈値”について議論する。

(ii) $i=5$ の場合 この場合には、 a_i 中の一係数が未知数として残り

$$w = w_1 + w_2 \dots (19)$$

ただし $w_1 = w_s$, $w_2 = aw_s(1-2x) = a'(x^2-4x^3+5x^4-2x^5)$ で表わされ、 w_1 は(9)式の対称波形であり、 w_2 は中点に対して逆対称波形を意味し、 w は非対称波形となる。このように 2 項で表わされる場合の Galerkin 法の一般的手法によれば

$$\int_0^1 \left(w_{xxxx} + \frac{el^2}{i^2} w_{xx} - \frac{l^4}{Ri^2} e + \frac{ql^4}{EAi^2} w^j \right) dx = 0 \quad (j=1, 2) \dots (20)$$

の両式から未定係数を消去すればよいが、この場合には、 w_1 と w_2 の両関数の直交性のため、不幸にして未定係数は決定できない。

w は非対称波形を示すが、実際の変形初期には外圧の増加とともに非対称変形を取り、不伸張変形として軸圧縮応力を伴わないほうが座屈しやすいのではないかと思われ $[\theta$ の大きい場合には事実そのことが示されている^{(10)(11)]}、それらを検討するため a' を指定し、

第 3 図 上座屈値と下座屈値の θ による変化

一例として $a'=16\delta$ とした場合の非対称波形 w_{sa}

$$w_{sa} = -16\delta[(x^2-2x^3+x^4)-(x^2-4x^3+5x^4-2x^5)]$$

$$= -32\delta(x^3-2x^4+x^5) \dots (21)$$

を考える。この w_{sa} について (i) と全く同様の計算操作を行なうと、 $q-\delta$ の関係式、軸ひずみ e としてそれぞれ

$$\frac{ql}{EA} = \left(\frac{32}{15}\theta^2 + \frac{288 \times 16}{7} \frac{i^2}{l^2}\right) \left(\frac{\delta}{l}\right) - \frac{256 \times 8}{105} \theta \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 + \frac{64 \times 256 \times 16}{21 \times 315} \left(\frac{\delta}{l}\right)^3 \dots (22)$$

$$e = \frac{16}{15} \theta \left(\frac{\delta}{l}\right) - \frac{1024}{315} \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \dots (23)$$

が得られる。

(i) と同様に上・下座屈値はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left(\frac{ql}{EA}\right)_u = 108\theta \left(\frac{i^2}{l^2}\right) + \frac{7}{60\sqrt{3}} \left(\theta^2 - \frac{4320}{7} \frac{i^2}{l^2}\right)^{3/2} \dots (24)$$

$$\left(\frac{ql}{EA}\right)_e = 108\theta \left(\frac{i^2}{l^2}\right) \dots (25)$$

前と同様に $i^2/l^2 = 10^{-5}/4$ として、 $\theta = 0.05$ の場合の $(ql/EA) - (\delta/l)$ 関係を第 4 図に実線で示し、(i) の場合を破線で示して比較し、また上・下座屈値を第 3 図にあわせ示す。これから加圧時の上座屈値は、(i) で仮定した対称波形の場合より低下している。また軸ひずみ $(e) - (\delta/l)$ の関係を第 5 図に示すが、軸圧縮ひずみは低下し、上座屈値での軸ひずみ(黒丸で示す)はかなり低下している。しかし座屈後の大たわみ域では外圧値はきわめて大きくなり、座屈後はこのような非対称波形を保つことができないことは容易に了解でき、非現実的であろう。(i)、(ii) の近似解法に関する限り、上座屈値については、非対称波形を想定するほうが合理的であるかのごとき印象を与えている。(ii) のこの場合は逆対称たわみ成分を指定した

第 4 図 外圧-たわみ曲線の諸解法による比較

が、 II をなるべく小さくするように逆対称たわみ成分を合理的に決める方法を次に述べる。

(iii) $i=6$ の場合 $i=5$ の場合には、 w は一未定係数を含み、2項で表わされるが、両項の直交性のため未定係数を決められなかった。そこで $i=6$ とすると、未定係数は2個となり、前述の Galerkin 法を

$$w_{ap} = w_1 + w_2, w_1 = -\frac{64}{5} \delta x^3 (1-x)^2 (2+x), w_2 = \frac{a_2}{5} x^2 (1-x)^2 (5-8x-4x^2) \dots (27)$$

となる。中点を $x=1/2$ において $w_1 = -\delta$, $w_2 = 0$ であり、 w_1 , w_2 両成分ともに非対称波形であるが、 w_1 は対称波形に近く、 w_2 は逆対称波形に近い。 w_1 , w_2 は対称・逆対称波形の和として表示できるが、両者は直交条件を満足しないので、(20)式の Galerkin 法を適用でき、その結果

$$\left. \begin{aligned} \frac{ql}{EA} &= -2e\theta + \frac{24}{5} \left(\frac{i^2}{l^2} \right) \left(3008 \frac{\delta}{l} + 183 \frac{a_2}{l} \right) - \frac{532}{55} e \left(16 \frac{\delta}{l} + \frac{a_2}{l} \right) \\ \frac{ql}{EA} &= 2e\theta + \frac{8}{15} \left(\frac{i^2}{l^2} \right) \left(1472 \frac{\delta}{l} + 47 \frac{a_2}{l} \right) - \frac{1}{495} e \left(6528 \frac{\delta}{l} + 133 \frac{a_2}{l} \right) \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

の両式が得られ、 e は (12) 式から

$$e = \frac{\theta}{525} \left(576 \frac{\delta}{l} + \frac{a_2}{l} \right) - \frac{1}{1375} \left[\frac{34816}{7} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 + \frac{19}{3} \left(\frac{a_2}{l} \right)^2 + \frac{608}{3} \left(\frac{\delta}{l} \right) \left(\frac{a_2}{l} \right) \right] \dots (29)$$

で与えられる。この e を (28) 式の両式に代入後、 a_2/l を消去すれば、 $(ql/EA) - (\delta/l)$ の関係式が求まる。前と同じ場合の計算例を、第4, 5図に点線で付記する。

この場合には、Galerkin 法によって $II =$ 最小の条件をさらに良く近似するようにたわみ波形を決めたわけだが、前2者と比較すると、 ql/EA の最大値と上座屈値での軸ひずみ (黒丸で示す) はともにさらに低下している。第6図に (i), (ii), (iii) の3種のたわみ波形を、3種の (δ/l) のたわみ値について比較する。(iii) の方法によるたわみ波形は、指定した対称波形 (i) と非対称波形 (ii) の中間にあるが、変形の進行とともに波形は変化し、上座屈値近傍では非対称波形でも、座屈後は対称波形に近く、いちおう直観に符合することがわかる。

以上の近似解によれば、(iii) の方法は、たわみ波形を指定して拘束効果のある (i), (ii) より上座屈値が低い、上座屈値近傍では非対称波形を適当に含むほうが合理的のように思われたが、次に厳密解を示し、このような見解が妥当かどうかさらに検討する。

4. 厳密解

有限変形を考慮した垂直方向の非線形平衡方程式は、 e の導入によって (6) 式のように線形化され、厳密解が得られる。

第5図 軸ひずみ-たわみ曲線の諸解法による比較

第6図 たわみ波形の諸解法による比較

外圧による変形初期には、圧縮軸ひずみ ($e > 0$) が発生する。(6)式を書直すと、

$$w_{xxxx} + K^2 w_{xx} = \frac{K^2 l^2}{R} - \frac{ql^4}{EAi^2} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ただし $K^2 = e(l^2/i^2)$

となり、 w の一般解は

$$w = a \sin Kx + b \cos Kx + d_1 x + d_2 + \frac{l^2}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{ql^2}{EAK^2 i^2} \right) x^2 \quad \dots\dots\dots (31)$$

で与えられ、両端固定の境界条件を満足するように積分定数を決定すると、 w は K を未定のまま含み、

$$\frac{w}{l} = \frac{\theta \left(1 - \frac{X}{K^2} \right)}{K(2 - 2 \cos K - K \sin K)} \left[\frac{(2 - 2 \cos K - K \sin K)(\sin Kx - Kx + Kx^2)}{+ (2 \sin K - K - K \cos K)(\cos Kx - 1)} \right] \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし

$$X = \frac{ql}{2EA} \left(\frac{l^2}{i^2} \right) \frac{1}{\theta}$$

この w の式は K の値いにかかわらず、中点 $x=1/2$ について対称波形を示し、非対称波形をとることはない。未定の固有値 K は、(12)式の u についての境界条件から決定され、 K を決める条件式として次の $K-X$ (q) の関係式を得る。

$$\textcircled{a} X^2 - 2 \quad \textcircled{b} X + \textcircled{c} = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\textcircled{a} = 24(1 - \cos K) - 9K \sin K - (4 - \cos K)K^2$$

$$\textcircled{b} = 3K^2 \{ 4(1 - \cos K) - K \sin K - K^2 \}$$

$$\textcircled{c} = K^4 \{ 3K \sin K - (2 + \cos K)K^2 \} - 6 \frac{K^8}{\theta^2} \left(\frac{i^2}{l^2} \right) (1 - \cos K)$$

前と同様に、 $\theta = 0.05$ 、 $i^2/l^2 = 10^{-5}/4$ として $\left(\frac{ql}{EA} \frac{1}{2\theta} \right) - K$ の関係曲線を第 7 図に示す。同曲線で $\theta = 0.05$ の場合のようにループを描くことは飛移座屈現象を呈することを意味し、矢印方向 ($\rightarrow$ 負荷時、 $\leftarrow$ 除荷時) に進行する。 $\theta = 0.02$ の場合には不安定平衡域はなく飛移座屈は呈しない。

対称たわみ波形 w の中央点でのたわみ値 ($-\delta$) は、

$$-\frac{\delta}{l} = \frac{\theta \left(1 - \frac{X}{K^2} \right)}{K(2 - 2 \cos K - K \sin K)} \left[\frac{(2 - 2 \cos K - K \sin K) \left(\sin \frac{K}{2} - \frac{K}{4} \right)}{+ (2 \sin K - K - K \cos K) \left(\cos \frac{K}{2} - 1 \right)} \right] \quad \dots\dots\dots (34)$$

で与えられる。 $K-X(q)$ の関係を (33) 式から求めて用い、(34)式により $(ql/EA) - (\delta/l)$ の関係曲線を第 4 図に鎖線で示し、曲線上に対応する K 値も付記してある。また軸ひずみ $e \left(= K^2 \frac{l^2}{i^2} \right) - (\delta/l)$ を第 5 図に鎖線で示している。外圧の増加とともに $K(e)$ 、すなわち軸圧縮ひずみとたわみが増加するが、上座屈値で飛移座屈後は、軸ひずみは急減し、たわみは急増する。本厳密解は対称波形であるにもかかわらず、上座屈値およびその時の軸圧縮ひずみ値 (第 5 図黒丸印) はともに近似解法による値よりも低いことは注目しなければならない。

飛移座屈後は外圧の増加とともにたわみは増加するが、 K 値は漸減し、 $K=0$ (不伸張変形) を経て軸圧は引張ひずみになる。この場合には前述の解析式において $e < 0$ 、すなわち $K = iK'$ ($i = \sqrt{-1}$) とおいて同様の解析を行なえばよく、第 7 図の横軸以下は K' を縦軸にとっている。

次に第 6 図に、厳密解による対称たわみ波形を鎖線で示すが、上座屈値近傍などたわみの小さい領域では、近似解法による波形とはかなり異なり、(iii) の波形と比較してもそうであるが、飛移座屈後は仮定した

第 7 図 固有値 K の外圧値による変化

対称たわみ波形とほとんど同じである。

上述の厳密解は、 II = 最小の条件を満足し、上座屈値やその時の圧縮軸ひずみは最も低い、やはり対称波形であり、近似解法でできるだけ II を最小とるようにしてもたわみ波形はかなり異なり、大きな上座屈値を与える。また対称波形を想定するにしても、(i) のように無雑作に仮定するときわめて大きな上座屈値を与えるので、板・かくなど二次元部材でやむなく近似解法による場合は、慎重でなければならない。

なお第7図で $\theta = 0.05$ の場合には、 K が約 9 以上の平衡状態は存在しない。このことは、(33) 式において ㉑は負値をとるが、 $\left(\frac{i^2}{l^2}\right)/\theta^2$ が大きくなると、㉒は小さくなり、二次方程式の判別式 D が $D < 0$ となるからである。しかし $\left(\frac{i^2}{l^2}\right)/\theta^2$ が小さい場合には、 K の大きな領域でも別個の関係曲線が得られることがある。一例として θ は同じく $\theta = 0.05$ として $i^2/l^2 = (12.5 \times 10^{-7})/6$ の場合の $K - \left(\frac{ql}{EA}\right)/\theta$ の関係曲線を第8図に示すが、 K の大きな領域の曲線は高次のたわみ波形を示し、もちろん対称波形であって、 $K = 14 (X = 92.90)$ の場合の波形を第9図に示す。このような高次のたわみ波形が実際に実現するかどうかさらに検討の必要があろう。

5. 非対称外圧による座屈

均一外圧の下では、解析的には対称たわみ波形が最も低い座屈値を与えることがわかったが、実験で非対称たわみ波形の下で低い座屈値が得られるのは、負荷系の不完全性に起因するものと思われる。非対称外圧の下では、もちろん非対称たわみ波形が予想されるが、たわみ波形が座屈値に大きく影響することと関連して、外圧の不均一性がどの程度座屈値の低下に寄与するかを検討するために、直線的外圧分布の場合を一例として解析する。

外圧 q は次式で表わされるものとする。

$$q = q_0 + q_1(2x-1) \dots\dots\dots (35)$$

(35)式の q を(30)式に代入し、両端固定の境界条件の下に解けば、

$$\frac{w}{l} = \frac{1}{K(2-2\cos K - K\sin K)} \left[\left\{ \theta - \frac{q_0 l(1-\alpha)}{2EAK^2} \frac{l^2}{i^2} \right\} \left\{ (2-2\cos K - K\sin K)(\sin Kx - Kx + Kx^2) \right\} \right. \\ \left. + \frac{q_0 \alpha l^3}{3EAK^2 i^2} \left\{ (K\sin K + 3\cos K - 3)(\sin Kx - Kx) \right. \right. \\ \left. \left. + (K\cos K + 2K - 3\sin K)(\cos Kx - 1) - K(2-2\cos K - K\sin K)x^3 \right\} \right] \dots\dots\dots (36)$$

ただし $\alpha \equiv q_1/q_0$

(36)式を用い、固有値 K を(12)式の条件から決定すると、結局 K を決める条件式として、(33)式と同様に

$$\left[\textcircled{a} + \frac{\alpha^2}{15} \textcircled{a}' \right] X^2 - 2\textcircled{b}X + \textcircled{c} = 0 \dots\dots\dots (37)$$

ただし

$$\textcircled{a}' = (1 - \cos K) \left\{ \frac{480(1 - \cos K) - 480K \sin K + 48K^2(2 + 3\cos K) + 19K^3 \sin K - K^4(6 + \cos K)}{4(1 - \cos K) - 4K \sin K + (1 + \cos K)K^2} \right\}$$

第8図 高次波形の可能な場合の固有値 K の外圧値による変化

を得る。(33)式と比較して ㉑' 項が修正項として付加されたことになる。 $\alpha = 1$ の場合について、 $K - \frac{ql}{EA} \frac{1}{\theta}$ の関係曲線を第7図に破線で付記するが、均一外圧の場合の実線と比較して、座屈値の低下することはもちろんである。

第9図 高次たわみ波形の一例

6. む す び

以上非線形飛移座屈における有限変形たわみ波形の検討を主目的とし、外圧による小曲率棒の座屈問題を例題として解析したが、おもな結果は次のとおりである。

(1) 均一外圧を受ける小曲率円弧棒の 2 方向有限変形非線形平衡方程式を導き、その厳密解法を示した。

(2) 厳密解の得られないような板・かく問題への適用のため、たわみ波形を仮定する近似解法も提示したが、その範囲内では、上座屈値に関する限り非対称波形のほうが低い値を与え、従来指摘されたように実際に起りやすく合理的のように思われた。

(3) しかし厳密解と比較すると、厳密解は対称波形であるにもかかわらず、上座屈値およびその時の圧縮軸ひずみは最も低く、二次元問題での近似解法においてはたわみ波形の仮定には慎重さが要望される。

(4) 均一荷重の下で非対称波形や不伸張変形を仮定するが妥当かどうか今後に問題を提起したことになるが、非対称変形の意義は、実際の実験での試験片や負

荷条件の不完全性に帰せられそうで、不均一外圧の下での解析を付加し、上座屈値の低下を示した。

(5) 本文は小曲率円弧棒についての議論であるが、 θ が大きく、矢高が高くなるとさらに高次の変位成分を考慮しなくてはならないが、その際非対称波形のほうがより可能性があるのかどうかはさらに詳細の検討を要する。

文 献

- (1) Th. von Kármán & H.S. Tsien, *J. Aeron. Sci.*, 7-2 (1939-12), 43.
- (2) H.S. Tsien, *J. Aeron. Sci.*, 9-10 (1942-8), 373.
- (3) 吉村・植村, 東京大学理工学研究所報告, 3-11, 12 (昭 24-11, 12), 316.
- (4) 植村・吉村, 東京大学理工学研究所報告, 6-6 (昭 27-12), 367.
- (5) 植村, 日本航空学会誌, 2-6 (昭 29-5), 113.
- (6) 植村, 日本航空学会誌, 4-34 (昭 31-11), 273.
- (7) 砂川・植村, 機械学会論文集, 26-164 (昭 35-4), 510.
- (8) M. Sunakawa & M. Uemura, *Rep. Aeron. Res. Inst., Univ. of Tokyo*, No. 356 26-7, (1960-5), 107.
- (9) E. Hurlbrink, *Schiffbau*, 9 (1908), 517.
- (10) E.L. Nicolai, *Z. AMM*, 3 (1923), 227.
- (11) Y.C. Fung & K. Kaplan, *NACA TN*, 2840 (1952-11).

金 属 の 爆 発 成 形

ダイナマイトその他の強力爆薬の平和利用が年とともに広範囲になってきた。そのうち最も注目になるのが金属爆発成形の技術である。これは宇宙開発研究の副産物である。

この 10 年間可鍛性の低い金属で部品を造る研究が盛んであった。特にステンレス鋼およびチタン合金はロケットの部品の重要材料であり、その製作には新技術が必要とした。このプロセスには自由方式バルクヘッド方式、シリンダ方式構成法の 3 種類がある。いずれの場合も爆発装置は部品材料からある距離の所に置かれ、爆発エネルギーは空気または水を通して伝えられる。

ダイナマイト, TNT, RDX のような強力爆薬は一定の強さでエネルギーを出す。これは 1 in^2 当り最高 100 万ポンドの衝撃力である。バルクヘッドおよびシリンダ方式の場合は、数ミリ秒でダイスの形に合った部品を造ることができる。

このプロセスを最初に利用したのは、大形放物面反射鏡の製作であった。以前は構成部品を組立てるのに

長時間と巨費を要したが、爆発方式の場合全工程が 1 秒以内で完了する。

爆発方式が盛んになったのは、近代のロケットが大形化したために従来の工作機械ではロケット部品の製作に適しなくなったのである。したがってロケットのブースタケース、ベンチュリ、およびミサイルドームはこの方式で造っている。ミサイルドームの直径は約 $4\frac{1}{2} \text{ ft}$ であるが、この方式によれば直径の誤差は 0.010 in 以内、輪郭の誤差は 0.030 in 以内にとどまっている。単に 1 個のダイスを必要とするだけであるから、機械コストが少額であり、また仕上げも優秀である。

爆発方式によって金属に彫刻することができるようになった。この外金属粉末を圧縮して高温に耐える材料を造ることもできる。さらに異種の金属との接合、かたい Nimonic 金属の切断および押抜き、ステンレス鋼のはめこみ板の製作にも用いることができる。

(Times Rev. Ind. Technol., Vol. 2, No. 2, 1964, p. 39)

(日本科学技術情報センター提供)