539.385:621-462-452

短い有こう管のねじりによる変形と応力*

溝口孝喜**, 塩田豊治 雄**

Deformation and Stress in a Short Pipe Grooved
Axially under Torsion

by Koki MIZOGUCHI and Haruo SHIODA

In this paper, the deformations and stresses in a thin cylindrical pipe of finite length with groove cut out through the length axially under torsion are discussed utilizing the fundamental differential equation for cylindrical shell introduced by one of the present authors.

The angle of twist per unit length is greatly different from that of infinite pipe with the same groove, and great axial thrusts occur at the end positions of grips.

The theories are ascertained by experimental results.

1. 緒 言

第1図に示したように、軸方向に沿って切られたみぞを有する有限長さの管が、その両端を固定されたままねじられた場合、両端の固定条件がねじり角や応力状態になにほどの影響をおよぼすかを、先に筆者の1人が導いた円筒かくの基礎微分方程式を用いて解明したものである。

第1図

単位長さのねじり角については同じ切みぞを有する無限長の管に比してはるかに小さく、その差があまりに大きいので、実際上無限長の管に対する式は使用できないと思われる。また両固定端においては大きな軸方向内力が発生する。

またねじり角が無限長管に比しはなはだしく小さくなることは実験によって確認した。

2. 解 法

かく面に垂直方向および接線方向に表面力のある円筒かくの基礎微分方程式は筆者の1人により次のように導かれている⁽¹⁾。

$$\begin{aligned}
 & A \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{4B}{a^2} \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \theta^2} + \frac{6C}{a^4} \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \theta^4} + \frac{8-2\nu^2}{a^4} \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{6L}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{4}{a^6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\
 & + \frac{1}{a^8} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{D} \left[A \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \frac{2U}{a^2} \frac{\partial^4 p}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{B}{a^4} \frac{\partial^4 p}{\partial \theta^4} \right] \\
 & - \frac{1}{D} \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial \theta} - \frac{(2+\nu)}{a^2} \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)a^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^2 \partial \theta^3} + \frac{1}{12a^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^5 q}{\partial \theta^5} - \frac{1}{a^4} \frac{\partial^3 q}{\partial \theta^3} \right]
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2, & B &= 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2, & C &= 1 + \frac{1-\nu^2}{72} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \\
 L &= 2(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 A, & U &= 1 + \frac{1+(1-\nu)^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2
 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

であり、 a は円筒の半径、 h はその厚さ、 ν はポアソン比、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 w は半径方向の変位、 p, q はそ

* 昭和 38 年 3 月 19 日 関西支部第 38 期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和 38 年 12 月 23 日。

** 正員、大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥梅之町 4)。

れぞれ半径方向および接線方向の単位面積当りの表面力である。

x の原点を一方の固定端に取り、管の長さを l とすれば満たすべき 周囲条件は第 1, 2 図を参照し次のようになる。

1) $\theta = \pm \alpha$ にて

$$T_\theta = 0, \quad S = 0, \quad M_\theta = 0, \quad N_\theta + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} = 0$$

2) $x = 0$, および $x = l$ にて

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad v = \pm v_0 \text{ (一定)}$$

今与えられた断面を持つ無限長のみぞ管の軸方向に沿って、第 3 図に示すように交互に反対方向に作用する同一量の線荷重を作用させる。このような力を作用させた無限長管の一部 l の部分を考えると、周囲条件 2) の第 1 と第 3 は対称性から自動的に満たされる。したがってこの線荷重の円周方向の値を適当に選ぶことにより、条件 2) のすべてを満たすようにできる。

まず p だけ作用する場合を考え、 $p_j = P_j \sin j\theta$ に対する (1) 式の解を $w_{pj} = W_{pj} \sin j\theta$ とする。ここに P_j , W_{pj} はいずれも x だけの関数で

$$j = \frac{m\pi}{\alpha}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \dots \dots (3)$$

これらを (1) 式の両辺に代入すると次式をうる。

$$A \frac{d^8 W_{pj}}{dx^8} - \frac{4B}{a^2} j^2 \frac{d^6 W_{pj}}{dx^6} + \frac{6C}{a^4} j^4 \frac{d^4 W_{pj}}{dx^4} - \frac{8-2\nu^2}{a^4} j^2 \frac{d^4 W_{pj}}{dx^4} + \frac{6L}{a^4} \frac{d^4 W_{pj}}{dx^4} - \frac{4}{a^6} j^2 (j^2 - 1)^2 \frac{d^2 W_{pj}}{dx^2} + \frac{1}{a^8} j^4 (j^2 - 1)^2 W_{pj} = \frac{1}{D} \left[A \frac{d^4 P_j}{dx^4} - \frac{2U}{a^2} j^2 \frac{d^2 P_j}{dx^2} + \frac{B}{a^4} j^4 P_j \right] \dots \dots \dots (4)$$

(4) 式の両辺にフーリエ変換を施す。すなわち

$$\bar{W}_{pj} = \int_{-l}^l W_{pj} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \dots \dots \dots (5)$$

とすれば W_{pj} を x につき偶数回微分したものは、線荷重の作用箇所に関して x の偶関数であり、奇数回微分したものは奇関数であることを参照し、また右辺の P_j は x についての δ 関数と考えられるから、 δ 関数の諸性質を利用することによって、この変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[A \left(\frac{n\pi}{l} \right)^8 + \frac{4B}{a^2} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^6 j^2 + \frac{6C}{a^4} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 j^4 \right. \\ & \quad \left. - \frac{8-2\nu^2}{a^4} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 j^2 + \frac{6L}{a^4} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{a^6} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 j^2 (j^2 - 1)^2 + \frac{1}{a^8} j^4 (j^2 - 1)^2 \right] \bar{W}_{pj} \\ & = \frac{2P_j}{D} \left[A \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 + \frac{2U}{a^2} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 j^2 + \frac{B}{a^4} j^4 \right] \end{aligned} \dots \dots \dots (6)$$

ここに (6) 式の右辺は δ 関数の性質によって n の偶数項は消え奇数項だけ残る。(6) 式の逆変換を取れば w_{pj} として次式の形を取る。

$$w_{pj} = a \alpha_j \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{nj} \cos \frac{n\pi x}{l} \dots \dots \dots (7)$$

ここで

第 2 図

第 3 図

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\mu j} &= \frac{A\mu^4 + 2Uj^2\mu^2 + Bj^4}{H(\mu, j)}, \quad \mu = \frac{n\pi a}{l}, \\ H(\mu, j) &= A\mu^8 + 4Bj^2\mu^6 + \{6Cj^4 - (8-2\nu^2)j^2 + 6L\}\mu^4 + 4j^2(j^2-1)^2\mu^2 + j^4(j^2-1)^2, \\ n &= 1, 3, 5, 7, 9, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

α_j は周囲条件で定まる任意定数である。

同様な変換, 逆変換を接線線荷重に対し施せば w_{qj} として次式をうる。

$$w_{qj} = a\beta_j \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{\mu j} \cos \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots (9)$$

ここに $\eta_{\mu j}$ は

$$\eta_{\mu j} = \frac{\left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + (2+\nu)\mu^2 + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 + j^2 \right] j}{H(\mu, j)} \dots\dots\dots (10)$$

で H, μ, n は (8) 式と同一である。

(7), (9) 式に対する他の変位 u_{pj}, v_{pj} および u_{qj}, v_{qj} はそれぞれ p を含まぬ $w \sim u, w \sim v$ の関係式および, q を含まぬそれらの関係式⁽²⁾から次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} u_{pj} &= a\alpha_j \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{\mu j} \sin \frac{\mu x}{a}, & v_{pj} &= a\alpha_j \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a}, \\ u_{qj} &= a\beta_j \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\mu j} \sin \frac{\mu x}{a}, & v_{qj} &= a\beta_j \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{\mu j} &= \frac{\left[\frac{(1+\nu)(2-\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^2 - \nu A \mu^2 + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 + V j^2 \right] \mu}{H(\mu, j)}, \\ \sigma_{\mu j} &= \frac{\left[\frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 - \frac{\nu(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^2 + 1 + \frac{(1+\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 - \frac{\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \right] j \mu}{H(\mu, j)}, \\ \tau_{\mu j} &= \frac{\frac{1}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + 2(1+\nu)\mu^2 + \frac{5-\nu}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^4 + \frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 \mu^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^6 + j^2}{H(\mu, j)}, \\ V &= 1 - \frac{\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

以上は (1) 式の特解であるが, その余関数として次の形のものを選ぶ

$$\left. \begin{aligned} w_{cp} &= a\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj} \xi_i^{\mu} \sin m_i^{\mu} \theta \cos \frac{\mu x}{a}, \\ w_{cq} &= a\beta_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{qj} \xi_i^{\mu} \sin m_i^{\mu} \theta \cos \frac{\mu x}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで,

$$\xi_i^{\mu} = A\mu^4 + 2U(m_i^{\mu})^2\mu^2 + B(m_i^{\mu})^4 \dots\dots\dots (14)$$

でこれら式中の m_i^{μ} は

$$m^8 + 2(2\mu^2 - 1)m^6 + \{6C\mu^4 - 8\mu^2 + 1\}m^4 + 2\mu^2\{2B\mu^4 - (4-\nu^2)\mu^2 + 2\}m^2 + \mu^4(A\mu^4 + 6L) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

の根で, これは十分な精度において次式の根として求められる⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} &\left[m^4 + \left\{ 2\mu^2 - 1 + \frac{i(1+\nu^2)}{K} \mu^2 \right\} m^2 + \mu^2(\mu^2 - 2 + iK) \right] \\ &\quad \times \left[m^4 + \left\{ 2\mu^2 - 1 - \frac{i(1+\nu^2)}{K} \mu^2 \right\} m^2 + \mu^2(\mu^2 - 2 - iK) \right] = 0, \\ &K = \sqrt{6L + 4\mu^2 - 4}, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(13) 式で m_i^μ はこの根の中で共役でない 2 種類 m_1^μ, m_2^μ を表わし、接尾字の i はこれら 2 種類のものに対する値を加え合わせることを意味している。また C_{pj}^μ, C_{qj}^μ はいずれも複素数の任意定数で前述の周囲条件 1) から定まる。 $\Re$ は関数の実数部を取ることを意味している。(13) 式を $u \sim w$, および $v \sim w$ の関係式に代入すると対応する u, v として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} u_{ep} &= a\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj}^\mu \kappa_i^\mu \sin m_i^\mu \theta \sin \frac{\mu x}{a}, & v_{ep} &= a\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj}^\mu \eta_i^\mu \cos m_i^\mu \theta \cos \frac{\mu x}{a}, \\ u_{eq} &= a\beta_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{qj}^\mu \kappa_i^\mu \sin m_i^\mu \theta \sin \frac{\mu x}{a}, & v_{eq} &= a\beta_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{qj}^\mu \eta_i^\mu \cos m_i^\mu \theta \cos \frac{\mu x}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \kappa_i^\mu &= \left[\frac{(1+\nu)(2-\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^\mu)^2 \mu^2 - \nu A \mu^2 + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^\mu)^4 + V(m_i^\mu)^2 \right] \mu, \\ \eta_i^\mu &= \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + \frac{4-3\nu+\nu^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^\mu)^2 \mu^2 + (2+\nu) \mu^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^\mu)^4 + (m_i^\mu)^2 \right] m_i^\mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

で m_i^μ , 接尾字 i の意味は (13) 式と同様である。以上の各変位の諸式を応力とひずみの関係式に代入すると各内力およびモーメントが次のように求まる。まず特解 p 属に対するものは、

$$\left. \begin{aligned} \frac{h^2 T_{xpj}}{12D} &= \alpha_j \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a}, & \frac{h^2 T_{\theta pj}}{12D} &= \alpha_j \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a}, \\ \frac{h^2 S_{pj}}{6(1-\nu)D} &= -\alpha_j \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mu j} \sin \frac{\mu x}{a}, & \frac{M_{xpj}}{D} &= -\frac{\alpha_j}{a} \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} z_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a}, \\ \frac{M_{\theta pj}}{D} &= -\frac{\alpha_j}{a} \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a}, & \frac{a^2}{D} \left[N_{\theta pj} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{pj}}{\partial x} \right] &= -\alpha_j \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\mu j} &= \frac{\left[\frac{(2-\nu)}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + (1-\nu^2) I \mu^2 + \frac{(1-\nu)^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^2 - \frac{\nu}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 (j^2-1) \right] j^2}{H(\mu, j)}, \\ \nu_{\mu j} &= \frac{(1-\nu^2) A \mu^4 - \frac{4-\nu^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 (j^2-1) \mu^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 (j^2-1)}{H(\mu, j)}, \\ \omega_{\mu j} &= \frac{\left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + 2(1+\nu) I \mu^2 + \frac{(1-\nu)}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^2 - \frac{\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 (j^2-1) \right] j \mu}{H(\mu, j)}, \\ z_{\mu j} &= \frac{A \mu^6 + (2U + \nu V) j^2 \mu^4 + \left\{ 1 + 2\nu + \frac{1-\nu^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} j^4 \mu^2 - \nu(2+\nu) j^2 \mu^2 + \nu j^4 (j^2-1)}{H(\mu, j)}, \\ \chi_{\mu j} &= \frac{\nu A \mu^6 + (2\nu U + V) j^2 \mu^4 + (2+\nu) j^2 (j^2-1) \mu^2 + j^4 (j^2-1)}{H(\mu, j)}, \\ \varepsilon_{\mu j} &= \frac{[(2-\nu) \mu^6 + (5-2\nu) j^2 \mu^4 - 2(1-\nu)(2+\nu) \mu^4 + (4-\nu) j^2 (j^2-1) \mu^2 + j^4 (j^2-1)] j}{H(\mu, j)}, \\ I &= 1 + \frac{\nu}{6(1+\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

なお軸方向の平衡から当然

$$\frac{(1-\nu)}{2} \omega_{\mu j} j = \zeta_{\mu j} \mu \dots\dots\dots (21)$$

特解 q 属に対するものはその形は (19) 式と同一となり、ただ α_j の代りに β_j がはいり、 $\nu_{\mu j}, \omega_{\mu j}, z_{\mu j}, \chi_{\mu j}, \varepsilon_{\mu j}$ の代りにそれぞれ $-\delta_{\mu j}, \theta_{\mu j}, \pi_{\mu j}, -0_{\mu j}, -n_{\mu j}$ を用いるだけである。ここに

$$\begin{aligned}
\delta_{\mu j} &= \frac{\left[\frac{(2+\nu)}{12} \mu^6 + \frac{5+2\nu}{12} j^2 \mu^4 - \frac{(2-\nu)(1+\nu)}{6} \mu^4 + \frac{4+\nu}{12} j^2(j^2-1) \mu^2 + \frac{1}{12} j^4(j^2-1) \right] j \left(\frac{h}{a} \right)^2}{H(\mu, j)}, \\
\theta_{\mu j} &= \frac{\left[\frac{1}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + \frac{2-\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^4 + 2(1+\nu) \mu^2 + \frac{\nu(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 \mu^2 - \frac{\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4(j^2-1) \right] \mu}{H(\mu, j)}, \\
\pi_{\mu j} &= \frac{\left[\frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^4 + (2+\nu) \mu^4 + \frac{1-\nu^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 \mu^2 \right. \\
&\quad \left. + (1+\nu)^2 j^2 \mu^2 - 2\nu(1+\nu) \mu^2 + \nu j^2(j^2-1) \right] j}{H(\mu, j)}, \\
0_{\mu j} &= \frac{\left[\frac{(1-\nu)}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + \frac{(1-\nu)^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^4 - \nu(2+\nu) \mu^4 - 2(1+\nu)(j^2-1) \mu^2 - j^2(j^2-1) \right] j}{H(\mu, j)}, \\
n_{\mu j} &= \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^8 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^6 + \frac{1-\nu^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 \mu^4 - (4-\nu^2) j^2 \mu^4 \\
&\quad + 4(1-\nu^2) \mu^4 - 4j^2(j^2-1) \mu^2 - j^4(j^2-1)}{H(\mu, j)},
\end{aligned} \tag{22}$$

次に余関数 (13) に対するこれらの内力, モーメントは次式のようにになる。まず上式 p 属に対するものは

$$\begin{aligned}
\frac{h^2 T_{xcp}}{12D} &= \alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj_i}^{\mu} \zeta_i^{\mu} \sin m_i^{\mu} \theta \cos \frac{\mu x}{a}, \\
\frac{h^2 T_{\theta cp}}{12D} &= \alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj_i}^{\mu} \nu_i^{\mu} \sin m_i^{\mu} \theta \cos \frac{\mu x}{a}, \\
\frac{h^2 S_{cp}}{6(1-\nu)D} &= -\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj_i}^{\mu} \omega_i^{\mu} \cos m_i^{\mu} \theta \sin \frac{\mu x}{a}, \\
\frac{M_{xcp}}{D} &= -\frac{\alpha_j}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj_i}^{\mu} z_i^{\mu} \sin m_i^{\mu} \theta \cos \frac{\mu x}{a}, \\
\frac{M_{\theta cp}}{D} &= -\frac{\alpha_j}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj_i}^{\mu} \chi_i^{\mu} \sin m_i^{\mu} \theta \cos \frac{\mu x}{a}, \\
\frac{a^2}{D} \left[N_{\theta cp} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{cp}}{\partial x} \right] &= -\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj_i}^{\mu} \varepsilon_i^{\mu} \cos m_i^{\mu} \theta \cos \frac{\mu x}{a}
\end{aligned} \tag{23}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\zeta_i^{\mu} &= \frac{(2-\nu)}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^{\mu})^2 \mu^4 + (1-\nu^2) I (m_i^{\mu})^2 \mu^2 + \frac{(1-\nu)^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^{\mu})^4 \mu^2 \\
&\quad - \frac{\nu}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^{\mu})^4 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \}, \\
\nu_i^{\mu} &= (1-\nu^2) A \mu^4 - \frac{4-\nu^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^{\mu})^2 \mu^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^{\mu})^2 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \} \mu^2 \\
&\quad - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^{\mu})^4 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \}, \\
\omega_i^{\mu} &= m_i^{\mu} \mu \left[\frac{(2-\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^4 + 2(1+\nu) I \mu^2 + \frac{(1-\nu)}{6} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^{\mu})^2 \mu^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 (m_i^{\mu})^2 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \} \right], \\
z_i^{\mu} &= A \mu^6 + (2U + \nu V) (m_i^{\mu})^2 \mu^4 + \left\{ 1 + 2\nu + \frac{1-\nu^2}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} (m_i^{\mu})^4 \mu^2 \\
&\quad - \nu(2+\nu) (m_i^{\mu})^2 \mu^2 + \nu (m_i^{\mu})^4 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \}, \\
\chi_i^{\mu} &= \nu A \mu^6 + (2\nu U + V) (m_i^{\mu})^2 \mu^4 + (2+\nu) (m_i^{\mu})^2 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \} \mu^2 \\
&\quad + (m_i^{\mu})^4 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \}, \\
\varepsilon_i^{\mu} &= m_i^{\mu} \left[(2-\nu) \mu^6 + (5-2\nu) (m_i^{\mu})^2 \mu^4 - 2(1-\nu)(2+\nu) \mu^4 \right. \\
&\quad \left. + (4-\nu) (m_i^{\mu})^2 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \} \mu^2 + (m_i^{\mu})^4 \{ (m_i^{\mu})^2 - 1 \} \right]
\end{aligned} \tag{24}$$

なお (21) 式で述べたように当然

$$\frac{(1-\nu)}{2} \omega_i^\mu m_i^\mu = \zeta_i^\mu \mu \dots\dots\dots (25)$$

(23) 式で接尾字 i の意味は $i=1, i=2$ に対する値を加え合わすことを意味していることは (13) 式と同様である。 q 属に対するものは α_j の代りに β_j, C_{pji}^μ の代りに C_{qji}^μ がはいってくるだけである。

$\xi_{\mu j}, \eta_{\mu j}, \kappa_{\mu j}, \dots\dots$ 等の各係数中 $n_{\mu j}$ だけが分子に μ^8 を含む。したがって次の変形を行なう。

$$n_{\mu j} = \frac{1}{3A} \left(\frac{h}{a} \right)^2 - \frac{n_{\mu j}'}{A} \dots\dots\dots (26)$$

ここに

$$n_{\mu j}' = \frac{\left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^6 + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(2 - \frac{1-\nu^2}{12} \right) j^4 \mu^4 + (4-\nu^2) \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} j^2 \mu^4 + j^2 (j^2 - 1) (4 + j^2) \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \right\}}{H(\mu, j)} \dots\dots\dots (27)$$

(26) 式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{D} \left[N_{\theta qj} + \frac{\partial \mathcal{N}_{qj}}{\partial x} \right] &= \beta_j \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} n_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a} \\ &= \frac{\beta_j}{3A} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\mu x}{a} - \frac{\beta_j}{A} \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} n_{\mu j}' \cos \frac{\mu x}{a} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

(28) 式の第 1 項は δ 関数のフーリエ展開で、したがって線荷重作用箇所に集中的に作用する横断せん断力を表わす。ゆえに管の中途の横断せん断力は第 2 項で表わされる。

以上の諸内力およびモーメントを周囲条件の 1) に代入すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Re C_{pji}^\mu \nu_i^\mu \sin m_i^\mu \alpha &= 0, & \Re C_{pji}^\mu \omega_i^\mu \cos m_i^\mu \alpha &= -(-1)^m \omega_{\mu j}, \\ \Re C_{pji}^\mu \chi_i^\mu \sin m_i^\mu \alpha &= 0, & \Re C_{pji}^\mu \varepsilon_i^\mu \cos m_i^\mu \alpha &= -(-1)^m \varepsilon_{\mu j}, \\ \Re C_{qji}^\mu \nu_i^\mu \sin m_i^\mu \alpha &= 0, & \Re C_{qji}^\mu \omega_i^\mu \cos m_i^\mu \alpha &= -(-1)^m \theta_{\mu j}, \\ \Re C_{qji}^\mu \chi_i^\mu \sin m_i^\mu \alpha &= 0, & \Re C_{qji}^\mu \varepsilon_i^\mu \cos m_i^\mu \alpha &= -(-1)^m \frac{n_{\mu j}'}{A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

(29) 式の左辺は $i=1, i=2$ に対する値を加え合わすことを意味している。この式から C_{pji}^μ, C_{qji}^μ が求められる。 C_{pji}^μ に対しては

$$\left. \begin{aligned} C_{pji}^\mu &= \frac{\Delta_{pji}^\mu}{\Delta^\mu} \\ \Delta^\mu &= -4\Im \bar{\nu}_i^\mu \sin \bar{m}_i^\mu \alpha \omega_i^\mu \cos m_i^\mu \alpha \Im \bar{\chi}_k^\mu \sin \bar{m}_k^\mu \alpha \varepsilon_k^\mu \cos m_k^\mu \alpha \\ &\quad + 4\Im \bar{\nu}_i^\mu \sin \bar{m}_i^\mu \alpha \chi_i^\mu \sin m_i^\mu \alpha \Im \bar{\omega}_k^\mu \cos \bar{m}_k^\mu \alpha \varepsilon_k^\mu \cos m_k^\mu \alpha \\ &\quad - 4\Im \bar{\nu}_i^\mu \sin \bar{m}_i^\mu \alpha \varepsilon_i^\mu \cos m_i^\mu \alpha \Im \bar{\omega}_k^\mu \cos \bar{m}_k^\mu \alpha \chi_k^\mu \sin m_k^\mu \alpha, \\ \Delta_{pji}^\mu &= -4i(-1)^m [\omega_{\mu j} \bar{\nu}_i^\mu \sin \bar{m}_i^\mu \alpha \Im \bar{\chi}_k^\mu \sin \bar{m}_k^\mu \alpha \varepsilon_k^\mu \cos m_k^\mu \alpha \\ &\quad + \varepsilon_{\mu j} \bar{\nu}_i^\mu \sin \bar{m}_i^\mu \alpha \Im \bar{\omega}_k^\mu \cos \bar{m}_k^\mu \alpha \chi_k^\mu \sin m_k^\mu \alpha \\ &\quad - \omega_{\mu j} \bar{\chi}_i^\mu \sin \bar{m}_i^\mu \alpha \Im \bar{\nu}_k^\mu \sin \bar{m}_k^\mu \alpha \varepsilon_k^\mu \cos m_k^\mu \alpha \\ &\quad + \omega_{\mu j} \bar{\varepsilon}_i^\mu \cos \bar{m}_i^\mu \alpha \Im \bar{\nu}_k^\mu \sin \bar{m}_k^\mu \alpha \chi_k^\mu \sin m_k^\mu \alpha \\ &\quad - \varepsilon_{\mu j} \bar{\omega}_i^\mu \cos \bar{m}_i^\mu \alpha \Im \bar{\nu}_k^\mu \sin \bar{m}_k^\mu \alpha \chi_k^\mu \sin m_k^\mu \alpha \\ &\quad + \varepsilon_{\mu j} \bar{\chi}_i^\mu \sin \bar{m}_i^\mu \alpha \Im \bar{\nu}_k^\mu \sin \bar{m}_k^\mu \alpha \omega_k^\mu \cos m_k^\mu \alpha] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)^{(4)}$$

上式中の接尾字 i, k はそれぞれ 1 または 2 を示し、 Δ^μ においては $i=1, k=2$ に対する値と $i=2, k=1$ に対する値とを加え合わすことを意味する。また Δ_{pji}^μ においては左右両辺の接尾字は一致する。すなわち、左辺の $i=1$ のときは右辺は $i=1, k=2$ 、左辺の $i=2$ に対しては右辺は $i=2, k=1$ である。

C_{qji}^μ に対しては $\omega_{\mu j}$ の代りに $\theta_{\mu j}, \varepsilon_{\mu j}$ の代りに $n_{\mu j}'/A$ がはいっているだけである。

次に周囲条件の 2) については、その第 1 および第 3 の条件は前述のように自動的に満たされている。第 2, 第 4 の条件を満たすため $\sin m_i^\mu \theta, \cos m_i^\mu \theta$ を $-\alpha < \theta < \alpha$ の範囲で次のフーリエ級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} \sin m_i^\mu \theta &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{i\lambda}^\mu \sin \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha}, & \cos m_i^\mu \theta &= \frac{b_{i0}^\mu}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{i\lambda}^\mu \cos \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha}, \\ a_{i\lambda}^\mu &= -2 \frac{(-1)^\lambda \pi \lambda \sin m_i^\mu \alpha}{\left\{ \frac{\lambda^2 \pi^2}{\alpha^2} - (m_i^\mu)^2 \right\} \alpha}, & b_{i\lambda}^\mu &= -2 \frac{(-1)^\lambda m_i^\mu \sin m_i^\mu \alpha}{\left\{ \frac{\lambda^2 \pi^2}{\alpha^2} - (m_i^\mu)^2 \right\} \alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

$\lambda=0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots$

(31) 式を用いると

$$\begin{aligned} w_j &= w_{pj} + w_{qj} + w_{pc} + w_{qc} \\ &= a\alpha_j \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{\mu j} \cos \frac{n\pi x}{l} + a\beta_j \sin j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{\mu j} \cos \frac{n\pi x}{l} \\ &\quad + a\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj i}^\mu \xi_i^\mu \left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{i\lambda}^\mu \sin \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha} \right] \cos \frac{\mu x}{a} \\ &\quad + a\beta_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{qj i}^\mu \xi_i^\mu \left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{i\lambda}^\mu \sin \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha} \right] \cos \frac{\mu x}{a} \end{aligned}$$

いま

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{\mu j} = \phi_j, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{\mu j} = \psi_j, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj i}^\mu \xi_i^\mu a_{i\lambda}^\mu = P_{\lambda j}^w, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{qj i}^\mu \xi_i^\mu a_{i\lambda}^\mu = Q_{\lambda j}^w \quad \dots\dots\dots (32)$$

とすれば

$$w_j = a\alpha_j \phi_j \sin j\theta + a\beta_j \psi_j \sin j\theta + a\alpha_j \sum_{\lambda=1}^{\infty} P_{\lambda j}^w \sin \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha} + a\beta_j \sum_{\lambda=1}^{\infty} Q_{\lambda j}^w \sin \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha}$$

ゆえに $\sum_{j=0}^{\infty} w_j = 0$ が θ のいかんによらず成立するためには

$$\alpha_\lambda \phi_\lambda + \beta_\lambda \psi_\lambda + \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j P_{\lambda j}^w + \beta_j Q_{\lambda j}^w) = 0 \quad \lambda \neq 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

が成立することが必要である。

ここに

α_λ は $\alpha_{j=\lambda\pi/\alpha}$ のことである。 $\beta_\lambda, \phi_\lambda, \psi_\lambda$ も同一の意味を持つ。(33) 式がすべての λ につき成立することが必要である。また (33) 式が成立すれば $x=l$ の所の w の値 $\sum_{j=0}^{\infty} w_j$ もまた零になることは明らかである。すなわち条件 2) の第 2 が満たされる。

次に

$$\begin{aligned} v_j &= v_{pj} + v_{qj} + v_{pc} + v_{qc} \\ &= a\alpha_j \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a} + a\beta_j \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\mu j} \cos \frac{\mu x}{a} \\ &\quad + a\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj i}^\mu \eta_i^\mu \left[\frac{b_{i0}^\mu}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{i\lambda}^\mu \cos \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha} \right] \cos \frac{\mu x}{a} \\ &\quad + a\beta_j \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{qj i}^\mu \eta_i^\mu \left[\frac{b_{i0}^\mu}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{i\lambda}^\mu \cos \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha} \right] \cos \frac{\mu x}{a} \end{aligned}$$

いま

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\mu j} &= \Gamma_j, & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj i}^\mu \eta_i^\mu b_{i0}^\mu &= P_{0j}^v, & \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{pj i}^\mu \eta_i^\mu b_{i\lambda}^\mu &= P_{\lambda j}^v, \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{qj i}^\mu \eta_i^\mu b_{i0}^\mu &= Q_{0j}^v, & \sum_{n=1}^{\infty} \Re C_{qj i}^\mu \eta_i^\mu b_{i\lambda}^\mu &= Q_{\lambda j}^v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

とおけば

$$v_j = a\alpha_j \psi_j \cos j\theta + a\beta_j \Gamma_j \cos j\theta + a\alpha_j P_{0j}^v + a\alpha_j \sum_{\lambda=1}^{\infty} P_{\lambda j}^v \cos \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha} + a\beta_j Q_{0j}^v + a\beta_j \sum_{\lambda=1}^{\infty} Q_{\lambda j}^v \cos \frac{\lambda\pi\theta}{\alpha}$$

ゆえに $\sum_{j=0}^{\infty} v_j = v_0$ が θ のいかんによらず成立するためには

$$\alpha_0 \psi_0 + \beta_0 \Gamma_0 + \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j P_{0j}^v + \beta_j Q_{0j}^v) = \frac{v_0}{a}, \quad \alpha_\lambda \psi_\lambda + \beta_\lambda \Gamma_\lambda + \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j P_{\lambda j}^v + \beta_j Q_{\lambda j}^v) = 0 \quad \lambda \neq 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここに $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \Gamma_\lambda$ 等の意味は (33) 式の場合と同一で (35) 式がすべての λ について成立すれば $x=l$ の所の条

件も満たしていることは明らかである。

なお (32), (34) 式の左辺の i は $i=1, i=2$ の値を加え合わすことを意味している。また (7) 式からわかるように $\alpha_0=0$ と取ることができる。

(33), (35) 式によって α_i, β_i が定まり、周囲条件の 1), 2) をすべて満たしているの、したがって問題は解決したことになる。

3. ね じ り 角

本例のように縦みぞのある短管をねじる場合は、その変形のありさまは各点において異なってくる。したがって単位長さのねじり角も各断面によって異なってくる。

ある断面におけるある点の単位長さのねじり角は、その点の長さの方向の単位長さの相対回転である。したがってこれは次式で表わされる⁽⁵⁾。

$$\tau = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (36)$$

ある断面における単位長さのねじり角は、(36) 式のその断面に対する平均値と考えられる⁽⁶⁾。

$$\theta_{\mu 0} = \frac{\left[\frac{1}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + 2(1+\nu) \mu^2 \right] \mu}{A \mu^8 + 12(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 A \mu^4} = \frac{1}{6(1-\nu) A} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{1}{\mu} \dots \dots \dots (40)$$

また $\mathfrak{M}_{qj}$ は応力とひずみの関係式から次のように求まる。

$$\frac{\mathfrak{M}_{qj}}{D} = \frac{\beta_j}{a} \cos j\theta \sum_{n=1}^{\infty} (1-\nu) \gamma_{\mu j} \sin \frac{\mu x}{a}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{1}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + \frac{(1+\nu)}{12(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^2 \mu^4 + \frac{\nu}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 j^4 \mu^2 \right. \\ & \quad \left. - (2+\nu) j^2 \mu^2 + 2(1+\nu) \mu^2 - j^2(j^2-1) \right] \mu \\ & \gamma_{\mu j} = \frac{\dots}{H(\mu, j)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

$$\gamma_{\mu 0} = \frac{\left[\frac{1}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \mu^6 + 2(1+\nu) \mu^2 \right] \mu}{A \mu^8 + 12(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 A \mu^4} = \theta_{\mu 0} = \frac{1}{6(1-\nu) A} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{1}{\mu} \dots \dots \dots (42)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \left[S_{q0} - \frac{2\mathfrak{M}_{q0}}{a} \right] &= -\frac{\beta_0}{A a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \sin \frac{\mu x}{a} - \frac{\beta_0}{A a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{1}{\mu} \sin \frac{\mu x}{a} \\ &= -\frac{\beta_0}{A a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \frac{1}{\mu} \sin \frac{\mu x}{a} = -\frac{\beta_0}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \sin \frac{\mu x}{a} = -\frac{\beta_0 l}{4a^3} \\ \therefore M &= -\frac{\beta_0 l \alpha}{2a} D \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$

いま

$$\alpha_j = \frac{v_0}{a} \alpha_j', \quad \beta_j = \frac{v_0}{a} \beta_j' \dots \dots \dots (44)$$

とおけば (43) 式は

次に (36) 式の管長 l に対する平均値を考え、それを $\bar{\theta}$ で示せば

$$\bar{\theta} = \frac{1}{al} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \frac{1}{al} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)_0^l = \frac{2v_0}{al} \dots \dots \dots (37)$$

(37) 式が管全体に対する単位長さのねじり角である。次に $\bar{\theta}$ とねじりモーメント M との関係を調べて見る。

$$S' - \frac{\mathfrak{M}}{a} = S - \frac{2\mathfrak{M}}{a}, \quad M = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(S - \frac{2\mathfrak{M}}{a} \right) a^2 d\theta \dots \dots \dots (38)$$

(38) 式で特に $x \rightarrow +0$ の場合を考える。 $S, \mathfrak{M}$ の中、余関数に基くものはその性質上 $\theta = \pm \alpha$ 点以外は $x \rightarrow +0$ で零に収束することは明らかである。特解に関するものはいずれも $\cos j\theta$ を有しており、 $j = m\pi/\alpha$ であるから $j=0$ 以外は (38) 式の積分はすべて零となる。また前述のように $\alpha_0=0$ であるから次式が成立する。

$$M = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(S_{q0} - \frac{2\mathfrak{M}_{q0}}{a} \right) a^2 d\theta \dots \dots \dots (39)$$

(19) 式および (22) 式から

$$\frac{h^2 S_{q0}}{6(1-\nu) D} = -\beta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\mu 0} \sin \frac{\mu x}{a}$$

$$M = -\frac{l\nu\alpha}{2a^2} D\beta_0' \dots\dots\dots(43)'$$

となる。これを(37)式に代入すれば

$$\bar{\theta} = -\frac{4M}{\alpha\beta_0' l D} \left(\frac{a}{l}\right) \dots\dots\dots(45)$$

次に同一切欠きみぞを有する無限長の管のねじりは、

$$w=0, \quad u=-ak\theta, \quad v=kx \dots\dots\dots(46)$$

とはなはだ簡単な解となる。これによる内力、モーメントは

$$T_x = T_\theta = S = M_x = M_\theta = 0, \quad \mathfrak{M} = -\frac{(1-\nu)D}{a} k \dots\dots\dots(47)$$

となり単位長さのねじり角を $\bar{\theta}_\infty$ とすれば

$$\bar{\theta}_\infty = -\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{M}{4(1-\nu)Da\alpha} \dots\dots\dots(48)$$

(45)式と(48)式の比を求めれば

$$\frac{\bar{\theta}_\infty}{\bar{\theta}} = \frac{\beta_0'}{16(1-\nu)} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \dots\dots\dots(49)$$

なお(39)式は計算を簡単にするため $x \rightarrow +0$ につき求めたが、任意の断面についても証明でき、また(48)式は薄肉円断面における Saint-Venant のねじり問題の式と一致している。

数値計算として $a/h=25$, $l/a=6$, $\alpha=\pi$, $\nu=0.3$ とすれば $\beta_0'=389.35$ をうる。これらを(49)式に

第4図

代入すると

$$\frac{\bar{\theta}_\infty}{\bar{\theta}} = \frac{389.35 \times 36}{16 \times 0.7} \cong 1250 \dots\dots\dots(50)$$

すなわち両端固定の場合の本例の単位長さのねじり角は、無限長のその 1250 分の 1 にすぎない。その差があまりにも大きいので実験を行なって見た。

試験片は $a=25$ mm, $l=150$ mm, $h=1$ mm で第4図に示すように $l+2b$ の長さの管に $l=150$ mm だけスリットを切ったものである。第5図○印が実験結果で、直線Iが $\bar{\theta}$ の理論値、直線IIが $\bar{\theta}_\infty$ を示す。直線IIは実際はもっと横たわりほとんど水平線として示される。これを見ると実測値は理論値よりやや大きく現われているが、IIよりははなはだしく小さいことがわかる。実測値が理論値よりやや大きく出るのは両端の固定条件が実際には完全に行なわれないためである。既に前論文⁽⁷⁾にも示したとおり、管が短くなると両端の影響を強く受け、本例でも後述のように両端において強い軸方向内力が発生するので、両端が完全な固定になっていないとわずかなこの軸方向内力の減少も(50)式の結果から見て大きく $\bar{\theta}$ に影響することがわかる。本実験では b はだいたい 40 mm に取ったが、念のため b を 20 mm ほどに取り両端のつかみもやや弱めのものを用いると、試片の寸法が全く同一であるにかかわらず実測結果はかなり大きく現われる。第5図×印がそれである。このことは実測結果がやや大きく現われるのは両端固定の不完全さによるものであることを示している。つかみ、その他に試片と同一弾性率の材料を用いる以上この不完全さは避けられない。図中直線IIIは同一寸法でみぞのない管の単位長さのねじり角を示す。これを見るとみぞがあっても管長が短いと、その単位長さのねじり角はむしろみぞなし

管に近いことがわかる。

以上からわかるように有こう管のねじりでは管長が短くなると、単位長さのねじり角が無限長管に比しはなほだしく小さく、その差があまりにも大きいので、一般に用いられている無限長管の式はほとんど使用できないことがわかる。

次に任意点の単位長さのねじり角は (36) 式で示されるが、これを図示したものが第 6 図である。第 6 図 I は固定端におけるもので、II は中央におけるものである。いずれも横軸に円周角を取り、縦軸に (36) 式の値とみぞなし管の単位長さのねじり角 $\bar{\theta}_0$ との比が取ってある。これを見ると中央断面では円周方向に沿い一定値に近いが (無限長のときは一定となる)、固定端ではかなりの変化がある。これは後述の大きな軸

第 7 図

第 8 図

方向内力の影響による。図中の横線はそれぞれの図の円周方向の平均を示したもので、それぞれ固定端および中央断面における単位長さのねじり角の大きさを示している。これを見ると固定端では全くみぞなし管のそれと同一となり、中央断面では無限長有こう管としての影響を少し受けていることがわかる。

なお (46), (47) 式は不伸張変形であり、したがって本例は薄膜理論では解けず、また (46), (47) 式は Donnell の式からは出て来ないことは注意を要する。

4. 応 力

第 7 図はせん断内力 S の線図で、I は固定点の断面における値、II は中央断面における値である。いずれも横軸に円周角、縦軸にこれらの値とみぞなし管の S の値 S_0 の比が取ってある。II のほうはだいたいなめらかな曲線となっているが、I のほうはかなり特異な様相を示している。これもやはり端における大きな

第 9 図

第 10 図

軸方向内力の影響である。I図のほうは $x \rightarrow +0$ に対する極限值を示しており、端にきわめて近い断面では I に近い分布をするが、みぞ側のほうで急激に零となるのである。しかし、このような分布は端にきわめて近い断面だけで、少し離れたたとえば固定点から $0.3a$ ほど離れた断面の分布を計算して見ると、中央断面の線図 II とほとんど一致することがわかる。

いずれにしても S の値は相等大きい。(47)式を見ると $S=0$ である。すなわち無限長の有こう管ではモーメント M はもっぱら $\mathcal{M}$ によってささえられているが、有限になると S の役割が表われ、長くなるに従い、 S から $\mathcal{M}$ に移って行くのである。

第8図は端における軸方向内力 T_x の分布である。横軸に円周角を取り縦軸に T_x/S_0 が取ってある。これを見ると端における軸方向内力は、特にみぞのある自由端できわめて大きいことがわかる。このことはまた実験からも認められる。すなわちねじりモーメント M を少し大きくすると、この大きな軸方向内力を発生する所が軸方向に降伏を起していることが認められる。

以上の諸線図はスリット箇所を通る直径に対し左右対称または逆対称となるのでいずれも半分だけ描いてある。

第9図はスリット箇所に沿って軸方向に対する M_x を図示したもので、縦軸には M_x と円周方向の単位長さのねじりモーメント $M_0 = M/2\pi a$ との比が取ってある。これを見ると固定端でいくぶんかの曲げモーメントが発生することがわかるが、少し内部にはいと逆のモーメントが発生している。このようなモーメントが発生するのはスリットに沿って軸方向に対する変位 w のありさまを調べて見るとわかる。第10図がその線図である。この線図では縦軸には w と端における円周方向の変位 v_0 との比が取ってある。

5. 結 言

以上の諸結果をまとめると、次のようになる。

1) 両端固定された有限な長さの有こう管をねじった場合の単位長さのねじり角は、同一な無限長管のそれと比較してはなほだしく小さく、本例のように $a/h = 25$, $l/a = 6$, $\alpha = \pi$ の寸法のものでは無限長のものの1250分の1しかなく、むしろみぞ無し管の値に近い。この差があまりにも大きいので、短い有こう管には普通用いられている無限長管の式は用いられない。

2) 両固定端において大きな軸方向内力を発生する。特にみぞのある終辺において大きい。この値が大きいのでつかみの部分が管と同一弾性率の材料では完全固定の条件を満たすことがきわめて困難である。また発生するせん断応力よりむしろこの軸方向応力のほうが問題となる。

3) 有こう無限長管をねじった場合はせん断力 S は発生せず、モーメント M はもっぱら $\mathcal{M}$ によってささえられるが、有限長の場合は S が発生して、 S と $\mathcal{M}$ によって M をささえるが長くなるに従い S の役割が減じて来る。

4) 両固定端においてはいくぶんの大さの曲げモーメントが発生する。

文 献

- (1) 溝口, 機械学会論文集, 20-95 (昭 29-7), 485 ページ(6)式.
- (2) 同上 484 ページ (3) 式, (4) 式 および溝口, 機械学会論文集, 27-176 (昭 36-4), 496 ページ (12) 式, 494 ページ (6) 式.
- (3) 溝口, *Bulletin of University of Osaka Prefecture*, Ser. A, 8-2 (1960), 11.
- (4) 溝口, 機械学会論文集, 26-164 (昭 35-4), 548.
- (5) 溝口, *Bulletin of University of Osaka Prefecture*, Ser. A, 5 (1957), 7.
- (6) Timoshenko, *Theory of Elasticity*, (1951), 319, Maple Press Co., New York.
- (7) 溝口・井上, 機械学会論文集, 29-203 (昭 38-7), 1 226.