621-501.22:621-503.5

自動制御系における非定常不規則信号に 対する非線形制御系の応答*

榎木 義一**, 砂原 善文**, 添田 喬***

A Statistical Study on the Response of Nonlinear Control Systems Subjected to a Non-Stationary Random Input

by Yoshikazu SAWARAGI, Yoshifumi SUNAHARA,
and Takashi SOEDA

In the previous paper, the authors described the statistical studies on the response of nonlinear control systems subjected to an ergodic stationary Gaussian random input.

This paper is devoted to the fundamental approaches to the non-stationary random time series which are considered to arise quite often for the automatic control systems in practice. Firstly, the response of nonlinear control systems subjected to a non-stationary random signal is evaluated. Secondly, for an example, a non-stationary Ornstein-Uhlenbeck process which is obtained by using the method of Fokker-Planck is treated. Detail illustrations are shown by several examples.

1. 緒 言

著者らは、従来から実際にそくした見地になって、突変不規則入力をうける非線形制御系の非定常応答に関する種々の統計学的研究を実施してきた⁽¹⁾。

この理論的研究において考慮した制御系の回路特性は、その自力修正という適応制御方式への応用を考え(1) 時間に対して規則的に変動する場合、(2) 時間に対して不規則に変動する場合、とにわけ、さらに系に印加される不規則信号、すなわち、時間的に予測できない目標値の変化、あるいは系の各部分に加えられる不規則外乱に対しては定常性を仮定してきた。しかし、この仮定は解析上の便宜的処置であって、その入力とは当然非定常確率過程とみなされなければならない。

したがって、一般的視野にたつてより実際的研究をおこなうためには、この非定常不規則入力信号を考慮した自動制御の理論体系を確立しなければならない。

ここでは、このような研究の端緒として

(1) 非定常不規則入力が非線形制御系に印加されたときの非定常応答を評価する一般的手法

(2) 自動制御系に印加される非定常不規則入力の

具体例、ならびにその統計学的表現法

について考察し、さらに、制御系が線形である場合、および入力が定常確率過程である場合との差異について述べる。ただし、制御系の回路特性は、時間に対して変化しないものとする。

2. おもな記号の説明

t : 時間

τ : 時間 t_1 と t_2 との時間間隔

ω, f : 角周波数および振動数

s : ラプラス演算子

$v(t)$: 制御系の目標値信号

$u(t)$: 正規性不規則外乱

$x(t)$: 制御量

$z(t)$, および $y(t)$: 非線形要素に対する 入, 出力
信号

$f[z(t)]$: Zero-memory 形非線形伝達特性

A_i, k, T : 制御系の回路特性値

$R_u(t_1; \tau)$: 時間 t_1 および時間間隔 τ に依存する
 $u(t)$ の自己相関関数

$S_u(t_1; f)$: 時間 t_1 に依存する $u(t)$ のスペクトル
密度

$\psi_x(t)$: 時間 t における応答 $z(t)$ の二乗平均値

$\langle \cdot \rangle_{av}$: 記号 $\cdot$ の集合平均値

* 昭和 38 年 4 月 2 日 第 40 期通常総会講演会において講演,
原稿受付 昭和 38 年 10 月 18 日。

** 正員, 京都大学工学部。

*** 正員, 徳島大学工学部 (徳島市南常三島町 2 の 1)。

3. 応答 $z(t)$ の二乗平均値の評価

第1図に示したように、原点に関して対称な、Zero-memory 形非線形要素を含む制御系を考察する。ただし、入力 $z(t)$ と出力 $y(t)$ との関係は $y(t)=f[z(t)]$ によって与えられるものとする。また、 $G_2(s)$ は線形要素の伝達関数であり

$$G_2(s)=k/\sum_{i=0}^N A_i s^i \quad (A_i k: \text{正の定数}) \quad \cdots (1)$$

によってあらわされるものとする。

目標値信号 $v(t)=0$ とし、非定常不規則外乱 $u(t)$ (平均値は零とする)が、このような系に印加されたときの非定常応答 $z(t)$ を、その二乗平均値 $\psi_z(t)$ に注目して評価する手法について述べる。

$u(t)$ と $z(t)$ との関係を示す制御方程式をつくれば

$$\sum_{i=0}^N A_i d^i z(t)/dt^i + kf[z(t)] = ku(t) \quad \cdots (2)$$

となる。解析を容易ならしめるため、すでに著者らがしばしば述べたように⁽²⁾、この制御系に含まれる非線形要素を、それと等価なゲイン κ を有する線形要素で置換すれば、(2)式は

$$\sum_{i=0}^N A_i d^i z(t)/dt^i + k\kappa z(t) = ku(t) \quad \cdots (3)$$

となる。ここに、 κ は $z(t)$ の二乗平均値 $\psi_z(t)$ の関数として

$$\kappa[\psi_z(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) p(z, t) dz / \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z, t) dz \quad \cdots (4)$$

のように与えられ、また $p(z, t)$ は時間 t における応

$$\psi_z(t_n) \equiv \langle z(t_n)^2 \rangle_{\text{av.}} = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} W(t_n - \tau_1) |W(t_n - \tau_2)| \langle u(\tau_1) u(\tau_2) \rangle_{\text{av.}} d\tau_1 d\tau_2 \quad \cdots (8)$$

となる。ただし $W(t_n - \tau_i)$ ($i=1, 2$) は、入、出力の関係が(2)式で与えられた系の、 κ を一定としたときの荷重関数である。また、 $\kappa_m (m=i, j)$ は制御系に含まれる非線形要素の形状が定まれば、(4)式から

$$\kappa_m = \kappa[\psi_z(t_m)] \quad (m=i, j) \quad \cdots (9)$$

のように与えられる。

また、 $\langle u(\tau_1) u(\tau_2) \rangle_{\text{av.}}$ は、 $u(t)$ の時間 t_1 および t_2 における $u(t)$ の非定常自己相関関数であり、一般に $\tau_1 - \tau_2 = \tau > 0$ とおけば

第1図 非定常不規則入力信号をうける
非線形制御系のブロック線図

答 $z(t)$ の正規性確率密度関数；

$$p(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_z(t)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\psi_z(t)}\right\} \quad \cdots (5)$$

である。

さて、等価線形化制御方程式(3)式から得られる荷重関数 $W(t_n, \tau_1)$ (時間 τ_1 において単位インパルス印加したときの、時間 t_n における応答)は、未知係数 κ の関数として定まるから、その応答は、非定常不規則入力印加される時間 t_0 の値、ならびに非線形伝達特性の形状(したがって等価ゲインの値)によってつぎのように分けて解析する*。

3.1 t_0 = 有限の場合 第2図(a)に示したように、外乱 $u(t)$ が時間 $t=t_0$ で突発的に系に印加される場合であり、さらにこれを、つぎの二つの場合にわける。

(a) 初期値 $\kappa_0 = \kappa[\psi_z(t_0)]$ が有限確定値をとる場合 このとき、 $t=t_n$ における応答 $z(t_n)$ は

$$z(t_n) = \int_{t_0}^{t_n} W(t_n, \tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 \quad \cdots (6)$$

となる。経過時間 t を $t_{j+1} - t_j = \Delta_j$ [$j=0, 1, 2, \dots, (n-1)$] のように微小分割し、各微小区間 Δ_j においては等価ゲイン κ の値は一定値 κ_j をとるものとするれば、(6)式は

$$z(t_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(t_n - \tau_1) |u(\tau_1)|_{\kappa=\kappa_j} d\tau_1 \quad \cdots (7)$$

のようにあらわされる。したがって、 $z(t_n)$ の二乗平均値 $\psi_z(t_n)$ は

$t_0=0$

(a) 突発非定常不規則信号

(b) $t_0=-\infty$ から印加される
非定常不規則信号

第 2 図

* 線形制御系の場合は、荷重関数に含まれる係数はすべて既知であるから、その応答を評価するにあたっては、このように分類する必要はない⁽³⁾。

$$\begin{aligned} \langle u(\tau_1)u(\tau_2) \rangle_{av} &= \langle u(\tau_1)u(\tau_1-\tau) \rangle_{av} = R_u(\tau_1; \tau) \\ &= \langle u(\tau_2)u(\tau_1) \rangle_{av} = \langle u(\tau_2)u(\tau_2+\tau) \rangle_{av} = R_u(\tau_2; -\tau) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。したがって、積分変換公式(第3図および付録A参照)

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau_1 d\tau_2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau_1 \int_{t_{i+1}-t_{j+1}}^{\tau_1-t_j} d\tau + \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau_2 \int_{t_i-\tau_2}^{t_{i+1}-t_{j+1}} d\tau \quad (11)$$

および(10)式を(8)式へ適用すれば、すでに示した手法により⁽²⁾初期値 $\kappa_0 = \kappa[\psi_z(t_0)]$ から、逐次 $\psi_z(t_n)$ を評価することができる。

また、時間分割区間 Δ_j にくらべ、等価ゲイン κ_{j+1} と κ_j との変化量が微小であるときは、(8)式のかわりに

$$\psi_z(t_n) = \int_{t_0}^{t_n} \int_{t_0}^{t_n} W(t_n-\tau_1)W(t_n-\tau_2) \langle u(\tau_1)u(\tau_2) \rangle_{av} d\tau_1 d\tau_2 \quad (12 \cdot a)$$

$\kappa = \kappa_{n-1}$

ただし

$$\kappa_{n-1} = \kappa[\psi_z(t_{n-1})] \quad (12 \cdot b)$$

を用いればよい。

このようにして、初期条件が定まり、さらに、非定常不規則入力信号 $u(t)$ の自己相関関数が、時間間隔 τ および τ_1 (または τ_2) の関数として表現できるときは、(8)式および(9)式、あるいは(12)式を用いて、非定常応答 $\psi_z(t)$ を評価することができる。

(b) 初期値 $\kappa_0 = \kappa[\psi_z(t_0)]$ が有限確定値をとらない場合 制御系に含まれる非線形要素の伝達特性の形状によっては、初期値 $\kappa_0 = \kappa[\psi_z(t_0)]$ が定まらない場合がある。このときは、以下にのべる近似解法を適用する。

3.2 $t_0 = -\infty$ の場合〔第2図(b)参照〕 このとき、応答 $z(t_n)$ は

$$z(t_n) = \int_{-\infty}^{t_n} W(t_n, \tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 \quad (13)$$

となり、その非定常応答 $\psi_z(t_n)$ は

$$\psi_z(t_n) \equiv \langle z(t_n)^2 \rangle_{av} = \int_{-\infty}^{t_n} \int_{-\infty}^{t_n} W(t_n, \tau_1) W(t_n, \tau_2) \langle u(\tau_1)u(\tau_2) \rangle_{av} d\tau_1 d\tau_2 \quad (14)$$

によって与えられる*。系に定位置性があるものとして、(a)で用いた初期条件に対する条件を定める。すなわち、

(i) 定常値 $\lim_{t_n \rightarrow \infty} \psi_z(t_n) \equiv \psi_z$, および定常等価ゲイン κ_s の値を計算する⁽¹⁾

(ii) (i)で求めたゲイン κ_s を用いて

$$\psi_z(t_s) = \int_{-\infty}^{t_s} \int_{-\infty}^{t_s} W(t_s-\tau_1)W(t_s-\tau_2) \langle u(\tau_1)u(\tau_2) \rangle_{av} d\tau_1 d\tau_2 \quad (15)$$

$\kappa = \kappa_s$

を計算し、この値がほとんど定常値 ψ_z と等しいとみなされる時間 $t=t_s$ を求める。

(iii) 最終条件を

$$t=t_s \text{ において } \kappa = \kappa_s \quad (16)$$

と定める。

(iv) $t=t_s$ より時間 t を $t_{s-j+1}-t_{s-j} = \Delta_{s-j}$ ($j=1, 2, 3, \dots$) のように時間の経過に逆行して微小分割する。

このとき各時点 t_{s-j} における応答は

$$\begin{aligned} \psi_z(t_{s-j}) &= \int_{-\infty}^{t_{s-j}} \int_{-\infty}^{t_{s-j}} W(t_{s-j}-\tau_1) \\ &\quad W(t_{s-j}-\tau_2) \langle u(\tau_1)u(\tau_2) \rangle_{av} d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad \kappa = \kappa_{s-j+1} \end{aligned} \quad (17)$$

第3図 積分領域の変更(分割は等間隔)

* ここでは、回路特性は定数と考えているから、入力が定常信号の場合、その応答は定常確率過程となり、非定常性はあらわれない⁽³⁾。

および

$$\kappa_{s-j+1} = \kappa[\psi_s(t_{s-j+1})] \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

を用いて評価することができる。したがって、初期値 κ_0 が有限確定値をとらない場合、または、 $t_0 = -\infty$ の場合は、(17)、(18)式および変換公式

$$\int_{-\infty}^{t_{s-j}} \int_{-\infty}^{t_{s-j}} d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{t_{s-j}} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau + \int_{-\infty}^{t_{s-j}} d\tau_2 \int_{-\infty}^0 d\tau \quad (19)$$

を用いて、最終値条件(16)式から逐次その応答を評価すればよい。

4. 具 体 例

実在の自動制御系に印加される非定常不規則入力信号としては種々考えられるが、ここでは最も基本的な、第4図に示したような信号について考察をする（具体的には、飛しょう体や建物に吹きつける風のように、時間の経過とともに徐々にその強さを増し、ついには定常状態へと移行する不規則外乱が考えられる）。このような信号は統計学的にどのように表現され、しかもこのときの非定常応答は、系の性質によりどのように変化するかを以下に述べる。

4.1 非定常不規則入力 いままでの統計学的研究においてしばしば用いてきた定常不規則入力、その自己相関関数が

$$R_u(\tau) = D \exp(-\beta|\tau|) \quad (D, \beta: \text{正の定数}) \quad (20)$$

によってあらわされる O. U. 過程であった。したがって、ここで取扱う非定常確率過程は、定常状態では(20)式のような統計学的性質をもつものとする。一般の不規則信号が O. U. 過程に属するとき、その確率密度関数は、フォッカー・プランク (Fokker-Planck) 方程式

$$\left\{ L^* - \frac{\partial}{\partial t} \right\} p_1(u, t; u_0, t_0) = 0 \quad (21)$$

ただし

$$L^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{\sigma} u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sigma} \quad (\sigma: \text{正の定数}) \quad (22)$$

を満足するから⁽⁴⁾、いま初期条件は $t_0=0$, $u_0=0$ であるとすれば、(21)式の解は

$$p_1(u, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\{\sigma(1-e^{-2t/\sigma})/2\}}} \exp\left\{-\frac{u^2}{\sigma(1-e^{-2t/\sigma})/2}\right\} \quad (23)$$

となる。ただし(21)式の $p_1(u, t; u_0, t_0)$ は、時間 $t=t_0$ において $u(t_0)=u_0$ であるとき、時間 t において $u < u(t) < u+du$ をとる確率が $p_1(u, t; u_0, t_0)du$ である推移確率密度関数である。したがって、 $u(t)$ の二乗平均値 $\psi_u(t)$ の時間にとまらう変動の様子は(23)式から

$$\psi_u(t) = \frac{\sigma}{2} \{1 - \exp(-2t/\sigma)\} \quad (24)$$

であることがわかる。一方、すでに述べたように、定常状態では(20)式のような自己相関関数をもつから、ここで考察している非定常不規則信号 $u(t)$ のそれは、次式のような形で表現されるとみなしてよい。

$$R_u(t; \tau) = \frac{\sigma_1}{2} \exp(-\beta|\tau|) \{1 - \exp(-2t/\sigma)\} \quad (\sigma_1: \text{定数}) \quad (25)$$

このとき、(25)式に対応する非定常スペクトル密度を計算すれば

$$S_u(t, f) = \sigma_1 \{1 - \exp(-2t/\sigma)\} \left[\frac{2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2} + \frac{2}{\beta^2 + (2\pi f)^2} \exp(-\beta t) \right. \\ \left. \times (2\pi f \sin 2\pi f t_1 - \beta \cos 2\pi f t_1) \right] \quad (26)$$

となる（付録B参照）。第5図は、時間の経過にとまらうスペクトル密度の変化の様子は、すなわち(26)式を示したものである。

第4図 非定常 O. U. 過程の一例

4.2 非定常応答 例-1 考察する制御系の制御方程式は, (2)式において, $N=1$, $A_0=1$, $A_1=T$ (時定数) とする. この制御系へ, 自己相関関数が(25)式で与えられるような外乱 $u(t)$ が時間 $t=0$ において突発的に印加されたときの $\psi_z(t)$ を, (12)式を用いて評価してみる.

(3)式に対応する等価線形化制御方程式は,

$$Tdz(t)/dt + z(t) + k\kappa z(t) = ku(t) \quad \dots\dots\dots(27)$$

となるから, この系の荷重関数を, κ を一定として計算すれば

$$W(t-\tau_1) = \frac{k}{T} \exp\left\{-\frac{1+k\kappa}{T}(t-\tau_1)\right\} \quad (t > \tau_1) \quad \dots\dots\dots(28)$$

となる. したがって(25)式および(28)式を(12)式へ適用して $\psi_z(t_n)$ を計算すれば次式のようにになる.

$$\begin{aligned} \frac{\psi_z(t_n)}{\sigma_1} = & k^2 \left[\frac{1}{(1+k\kappa)(1+k\kappa+\beta T)} + \frac{4T/\sigma}{(1+k\kappa-\beta T)(1+k\kappa+\beta T)(1+k\kappa+\beta T-2T/\sigma)} \right. \\ & \times \exp\left\{-\left(\beta + \frac{1+k\kappa}{T}\right)t\right\} - \frac{T/\sigma}{(1+k\kappa)(1+k\kappa-\beta T)(1+k\kappa-T/\sigma)} \\ & \left. \times \exp\left(-2\frac{1+k\kappa}{T}t\right) - \frac{T/\sigma}{(1+k\kappa-T/\sigma)(1+k\kappa+\beta T-2T/\sigma)} \exp(-2t/\sigma) \right] \quad \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

$\kappa = \kappa_{n-1}$
 $t = t_n$

いま, 非線形要素の伝達特性が

$$(z) = \begin{cases} -a & (z < -a) \\ z & (|z| < a) \\ a & (z > a) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(30)$$

によって与えられたときの応答を評価する. このとき, (30)式に対応する等価ゲイン κ の値は

$$\kappa = 2\Phi\{a/\sqrt{\psi_z(t)}\} \quad \dots\dots\dots(31)$$

となる. ただし

第5図 時間 t に依存する非定常スペクトル密度の一例

第6図 具体例1に示した制御系の非定常応答

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\zeta \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) d\theta \quad \dots\dots\dots(32)$$

である. したがって, $\psi_z(t_n)$ は, $\kappa_0=1$ であることを考慮することによって(29)式および(31)式より逐次評価される. 第6図は, $T=1.0$, $k=1.0$, $\beta=1.0$, $a=1.0$, $\sigma=\sigma_1=1.0$ および $\Delta_j=0.1$ としたときの $\psi_z(t)$ の計算結果を示したものである.

例-2 第7図に示したブロック線図によってあらわされる制御系を考察する. ただし, 制御対象に含まれる線形要素の伝達関数は

$$G_2(s) = k/(1+Ts) \quad \dots\dots\dots(33)$$

とする. いま, 目標値信号 $v(t)$ の自己相関関数が(25)式によって与えられたときの $\psi_z(t)$ を評価する.

このとき, $v(t)$ と $z(t)$ との関係を示す等価線形化制御方程式は

$$Tdz(t)/dt + z(t) + k\kappa z(t) = Tdv(t)/dt + v(t) \quad \dots\dots\dots(34)$$

となるから, κ を一定としたときの荷重関数は

$$\begin{aligned} W(t-\tau_1) = & \delta(t-\tau_1) \\ & + \frac{1+k\kappa}{T} \exp\left\{-\frac{1+k\kappa}{T}(t-\tau_1)\right\} \quad (t > \tau_1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(35)$$

によって与えられる. ただし δ は Dirac のデルタ関数である. 前例と同様にして $\psi_z(t_n)$ を求めれば次式のようにになる.

第7図 具体例2に示した非線形制御系のブロック線図

$$\begin{aligned} \frac{\psi_z(t_n)}{\sigma_1} = & \frac{1+\beta T(1+k\kappa)}{(1+k\kappa)(1+k\kappa+\beta T)} + \frac{4(k\kappa)^2 T/\sigma}{(1+k\kappa+\beta T)(1+k\kappa-\beta T)(1+k\kappa+\beta T-2T/\sigma)} \\ & \times \exp\left\{-\left(\beta + \frac{1+k\kappa}{T}\right)t\right\} + \frac{2k\kappa}{(1+k\kappa+\beta T)} \{1-\exp(-2t/\sigma)\} \\ & \times \exp\left\{-\left(\beta + \frac{1+k\kappa}{T}\right)t\right\} + (k\kappa)^2 \left\{\frac{2}{(1+k\kappa-\beta T)(1+k\kappa+\beta T-2T/\sigma)}\right. \\ & \left. \times \exp\left(-2\frac{1+k\kappa}{T}t\right) - \frac{(1-k\kappa+\beta T)}{(1+k\kappa+\beta T)} \exp(-2t/\sigma)\right\} \Bigg|_{\substack{\kappa=\kappa_{n-1} \\ t=t_n}} \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

ただし、この式に含まれる σ_1 は $v(t)$ の定常分散である。非線形要素の伝達特性が(30)式によって与えられたときの非定常応答を、 $T=1.0$, $k=1.0$, $\beta=1.0$, $\sigma=\sigma_1=1.0$, $a=1.0$ および $\Delta_j=0.1$ として、例-1 と同様な操作によって計算すれば、第 8 図のようになる。

5. 結 言

ここでは、まず、非定常不規則入力非線形制御系に、外乱または目標値信号として印加されたときの非定常応答を評価し、つぎに、最も実際にそくした O. U. 過程に属する非定常不規則信号の統計学的性質を究明した。この手法を適用するにあたっては、(i) 不規則入力信号の自己相関関数が、実験的、または経験的に(10)式のように τ_1 (または τ_2) と τ の関数で定まること (ii) 非線形要素の形状、および系に印加される入力の状態に依存する初期条件 (または最終条件) が有限確定値をとること、が必要である。

さらに、具体的な非定常不規則入力信号としては、白色雑音のようなもの (定常白色雑音が、Time-variant gain を通過したときに生ずる信号) が考えられるが、これは自己相関関数に Dirac のデルタ関数を適用することによって同様に議論することができる⁽⁵⁾。

このような非定常不規則入力を考慮した制御系応答の解析を、設計計画へ適用することにより、われわれは系に印加される外乱や騒音の影響を最小限にふせぐ対策をこうずることができるのである。この設計計画に関する指針については稿を改める。

付 録 A

積分変換公式 (11) 式の計算

$t_0=0$, $t_{j+1}-t_j=\Delta_j=\Delta$ (等間隔) とす。第 3 図より

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau_1 d\tau_2 = \int_{s_1} \int d\tau_1 d\tau_2 + \int_{s_2} \int d\tau_1 d\tau_2 \dots\dots\dots (37)$$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau_1 \int_{t_j}^{\tau_1-(t_{i+1}-t_{j+1})} d\tau_2 + \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau_2 \int_{t_i}^{\tau_2+(t_{i+1}-t_{j+1})} d\tau_1 \dots\dots\dots (38)$$

という結果をうる。 $\tau_1-\tau_2=\tau$ と置換し、積分領域を変更すれば、次式のようなになる。

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau_1 d\tau_2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau_1 \int_{t_{i+1}-t_{j+1}}^{\tau_1-t_j} d\tau + \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau_2 \int_{t_i-\tau_2}^{t_{i+1}-t_{j+1}} d\tau \dots\dots\dots (39)$$

また、(39)式から (第 9 図参照)

$$\int_0^{t_n} \int_0^{t_n} d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_n} d\tau \int_0^{t_n-\tau} d\tau_1 + \int_{-t_n}^0 d\tau \int_0^{t_n+\tau} d\tau_2 \dots\dots\dots (40)$$

および

$$\int_{-\infty}^{t_n} \int_{-\infty}^{t_n} d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{t_n} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau + \int_{-\infty}^{t_n} d\tau_2 \int_{-\infty}^0 d\tau \dots\dots\dots (41)$$

を導くことができる。

第 8 図 具体例 2 に示した制御系の非定常応答

第 9 図

付 録 B

非定常スペクトル密度, および非定常自己相関関数の計算

(a) $u(t')$ の定義域が $-\infty < t' < t$ である場合 [$t' > t$ では $u(t')=0$]

$u(t')$ のフーリエ変換 $S_u(t; f)$ は

$$S_u(t; f) = \int_{-\infty}^t u(t') e^{-j2\pi f t'} dt' \quad (42)$$

によって与えられる。(42) 式の共役関数形を $S_u^*(t; f)$ とすれば

$$S_u^*(t; f) = \int_{-\infty}^t u(t_1') e^{j2\pi f t_1'} dt_1' \quad (43)$$

となる。したがって, $u(t')$ の振動数 f に対する Joint energy⁽⁶⁾ は

$$\langle E(t; f) \rangle_{av.} = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \langle u(t') u(t_1') \rangle_{av.} e^{j2\pi f (t_1' - t')} dt' dt_1' \quad (44)$$

によって計算される。いま, $t_1' - t' = \tau$ と置換し, (44) 式に積分変換公式(41)式, および(10)式の関係を用いれば

$$\langle E(t; f) \rangle_{av.} = \int_{-\infty}^t \int_0^\infty R_u(t_1' - \tau; -\tau) e^{j2\pi f \tau} dt_1' d\tau + \int_{-\infty}^t \int_0^\infty R_u(t_1'; \tau) e^{-j2\pi f \tau} dt_1' d\tau \quad (45)$$

という結果をうる。ふたたび $R_u(t_1'; \tau) = R_u(t_1' - \tau; -\tau)$ という関係を用いて上式を簡単にすれば

$$\langle E(t; f) \rangle_{av.} = 2 \int_{-\infty}^t \int_0^\infty R_u(t_1'; \tau) \cos 2\pi f \tau dt_1' d\tau \quad (46)$$

となる。したがって, 時間 t に依存するスペクトル密度⁽⁶⁾は

$$S_u(t; f) = 2 \frac{\partial}{\partial t} [\langle E(t; f) \rangle_{av.}] \quad (47)$$

によって計算され, その結果は

$$S_u(t; f) = 4 \int_0^\infty R_u(t; \tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (48)$$

となる。このとき, 自己相関関数 $R_u(t; \rho)$ は次式によって与えられることがわかる。

$$R_u(t; \rho) = \int_0^\infty S_u(t; f) \cos 2\pi f \rho df \quad (49)$$

(b) $u(t')$ の定義域が $0 < t' < t$ である場合 [$t' > t$ では $u(t')=0$]

このときは, (48) 式に対応するスペクトル密度の式は

$$S_u(t; f) = 4 \int_0^t R_u(t; \tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (50)$$

となり, 自己相関関数の形状は(49)式のようなことを, (a)の場合と同様にして導くことができる。

文 献

- (1) Y. Sawaragi & others, *Statistical Studies on Non-Linear Control Systems*, (1962), Nippon Print. and Pub.
- (2) Y. Sawaragi & others, *Tech. Reps. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ.*, 12-1, Report No.91, (1962), 1.
- (3) J.H. Laning & R.H. Battin, *Random Processes in Automatic Control*, (1956), McGraw-Hill.
- (4) P. Deutch, *Nonlinear Transformations of Random Processes*, (1962), 118, Prentice-Hall, Inc.
- (5) Y.K. Lin, *Trans. ASME., Ser.E*, 30-4 (1963), 555.
- (6) D.G. Lampard, *J. Appl. Phys.*, 25-9 (1954), 855.