621-501.22:621-503.4

むだ時間をもつ飽和ゲイン制御系の 安定性およびリットサイクル*

市 川 邦 彦**

On the Stability and Limit Cycle of Gain-Saturated Control System with Dead Time

by Kunihiro ICHIKAWA

The second order system with positive damping coefficient may become unstable by introducing dead time. Relation between dead time and damping under critically stable condition was evaluated by both frequency response method and analytical method, and the result shows fairly good agreement. When the gain element has a saturation characteristic, the system will have a stable limit cycle under the unstable condition stated above. Amplitude and frequencies of limit cycles were evaluated by both describing function method and analytical method, and were compared with numerical solutions through computer. It was proved that describing function method had good accuracy while analytical one had some errors in the evaluation of frequencies at large dead time. The analytical method, however, offers prospective relations and will possibly be the effective method in the analysis of nonlinear control systems.

1. ま え が き

正の減衰係数をもつ二階の系は安定であるが、むだ時間が含まれると不安定になりうる。そしてゲインが飽和形の非線形性をもっていると、1 個の安定なリットサイクルをもつ。この研究は安定判別については周波数応答法と解析的方法の両面から、またリットサイクルの振幅および周波数については記述関数法と解析的方法の両面から考察し、さらにリットサイクルへの収束性についても若干の考察を行なったものである。

考察の対象とした制御系は第 1 図に示すようなむだ時間をもつ二階の非線形系である。ここでは、非線形ゲイン要素の性質を次のような三次式で表わすことにする。

第 1 図 むだ時間をもつ二階の非線形制御系

* 昭和 37 年 10 月 15 日 第 40 期東京秋期講演大会において論文講演として講演，原稿受付 昭和 37 年 7 月 9 日。

** 正員，名古屋大学工学部（名古屋千種区不老町）。

$$f(e) = K(e - \beta e^3) \dots\dots\dots (1)$$

ゲイン要素の性質を図示すると第 2 図に示すごとくである。これは実在の飽和特性を解析的に近似したものであって、その適用範囲は第 2 図の実線の部分，すなわち $|e| \leq 1/\sqrt{3\beta}$ の部分に限られる。

2. 周波数応答法による安定判別

第 1 図の系がリットサイクルをもつとすれば、それはやわらかい自励振動にもとづくものである。すなわち、系の条件が安定限界を越えて発振条件にはいる場合には、リットサイクルの振幅は 0 より徐々に大きくなる。このような系の安定判別においては、非線形性の影響はあらわれない⁽¹⁾ので、安定判別は線形系

第 2 図 ゲイン要素の入出力の関係

のそれと異なることはない。したがって安定判別に
関する限り、非線形要素 n を定数 K におきかえてさ
しつかえない。

そのとき、一巡伝達関数は

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{s(Js+D)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となり、安定限界は次の式で与えられる。

$$G(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega L}}{j\omega(Jj\omega+D)} = -1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

いま

$$\frac{J}{D} = T_M, \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D^2}{KJ}} = \zeta \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおくと、(3)式は次のようになる。

$$\frac{1}{4\zeta^2 j\omega T_M(j\omega T_M+1)} e^{-j\omega T_M(L/T_M)} = -1 \quad \dots\dots\dots (5)$$

これを次のように変形する。

$$\begin{aligned} e^{-j\omega T_M(L/T_M)} \\ = 4\zeta^2 \omega T_M \sqrt{1+(\omega T_M)^2} e^{-j(\pi/2 - \tan^{-1}\omega T_M)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

この式から、安定限界は次の式を満足しなければなら
ないことがわかる。

$$4\zeta^2 \omega T_M \sqrt{1+(\omega T_M)^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$\omega T_M \frac{L}{T_M} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega T_M \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

この二つの式は、任意の ζ に対して、ちょうど安定
限界を与えるむだ時間割合 L/T_M を与えるが、その

$$\frac{de}{dt} = \frac{da}{dt} \sin(\nu t + \varphi) + a\nu \cos(\nu t + \varphi) + a \frac{d\varphi}{dt} \cos(\nu t + \varphi) \quad \dots\dots\dots (11)$$

を得る。(10)、(11)式から次の関係が必要となる。

$$\frac{da}{dt} \sin(\nu t + \varphi) + a \frac{d\varphi}{dt} \cos(\nu t + \varphi) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

(10)式より d^2e/dt^2 は次のように表わされる。

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{da}{dt} \nu \cos(\nu t + \varphi) - a\nu^2 \sin(\nu t + \varphi) - a\nu \frac{d\varphi}{dt} \sin(\nu t + \varphi) \quad \dots\dots\dots (13)$$

(9)、(10)および(13)式を(8)式に代入すると

$$\begin{aligned} \int \frac{da}{dt} \nu \cos(\nu t + \varphi) - J a \nu^2 \sin(\nu t + \varphi) - J a \nu \frac{d\varphi}{dt} \sin(\nu t + \varphi) + D a \nu \cos(\nu t + \varphi) \\ + K a \cos \nu L \sin(\nu t + \varphi) - K a \sin \nu L \cos(\nu t + \varphi) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

括弧内の数値は発振周波数 ωT_M を示す。

第3図 安定限界曲線

関係を陽の形に導くことはできない。 ωT_M を媒介と
し、これに種々の数値を与えることによって、 ζ と
 L/T_M との関係が結びつけられ、同時に、ちょうど安
定限界における発振周波数 ωT_M も得られる。第3図
にこれを示す。図において、安定限界曲線上に目盛ら
れた数値は ωT_M である。

3. 解析的方法による安定判別

ここで使う解析的方法というのは、非線形系のリミ
ットサイクルや過渡応答を求めるのに有効なパラメー
タ変化法⁽²⁾である。ただし安定判別に限って非線形性
を無視してさしつかえない。したがって系の動作を記
述する方程式は次の微分差分方程式となる。

$$J \frac{d^2e}{dt^2} + D \frac{de}{dt} + Ke(t-L) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

安定限界の付近においては、 e は弱い減衰振動また
は弱い生長振動をするはずである。そのような解を近
似的に求めるために母解として次の解を設定する。

$$e = a \sin(\nu t + \varphi) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{de}{dt} = a\nu \cos(\nu t + \varphi) \quad \dots\dots\dots (10)$$

弱い減衰振動または生長振動は、 a と φ を t の関数
とみなすことによって求めることができる。 ν につい
ては後述する。 a と φ を t の関数とすることによ
り、(9)式より

を得る。 φ が t の関数として求められることになっ
ているので、 ν は一義的な意味をもたず、ある程度任
意の値を用いてさしつかえない。そこで、ここでは積
極的に(14)式が簡単な形となるように ν を選ぶこと
にする。 ν として、次の関係を満足するような値に選
ぶ。

$$J a \nu^2 = K a \cos \nu L \quad \dots\dots\dots (15)$$

そうすると、(14)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int \frac{da}{dt} \nu \cos(\nu t + \varphi) - J a \nu \frac{d\varphi}{dt} \sin(\nu t + \varphi) \\ = (-D\nu + K \sin \nu L) a \cos(\nu t + \varphi) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

(12)式と(16)式は da/dt と $d\varphi/dt$ に関する連立方程

式であって、これより

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{j\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \cos^2(\nu t + \varphi) \quad \dots (17)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{j\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \times \cos(\nu t + \varphi) \sin(\nu t + \varphi) \dots (18)$$

を得る。(17), (18)式の右辺をフーリエ級数に展開すると次のように書換えることができる。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{a}{2j\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{a}{j\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \cos(2\nu t + 2\varphi) \end{aligned} \quad \dots (19)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2j\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \sin(2\nu t + 2\varphi) \quad \dots (20)$$

すでに述べたように、 e は弱い減衰振動または生長振動をするから、 a と φ は時間的にゆっくり変動する関数であって、一周期内的変動はほとんど無視しうる。そのような場合、(19)と(20)式の右辺は、直流分のみをとることができる⁽⁸⁾。よって、 a と φ をきめる微分方程式はつぎのようになる。

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{2j\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \quad \dots (21)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \dots (22)$$

(21)式から

$$a = a_0 \exp\left(\frac{-D\nu + K \sin \nu L}{2j\nu} t\right) \quad \dots (23)$$

これから次の安定判別を得る。

$$\left. \begin{aligned} D\nu > K \sin \nu L &: \text{安定} \\ D\nu = K \sin \nu L &: \text{安定限界} \\ D\nu < K \sin \nu L &: \text{不安定} \end{aligned} \right\} \quad \dots (24)$$

ここで、(4)式の関係を使うと、安定判別はつぎのように書直せる。

第4図 解析的方法によって求めた安定限界曲線と発振周波数

$$\left. \begin{aligned} 4\zeta^2 \nu T_M &> \sin\left(\nu T_M \frac{L}{T_M}\right) : \text{安定} \\ 4\zeta^2 \nu T_M &= \sin\left(\nu T_M \frac{L}{T_M}\right) : \text{安定限界} \\ 4\zeta^2 \nu T_M &< \sin\left(\nu T_M \frac{L}{T_M}\right) : \text{不安定} \end{aligned} \right\} \quad \dots (25)$$

そして、 ν をきめる(15)式は次のように表わされる。

$$4\zeta^2 (\nu T_M)^2 = \cos\left(\nu T_M \frac{L}{T_M}\right) \quad \dots (26)$$

(22)式から $\varphi = \text{const.}$ を得るので発振周波数は ν となる。そしてその無次元量は νT_M である。

(25)式の安定限界を表わす式と(26)式は νT_M をパラメータとした安定限界曲線を与える。ただ具体的な計算法は次のようにするのが便利である。(26)式において ζ と L/T_M に種々の値を与えて νT_M を求めておく。次に(25)式に移り、まず ζ をある値に仮定し、そこで νT_M に種々の値を与える。この νT_M の種々の値には、(26)式を満足する L/T_M が定まっているから、(25)式が成り立つような νT_M を探りあてることができ、同時に L/T_M がきまる。これを第4図に示す。このように第3図ではパラメータ ωT_M の種々の値に対して計算されたのに対し、第4図では ζ 別に計算されているが、両図はきわめてよく一致しており、この解析的方法の有効性を示している。

4. 記述関数法によるリミットサイクルの算定

(1)式で表わされる非線形要素の記述関数は次のとおりである。

$$N(E) = K \left(1 - \frac{3}{4} \beta E^2\right) \quad \dots (27)$$

ただし、 E はこの要素の正弦波入力振幅である。

(4)式の関係を使い、さらに

$$X = \sqrt{3\beta} E \quad \dots (28)$$

とおいて E を無次元化する。そうすると、振幅依存部分および周波数依存部分はそれぞれつぎのようになる。

$$\frac{T_M}{D} N(X) = \frac{1}{4\zeta^2} \left(1 - \frac{1}{4} X^2\right) \quad \dots (29)$$

$$\frac{T_M}{D} G(j\omega T_M) = \frac{e^{-j\omega T_M (L/T_M)}}{j\omega T_M (j\omega T_M + 1)} \quad \dots (30)$$

ここで X の適用範囲は $X \leq 1$ である。

振幅軌跡および周波数軌跡の交点からリミットサイクルの振幅および周波数を求めることができる。作図はナイキスト平面よりもゲイン-位相平面を用いるほうが容易で精度も出しやすい。またゲインは真数で表わすほうがよい。 ζ を 0.6 にとった場合のむだ時間と振幅との関係は第7図に、またむだ時間と周波数と

の関係は第8図に示してある。

5. リミットサイクルの数

リミットサイクルは振幅軌跡と周波数軌跡の交点として求まるが、交点は1個に限らず複数個生ずることがある。このとき、どの交点がリミットサイクルを与えるのかをはっきりさせておく必要がある。

例として、 $\zeta=0.4$ の場合には L/T_M が約 7.5 以上において2個の交点を生じ、また L/T_M が約 13 になると3個の交点を生ずる。この問題はナイキスト線図で考えるほうが理解が容易である。第5図は ζ が同一の系で、むだ時間を変化させた場合に、交点が生じない場合、1個生ずる場合、2個生ずる場合を示したものである。いずれの場合も振幅軌跡には変化がなく、周波数軌跡が変るのみである。(a)図はむだ時間が小なるため振幅軌跡と周波数軌跡は交わらず、したがって安定な系である。(b)図はむだ時間がやや大きくなって、両軌跡が1点Aで交わった場合で、A点は安定なリミットサイクルを意味する。さらにむだ時間が大きくなると(c)図のように両軌跡はA, B 2箇所でお互いになる。A点は安定なリミットサイクルを意味するが、B点はリミットサイクルとは無関係な点である。もし振幅が0と X_A の間の値であれば、系は不安定となり、必ず振幅軌跡上をAに向かって移動する。このことは振幅が X_B 付近の値であっても関係がないことである。すなわち、両軌跡が多数の交

第5図 振幅軌跡と周波数軌跡の交わり方

点を有する場合にも、リミットサイクルはいちばん外側の交点、すなわち、最も周波数が低く、最も振幅の大きいところのみにあるのであって、リミットサイクルは安定なものただ1個しか得られない。

6. 解析的方法によるリミットサイクルの算定

系を記述する方程式は、次の微分差分方程式である。

$$J \frac{d^2 e}{dt^2} + D \frac{de}{dt} + Ke(t-L) - \beta Ke^3(t-L) = 0 \quad (31)$$

リミットサイクルにおいては e は周期関数となり、ほぼ正弦波に近い運動をするものと考えられる。その付近においては、比較的弱い減衰振動または生長振動を行ないつつリミットサイクルに接近してゆくであろう。そこで、母解を再び(9), (10)式のようにおき、 a と φ を時間の関数と考えることによって、リミットサイクル付近における近似解を求めるという手段を用いることにする。したがって、まず(12)式が成り立たなければならないことがわかる。今度は(14)式に対応する式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & J \frac{da}{dt} \nu \cos(\nu t + \varphi) - J a \nu^2 \sin(\nu t + \varphi) - J a \nu \frac{d\varphi}{dt} \sin(\nu t + \varphi) + D a \nu \cos(\nu t + \varphi) \\ & + K a \cos \nu L \sin(\nu t + \varphi) - K a \sin \nu L \cos(\nu t + \varphi) \\ & - \beta K a^3 \{ \cos \nu L \sin(\nu t + \varphi) - \sin \nu L \cos(\nu t + \varphi) \}^3 = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

再び ν を(15)式によって決定することになると、(32)式は簡単となり次のようになる。

$$\begin{aligned} & J \frac{da}{dt} \nu \cos(\nu t + \varphi) - J a \nu \frac{d\varphi}{dt} \sin(\nu t + \varphi) \\ & = (-D\nu + K \sin \nu L) a \cos(\nu t + \varphi) + \beta K a^3 \{ \cos \nu L \sin(\nu t + \varphi) - \sin \nu L \cos(\nu t + \varphi) \}^3 \quad (33) \end{aligned}$$

(12), (33)式より、次の連立微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{a}{J\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \cos^2(\nu t + \varphi) \\ &+ \frac{\beta K a^3}{J\nu} \{ \cos \nu L \sin(\nu t + \varphi) - \sin \nu L \cos(\nu t + \varphi) \}^3 \cos(\nu t + \varphi) \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{J\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \cos(\nu t + \varphi) \sin(\nu t + \varphi) \\ &- \frac{\beta K a^2}{J\nu} \{ \cos \nu L \sin(\nu t + \varphi) - \sin \nu L \cos(\nu t + \varphi) \}^3 \sin(\nu t + \varphi) \quad (35) \end{aligned}$$

(34), (35)式の右辺をフーリエ級数に展開すると、次のように書変えられる。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \frac{a}{2J\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) - \frac{\beta K a^3}{J\nu} \frac{3}{8} \sin \nu L + \left\{ \frac{1}{2} \frac{a}{J\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \right. \\ & \left. - \frac{\beta K a^3}{2J\nu} \sin^3 \nu L \right\} \cos (2\nu t + 2\varphi) + \frac{\beta K a^3}{J\nu} \left(\frac{3}{8} \cos^2 \nu L \sin \nu L - \frac{1}{8} \sin^3 \nu L \right) \cos (4\nu t + 4\varphi) \\ & + \frac{\beta K a^3}{J\nu} \left(\frac{1}{4} \cos^3 \nu L + \frac{3}{4} \cos \nu L \sin^2 \nu L \right) \sin (2\nu t + 2\varphi) + \frac{\beta K a^3}{J\nu} \left(-\frac{1}{8} \cos^3 \nu L \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} \cos \nu L \sin^2 \nu L \right) \sin (4\nu t + 4\varphi) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & -\frac{\beta K a^2}{J\nu} \frac{3}{8} \cos \nu L - \frac{\beta K a^2}{J\nu} \left(-\frac{1}{2} \cos^3 \nu L \right) \cos (2\nu t + 2\varphi) \\ & - \frac{\beta K a^2}{J\nu} \left\{ \frac{1}{8} \cos^3 \nu L - \frac{3}{8} \cos \nu L \sin^2 \nu L \right\} \cos (4\nu t + 4\varphi) + \left\{ \frac{1}{2J\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) \right. \\ & \left. - \frac{\beta K a^2}{J\nu} \left(-\frac{3}{4} \cos^2 \nu L \sin \nu L - \frac{1}{4} \sin^3 \nu L \right) \right\} \sin (2\nu t + 2\varphi) - \frac{\beta K a^2}{J\nu} \left(\frac{3}{8} \cos^2 \nu L \sin \nu L \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \sin^3 \nu L \right) \sin (4\nu t + 4\varphi) \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

前に述べたと同じ理由で、(36)、(37)式の右辺の直
流分のみをとることとする。そうすると、 a と φ を
きめる微分方程式はつぎのようになる。

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{2J\nu} (-D\nu + K \sin \nu L) - \frac{\beta K a^3}{J\nu} \frac{3}{8} \sin \nu L \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\beta K a^2}{J\nu} \frac{3}{8} \cos \nu L \dots\dots\dots (39)$$

リミットサイクルの振幅は $\lim_{t \rightarrow \infty} a$ であって、(38)式
の右辺を 0 とおくことによって求めることができる。
すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a = \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{K \sin \nu L - D\nu}{\beta K \sin \nu L}} \dots\dots\dots (40)$$

(4)および(28)式を使って整理すると、リミットサイ
クルの無次元振幅 X は次の式で与えられる。

$$X = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{3\beta} a = 2 \sqrt{1 - \frac{4\zeta^2 \nu T_M}{\sin \left(\nu T_M \frac{L}{T_M} \right)}} \dots\dots (41)$$

ここで νT_M は、 ζ と L/T_M を与えると(26)式から
求め得る。それを(41)式に代入すると、 ζ と L/T_M に
対応した振幅 X が求められる。

周波数 ω は $\nu + d\varphi/dt$ で与えられる。リミットサイ
クルにおいては、(39)式で、 ν はすでにきまってお
り、 a も上述の計算によって求められているから、
 $d\varphi/dt$ を、したがって ω を計算することができる。
無次元周波数で表わすと

$$\begin{aligned} \omega T_M = & \nu T_M + T_M \frac{d\varphi}{dt} \\ = & \nu T_M - T_M \frac{\beta K a^2}{J\nu} \frac{3}{8} \cos \nu L \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

となり、(4)と(28)式を使って整理すると

$$\omega T_M = \nu T_M - \frac{X^2}{32\zeta^2 \nu T_M} \cos \left(\nu T_M \frac{L}{T_M} \right) \dots\dots (43)$$

となる。 ζ を 0.6 にとった場合のむだ時間と振幅と
の関係は第 7 図に、またむだ時間と周波数との関係は
第 8 図に示してある。

つぎにリミットサイクルへの収束性について考察し
よう。リミットサイクル付近の振幅の変化は(38)式に
よってきまる。(4)と(28)式を使い、さらに無次元時
間

$$\tau = \frac{t}{T_M} \dots\dots\dots (44)$$

を用いると、(38)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = & \left\{ \frac{1}{8\zeta^2 \nu T_M} \sin \left(\nu T_M \frac{L}{T_M} \right) - \frac{1}{2} \right\} X \\ & - \frac{1}{32\zeta^2 \nu T_M} \sin \left(\nu T_M \frac{L}{T_M} \right) X^3 \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{4\zeta^2 \nu T_M}{\sin \left(\nu T_M \frac{L}{T_M} \right)} = p \dots\dots\dots (46)$$

とおく。 p はリミットサイクルの振幅を決定する式
(41)の中に出て来ており、振幅はもっぱら p によっ
てきまる。リミットサイクルを生ずるような条件のもと
では、 p は 1 より小なる正数である。 p を用いると、
(45)式は次のようになる。

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) X - \frac{1}{8p} X^3 \dots\dots\dots (47)$$

$\tau=0$ における X の値を X_0 とすると、(47) 式の解
は次のようになる。

$$X = \frac{X_0 e^{[(1-p)/2p]\tau}}{\sqrt{1 + X_0^2 (e^{[(1-p)/p]\tau} - 1)/4(1-p)}} \dots\dots\dots (48)$$

ここで $\tau \rightarrow \infty$ とすれば、リミットサイクルの振幅と
して $2\sqrt{1-p}$ を得るが、すでに(41)式として求めら
れていることである。

振幅が, リミットサイクルの振幅 $2\sqrt{1-p}$ の α 倍するとき, (45)式より

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{(1-p)^{3/2}}{p} (\alpha - \alpha^3) \dots\dots\dots(49)$$

を得る. $\alpha >, =, < 1$ にしたがって $dX/d\tau <, =, > 0$ であるから, 振幅は単調に変化してリミットサイクルに接近する.

$(1-p)^{3/2}/p$ は系の特性に由来して収束の強さを表わすものである. リミットサイクルの振幅と同様に, p のみによってきまる. p は(26)式と(46)式によってきまるもので, ζ と L/T_M がきまると定まり, $\zeta = 0.6$ と定めた場合には L/T_M のみによってきまる. 第6図は L/T_M と収束の強さ $(1-p)^{3/2}/p$ との関係を示したもので, むだ時間が小なるときには収束が弱く, むだ時間を大きくすると収束が強くなることを示している.

むだ時間は非線形性のない場合の不安定度の強さを示しており, このことがむだ時間と収束の強さとの関係を結び付けているものと考えられる.

7. 電子計算機による数値計算結果

以上記述関数法ならびに解析的方法によって, リミットサイクルの振幅と周波数を求め, また解析的方法による結果から, リミットサイクルへの収束性についても検討を行なったが, 電子計算機による数値計算結果を基準として, これらの解法の精度について検討をしよう.

(31)式において, (4), (28) および (44) 式を使うと, 方程式は次のように規準化される.

$$4\zeta^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + 4\zeta^2 \frac{dx}{d\tau} + x \left(\tau - \frac{L}{T_M} \right) - \frac{1}{3} x^3 \left(\tau - \frac{L}{T_M} \right) = 0 \dots\dots\dots(50)$$

第6図 収束の強さとむだ時間との関係

計算例はすべて $\zeta = 0.6$ に対して行なった. したがって方程式は次のごとくである.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + \frac{1}{1.44} x \left(\tau - \frac{L}{T_M} \right) - \frac{1}{4.32} x^3 \left(\tau - \frac{L}{T_M} \right) = 0 \dots\dots\dots(51)$$

二つの解法からわかるように, (51)式は L/T_M がほぼ 1.75 より大きくなるとリミットサイクルをもち, $|x| \leq 1$ の制限内では, L/T_M を約 2.40 まで変えることができる.

方程式は微分差分方程式であるが, 微分方程式の数値解法と同じ方法が適用できる. ここでは, ルンゲ・クッタ・ギルの方法を用いた. $\Delta\tau$ は 0.05 にとった. リミットサイクルは初期条件に無関係であるが, 計算時間を少なくするためと, 累積誤差が過大とならないようにするために, 初期の振幅を, 記述関数法および解析的方法による結果から推定されるリミットサイクルの振幅の近くに選んだ. 解が周期性を示すところで自動的に計算を停止するようにした.

第7, 8図において, 計算機による数値計算で求め

第7図 各種の方法によって求めたリミットサイクルの振幅

第8図 各種の方法によって求めたリミットサイクルの周波数

第9図 むだ時間と p との関係

られた値は、 $\otimes$ 印で示してある。

記述関数法による振幅と周波数は、計算機による数値計算結果とかなりよく一致している。解析的方法による場合は、振幅は比較的良好に合っているが、周波数では若干の誤差を生じている。

計算機による数値計算の結果において、解がリミットサイクルに接近しつつある状態で $dX/d\tau$ と X を読み取ると、(47) 式から p を求めることができる。一方 p は系の状態すなわち L/T_M がきまると、(26) 式と (46) 式から決定されるものである。第9図は、このようにして得られた p を比較したもので、比較的良好に一致がみられる。

8. む す び

むだ時間をもつ二階の線形系は、 ζ に対応して系を不安定ならしめるようなむだ時間が存在し、この限界値を求めた。この値を、解析的方法によっても求めてみたが、周波数応答法による結果とよい一致を示した。

討 論

〔質問〕 (1) 飽和特性曲線について。

$e = \alpha m + \beta m^3$ の形を採用して、入力振幅の大きさに対する制限を除くことにしてはどうか [m は $f(e)$ に該当]。

(2) 第5図(c)の交点について。

むだ時間があるために両軌跡の交点が2個以上できる場合にも、ただひとつの安定なリミットサイクルのみが存在することの論拠。

(3) (40) 式右辺根号内の符号について。

安定なリミットサイクルの存否はこの符号によって定まる。リミットサイクルが存在するためには、(31) 式の K の値として、(24) 式の不安定条件を満たすものが用いられることが記されていると、線形系との関連がいっそう明確になるとおもう。

(4) 実際問題では、二次系とならず、さらに高次

ゲインが飽和特性をもっていると、上記の不安定な条件のもとでは、安定なリミットサイクルにはいる。リミットサイクルは安定なものだひとつである。リミットサイクルの振幅と周波数を記述関数法で求めた値は、電子計算機による数値計算結果と非常に一致を示したが、解析的方法によって求めたこれらの値は、むだ時間の大きいところで若干の相違を示した。

振幅はむだ時間とともに増大し、周波数はむだ時間とともに低下する。リミットサイクルへの収束性は、解析的方法によってのみ考察が可能で、解析的方法によって得られた結果と、実際の結果はかなりよい一致を示した。

ここで取上げた制御系では、記述関数法が非常に精度を示し、それと比較されたので、解析的方法は精度の点で見劣りがするが、解析的方法によれば、非常にみとおしのきく形の解が得られるところに大きな意義があり、またリミットサイクルへの収束性というような動的な問題は、解析的方法によらなければ考察し得ないところである。

おわりに、電子計算機の使用に当って種々のご教示とご援助を与えられた名屋古大学助教授 二宮市三氏に深謝する。

文 献

- (1) 市川, 機械学会論文集, 29-197 (昭 38-1), 225.
- (2) Cunningham, *Introduction to Nonlinear Analysis*, Chap. 6 (1958), McGraw Hill.
- (3) N. Kryloff & B. Bogoliuboff, *Introduction to Nonlinear Mechanics*, (1947), Chap. II, Princeton Univ. P.

論

の系となる場合も多いから、高次系に高次の近似解法を適用することによって、高調波をも含む安定なリミットサイクルを二つ以上見出だすことも興味があるのではない。

(5) ささいなことながら、第1図の中で、動作信号の e と指数関数の e とは、記号を異にしたほうがいいとおもう。

(沢村 泰造)

〔回答〕 (1) この線に沿って非常に努力したが成功しなかった。最近飽和特性を $\tanh$ で表わす解析法にほぼ成功したので、これによって解決しようと思う。

(2) 例として周波数軌跡 $G(j\omega)$ が振幅軌跡 $-1/N(X)$ と A, B の二点で交わる場合について説明する。付図1にこれを示す。振幅軌跡 $-1/N(X)$ 上の任意の一点は、線形理論におけるナイキストの安定

判別法の基準点 $-1+j0$ に対応する。この基準点を A より左側の任意の点 P_1 、A と B の中間の任意の点 P_2 および B より右側の任意の点 P_3 にとって、おのおの場合の安定判別を行なってみる。

(i) $G(j\omega)$ は P_1 のまわりを回らないから、系は P_1 に対して安定で、もし系が P_1 が表わす振幅で発振していたとしても、その振幅は小さくならうとする。

(ii) $G(j\omega)$ は P_2 のまわりを CW に 2 回まわる。これは不安定根が 2 個存在することを意味し、もし系が P_2 が表わす振幅で発振していたとしても、その振幅は大きくなろうとする。

(iii) $G(j\omega)$ は P_3 のまわりを CW に 4 回まわり、4 個の不安定根が存在するが、振幅が大きくなろうとすることは (ii) と同じである。

結局 A 点より右側では本質的な相違はない。A 点のみが安定と不安定の境界をなしている。そして (i) と (ii) よりこれが安定なリミットサイクルを意味することは明らかである。したがって交点が 2 個以上できる場合にも安定なリミットサイクルはただ 1 個である。

(3) お説のとおり説明を加えれば理解をいっそう助けたと思う。

(4) 同感である。

(5) 今後 ϵ または x を使いたい。

〔質問〕 非線形制御系の解析に振動論での手法を導入され、厳密に検討され敬意を表します。なおここで行なわれた系については残念ながら記述関数のほうが一般に良い結果がでているが、その後他の非線形制御系などでこの解析的な手法によるほうが良い例があるだろうか。また求めたい自動制御系を解のわかった非線形方程式に逆に近似して論ずるなどということとはできないものか。

(三巻 達夫)

〔回答〕 リミットサイクルについての例を他にも

付 図 1

っていないが、過渡応答、収束性などの動的問題は解析的方法によらねば考察し得ない。またここに述べた方法を一般化した漸近展開法では、理論上いくらでも近似度を高めうるから、精度の点でも記述関数法をしのご得ると思う。

〔質問〕 この論文は二次の系にむだ時間が付加されたものを対称微分可能な非線形要素に結合した制御系のリミットサイクルについて検討を行なった一例と考えられる。そしてリミットサイクルの動的安定性に関して収束の強さをとり上げている点は特徴といえよう。なお次の点について伺いたい。

(1) 918ページ(7.b)式の下4行の記述は理解にくるしむ。それは(7.a), (7.b)式から

$$\frac{L}{T_M} = \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{4\zeta^4} - 1}}{2} \right\}}{\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{4\zeta^4} - 1}}{2}} \dots\dots\dots(a)$$

が得られるからである。

(2) 3章の結果と2章の結果とは完全に一致してしかるべきである。なぜなら、(7.a), (7.b) 式から(25), (26)式が導かれるからで、すなわち簡単のために $L/T_M = \lambda$, $\omega T_M = u$ とおくと

(7.a), (7.b)式はそれぞれ

$$4\zeta^2 u \sqrt{1+u^2} = 1 \dots\dots\dots(b)$$

$$u\lambda = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} u \dots\dots\dots(c)$$

$$(c) \text{式から } u = \cot u\lambda \dots\dots\dots(d)$$

$$(b) \text{式から } 4\zeta^2 u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \dots\dots\dots(e)$$

これに(d)式を代入して

$$4\zeta^2 u^2 = \sin(u\lambda) \dots\dots\dots(f)$$

(d)と(f)式から

$$4\zeta^2 u^2 = \cos(u\lambda) \dots\dots\dots(g)$$

(f)式と(g)式で u を λT_M と考えれば、これらは(25)および(26)式と全く同一である。

(3) したがって、919ページ右欄19行めにのべられているように“……きわめてよく一致して……”はむしろ“第3図と第4図とは完全に合致するのは当然である”。というべきではないだろうか。

(4) 最後に922ページ“ $|x| \leq 1$ の制限内で、 L/T_M を約 2.40 まで変えることができる”といっておられるが、それ以上の L/T_M の値の場合はどうなるのか。またなぜ 2.40 以上の場合を考えないのか。またこのような場合には系の応答はどのようなのだろうか。

(伊 沢 計介)

〔回答〕 (1) お説のとおり陽の形が得られる。第3図の作成のためには、本文で述べた方法のほうが容易である。

(2), (3) (7・a), (7・b)式と(25), (26)式が完全に一致するというご指摘はまことに有益であった。したがって第3図と第4図は当然同一のものである。ただ解析的手法による結果は νT_M の選定によって種々の形をとる。たまたま本文に述べた方法は νT_M の選定がよくて、安定判別に関して正確解と一致したのであって、一般的には、ここで述べたような比較を必要と

する。

(4) $\zeta=0.5$ のとき、 L/T_M が 2.40 を越えるとリミットサイクルの振幅 X が 1 を越え、(1) 式で表わしたゲイン特性が普通の飽和特性を表わさなくなるので考察のほかにしたのである。もし第2図の破線の部分まで延びるようなゲイン特性があるものとすれば、 L/T_M が 2.40 を越えても、ある程度ならば 1 より大きな振幅をもった安定なリミットサイクル 1 個が存在する。 L/T_M が非常に大きくなったときのことはまだ研究していない。

イギリス第 48 回物理研究発表会の成果

1964 年 1 月 ロンドンにおいて Institute of Physics and the Physical Society の第 48 回研究発表会出席者達によって、約 124 の製造業者、16 の政府および産業諸機関、および 14 の大学や専門学校等の諸研究が検討された。この研究発表会といっしょに開設された展覧会では新規の展示品のみが選択されているので、他の貿易ショーよりも、きわめて活気のあるものとなっている。そのうち、次のようなものは特に注目されている。

(1) Oxford Instrument 社は、Heath Robinson 社とともに極低温容器内で、どのようにして磁界を封鎖するかについて討議を行ない、多数の聴衆を得た。この装置は 1000 ポンドで販売され、かなり高度の磁界を容易に実験室内で利用できるようにくふうさ

れている。

(2) Metal Research 社では、旋盤に取付ける火花機械を開発して、電氣的腐食によって試料を適当な形にすることが研究されている。

(3) Service Electronics 研究室では、回転状況を点検するための環状レーザを開発した。

(4) イギリス原子力局では鋼の酸素含有量の急速な測定装置を発表している。

(5) Warren Spring 実験室では、高圧静電気分離装置を開発し、電気の伝導性差異を知る作業に利用しようとしている。

(Discovery, Vol. 25, No. 2, 1964, p. 11)

(日本科学技術情報センター提供)

音を使ったクリーニング

近年の科学および工業のもたらした最も用途の多い役に立つ装置は超音波装置である。超音波を使って、海の深さの測定、金属のひび割れの探知、液体の混合、はれ物の探知と散らす働き、生きている豚の脂肉量の測定などを行なうことができる。これらの用途からみても多くは専門的分野に利用されるが、ただひとつ一般産業に急速にとり入れられている用途がある。それは超音波によって金属その他固体のクリーニングが、迅速かつ有効に行なわれる特性を利用したものである。

微細なあわを含む液体に超音波を通すと固体と液体の接触面にあわのキャビテーションを起し、それがあぶらやよごれを除去する。この超音波の振動を起させるのは、多くのニッケル板をコイルで巻いた変換器によるものであり、これを使うと振動周波数は 20~30 kc になる。よごれを落したい目的物を液体の中に入れ、変換器から生じる振動の方向に置くと、顕微鏡の細部

にわたるまできれいになる。従来の洗浄方法に比べれば、2 倍の速さで 30 倍の効果をもたらすので多方面から利用されるようになった。

しかし、洗浄が変換器の前方でのみ可能な点から目的物を移動するベルトあるいは可動変換器が必要となってくるが、いずれもばく大な費用がかかる。この点で利用分野もしだいに限られ、だれも彼もがこの装置にとびつく時代は過ぎた。現在のおもな利用者は、精密な装置、高級な仕上、めっきされた製品などの製造業者である。また、装置も開発されて小さな発生装置や大きな洗浄そうが完成したのでかなり大きな物の洗浄も可能である。

ソ連では超音波を実用化するのは少し遅れ、アメリカの装置はイギリスとだいたい同じくらいで、ヨーロッパでは西ドイツがいちばん進んでいる。

(Times Rev. of Ind. & Technol., Vol. 1, No. 10,

1963, p. 32) (日本科学技術情報センター提供)