532.542.3:532.526

円管内助走区間の層流境界層*

菱 田 幹 雄**

Laminar Boundary Layer in the Entrance
Region of a Circular Pipe

by Mikio HISHIDA

Boundary layer in the entrance region of a circular pipe is calculated using the Kármán-Pohlhausen method. Velocity distribution in the boundary layer is approximated by a quartic. The coefficients of the quartic are the function of the K , which is a function of the acceleration of the core flow. The momentum equation is integrated approximately, and the results are represented by the polynomials. The results are compared with the values which are calculated by other's theoretical solutions, and also with those from the Nikuradse's experiment.

1. ま え が き

円管内の層流助走区間の問題は古くはBoussinesq⁽¹⁾が扱って、入口より離れた位置での近似解を求めている。Schiller⁽²⁾は境界層内の速度分布を簡単な二次式で仮定して助走区間の境界層を解いた。Atkinson と Goldstein⁽³⁾は級数によって運動方程式の解を求めて、Boussinesq の解を発展させたものとの接続を試みているが、不十分な精度の解にとどまっている。Langhaar⁽⁴⁾は助走区間では加速度が軸方向の速度に比例すると仮定して、Navier-Stokes の式を簡単にして近似解を求め、植松・八田および中村⁽⁵⁾は変分法を用いて解いている。Shapiro, Siegel および Kline⁽⁶⁾は境界層内速度分布を、入口では四次式が影響し、助走区間の後方では二次式の影響が強い形にして解き、また管入口付近で測定を行なっているが、その結果は非常に入口に近い所を除いて Schiller の解より良好といえない。Campbell と Slatery⁽⁷⁾は境界層内速度分布は二次式と仮定して、管断面を通過するエネルギーの式より境界層厚さを求める新しい手法で解を得ている。

以上の解にはいずれも欠点があるが、筆者は円管内の比較的入口に近い所の速度分布を精度よく求めることに主眼を置いて、これを境界層の問題として扱った。境界層内速度分布は四次式と仮定して境界条件ができる限り厳密に満たされるようにした。境界層外の管の中心部分が加速されて生ずる速度こう配が、境界

層内速度分布の形に与える影響は考慮されている。その結果はすべて簡単な多項式で近似的に表わされ、速度、圧力の計算結果を他の解と比較したが良好な結果が得られた。本解法では境界層が管の中心で合致する位置で断面上の速度分布は放物線上に至らず、助走区間は終了していない。この位置より後方の解は別の方法により求めなければならない。

2. 記 号

- p : 管内圧力
- p_0 : 円管入口の圧力
- r_0 : 円管の内半径
- u : 速度の x 方向の成分
- u_0 : 円管入口の流入速度
- u_1 : 境界層外の管の中心部の速度
- v : 速度の y 方向の成分
- x : 円管入口より軸方向への座標
- y : 管壁より半径方向への座標
- δ : 境界層厚さ
- μ : 粘性係数
- ν : 動粘性係数
- ρ : 密度
- τ_0 : 管壁におけるせん断応力

無次元数

 K : (17) 式 $R_{e0} = 2r_0u_0/\nu$ $R_{ex} = xu_0/\nu$ δ^* : 円管内境界層の排除厚さ (5) 式 $\varepsilon = \delta/r_0$

* 昭和 38 年 6 月 28 日 関西支部第 212 回講演会において講演、原稿受付 昭和 38 年 7 月 29 日。

** 正員、新潟大学工学部 (長岡市学校町)。

$$\eta = y/\delta$$

θ : 円管内境界層の運動量厚さ (6) 式

A : (18) 式

$$\xi = (x/r_0)(2/R_{e0})$$

$$p' = \frac{p}{\rho u_0^2/2}, \quad p_0' = \frac{p_0}{\rho u_0^2/2}, \quad \tau_0' = \frac{\tau_0}{\rho u_0^2/2}$$

3. 運動量方程式

非圧縮性の流体が一樣な速度 u_0 で流入する円管内の境界層を考える。境界層厚さは管の入口で零であるが、しだいに発達してついに管の中心で合致して $\delta = r_0$ になる。その間の座標および流体速度を第1図のように定める。

境界層の運動方程式は次式のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{1}{r_0 - y} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (r_0 - y) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r_0 - y} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (r_0 - y) v \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

境界層外の管中心部では、 $p + \rho u_1^2/2 = p_0 + \rho u_0^2/2$ であるから、圧力こう配は

$$-\frac{dp}{dx} = \rho u_1 \frac{du_1}{dx} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(2) 式を積分すると

$$(r_0 - y)v = -\int_0^y (r_0 - y) \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

を得る。この式と (3) 式を (1) 式に入れて、 y について 0 より δ まで積分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta (r_0 - y) u (u_1 - u) dy \\ + \frac{du_1}{dx} \int_0^\delta (r_0 - y) (u_1 - u) dy = \nu r_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

を得る。この式が円管内境界層の運動量方程式である。

円管内境界層の排除厚さ δ^* と運動量厚さ θ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (r_0 - y) (u_1 - u) dy &= \int_0^{\delta^*} (r_0 - y) u_1 dy \\ &= u_1 (r_0 - \delta^*/2) \delta^* \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

第 1 図

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (r_0 - y) u (u_1 - u) dy &= \int_0^\delta (r_0 - y) u_1^2 dy \\ &= u_1^2 (r_0 - \theta/2) \theta \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

x, y, δ を次のように無次元化する。

$$\xi = \frac{x}{r_0} \frac{2}{R_{e0}} = \frac{\nu x}{r_0^2 u_0}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{r_0}$$

これらの関係を用いて (4) 式より次の無次元運動量方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} \frac{d}{d\xi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\theta}{r_0} \right) \frac{\theta}{r_0} \right\} + \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\theta}{r_0} \right) \frac{\theta}{r_0} \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^*}{r_0} \right) \frac{\delta^*}{r_0} \right\} \frac{d(u_1/u_0)}{d\xi} = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial(u/u_1)}{\partial \eta} \right\}_{\eta=0} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

4. 境界層内速度分布式

境界層内の速度を四次式

$$u/u_1 = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表わすことにする。

境界条件は

$y=0, \eta=0$ において

$$u=0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$y=\delta, \eta=1$ において

$$u=u_1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(u/u_1)}{\partial \eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

運動方程式 (1) と (9) 式より

$$\frac{\nu}{r_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ (r_0 - y) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \right]_{y=0} = -u_1 \frac{du_1}{dx} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(1) 式と (11) 式より

$$\left[\frac{1}{r_0 - y} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (r_0 - y) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \right]_{y=\delta} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

(10), (11), (12), (13) 式より係数 a, b, c, d を定めると、速度分布式 (8) は次のようになる。

$$u/u_1 = F(\eta) + KG(\eta) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで

$$F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$G(\eta) = (1/6)(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$K = \frac{A - 2\varepsilon}{1 + \varepsilon/6} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$A = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_1}{dx} = \varepsilon^2 \frac{d(u_1/u_0)}{d\xi} \quad \dots\dots\dots (18)$$

K は結局 ε だけの関数として表わされる。

管内の連続の条件より

$$u_0 r_0^2 = \int_0^{r_0} 2(r_0 - y) u dy = u_1 (r_0 - \delta^*)^2$$

の関係がある。したがって

$$\frac{u_1}{u_0} = \left(\frac{1}{1 - \delta^*/r_0} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

管内を流体が進むにつれて境界層は厚くなり、中心部の流体は加速されて中心部速度 u_1 が大きくなる。(19) 式により中心部速度 u_1 を排除厚さ δ^* の関数として表わすことができる。

5. 運動量方程式の解

5.1 第一次近似解 運動量方程式を解いて境界層厚さ δ を求めるのに、まず第一次近似として、境界層内速度分布の形が中心速度の変化に影響されない場合、すなわち $K=0$ で

$$u/u_1 = F(\eta) \quad \dots\dots\dots(20)$$

としたときの解を求める。(20) 式は一樣な流れの中に流れと平行に置かれた平板の境界層内速度分布と同じ形である。

$$(0.11746\epsilon + 0.29915\epsilon^2 + 0.21924\epsilon^3 - 0.10950\epsilon^4) \frac{d\epsilon}{d\xi} = 2$$

境界条件 $\xi=0$ で $\epsilon=0$ を用いて積分すると

$$\epsilon^2(0.02937 + 0.04986\epsilon + 0.02741\epsilon^2 - 0.01095\epsilon^3) = \xi \quad \dots\dots\dots(24)$$

となり、境界層厚さを求める式を得る。

K は (17), (18), (23), (24) の諸式より ϵ の関数として表わされるが、数値計算の結果を次のように近似式で表わすことにする。

$$K = 6.701\epsilon - 8.348\epsilon^2 + 3.742\epsilon^3 \quad \dots\dots\dots(25)$$

5.2 第二次近似解 次に速度分布式に (14) 式を用い、境界層内速度分布の形が流体の中心部の加速の影響を受ける場合の運動量方程式の解を求める。第一次近似で得た (25) 式の K を用いて速度式を次のように定める。

$$u/u_1 = F(\eta) + (6.701\epsilon - 8.348\epsilon^2 + 3.742\epsilon^3)G(\eta) \quad \dots\dots\dots(26)$$

排除厚さおよび運動量厚さは (5), (6) 式に (26) 式を入れると次式のようにになる。

$$\frac{\delta^*}{r_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^*}{r_0}\right) = \left(\frac{3}{10}\epsilon - \frac{1}{15}\epsilon^2\right) - \left(\frac{1}{120}\epsilon - \frac{1}{360}\epsilon^2\right)K(\epsilon) \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{r_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\theta}{r_0}\right) &= \frac{37}{315}\epsilon - \frac{5}{126}\epsilon^2 - \left(\frac{1}{945}\epsilon - \frac{1}{945}\epsilon^2\right)K(\epsilon) - \left(\frac{1}{9072}\epsilon - \frac{1}{30240}\epsilon^2\right)K^2(\epsilon) \\ &= \left(\frac{37}{315}\epsilon - \frac{5}{126}\epsilon^2\right) - \left(\frac{1}{945}\epsilon - \frac{1}{945}\epsilon^2\right)K \quad \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

(27) 式の δ^*/r_0 を (19) 式に入れて中心速度を計算すると、0.1% 程度の誤差を許せば ϵ の二次式として次のように近似できる。

$$u_1/u_0 = 1 + 0.5717\epsilon + 0.2248\epsilon^2 \quad \dots\dots\dots(29)$$

運動量方程式 (7) へ (26), (27), (28) の諸式を入れ、(7) 式左辺の K は第一近似で得た (25) 式でおきかえて整理すると

$$(0.7048\epsilon + 1.2223\epsilon^2 + 0.6559\epsilon^3 - 0.3028\epsilon^4 - 0.0162\epsilon^5 - 0.1444\epsilon^6 + 0.0505\epsilon^7 + 0.0127\epsilon^8) d\epsilon/d\xi = 12$$

境界条件 $\xi=0$ で $\epsilon=0$ を用いて積分した結果

$$0.02937\epsilon^2(1 + 1.1562\epsilon + 0.4653\epsilon^2 - 0.1719\epsilon^3 - 0.0077\epsilon^4 - 0.0586\epsilon^5 + 0.0179\epsilon^6 + 0.0040\epsilon^7) = \xi \quad \dots\dots(30)$$

となり、境界層厚さの第二近似式を得る。

K は数値計算の結果を次のように三次式で近似的に表わす。

$$K = 7.253\epsilon - 7.553\epsilon^2 + 3.398\epsilon^3 \quad \dots\dots\dots(31)$$

5.3 第三次近似解 以上の第二次近似解の K , (31) 式を用いて、第二次近似解と同様にして次の第三次近似解が求められる。

中心速度の計算結果を入口付近を特に精密に近似して次の四次式で表わす。

$$u_1/u_0 = 1 + 0.6004\epsilon + 0.0925\epsilon^2 + 0.1424\epsilon^3 - 0.0740\epsilon^4 \quad \dots\dots\dots(32)$$

排除厚さ (5) 式および運動量厚さ (6) 式に (20) 式の速度分布式を入れると

$$\frac{\delta^*}{r_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^*}{r_0}\right) = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{15}\epsilon\right)\epsilon \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\frac{\theta}{r_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\theta}{r_0}\right) = \left(\frac{37}{315} - \frac{5}{126}\epsilon\right)\epsilon \quad \dots\dots\dots(22)$$

となる。(19), (21) 式より u_1/u_0 は ϵ の関数として表わされる。この計算結果より近似的に u_1/u_0 を ϵ の二次式として次のように表わすことにする。

$$u_1/u_0 = 1 + 0.5802\epsilon + 0.2948\epsilon^2 \quad \dots\dots\dots(23)$$

u_1/u_0 をこのように近似したために生ずる誤差は 0.1% 以内である。(20), (21), (22), (23) の諸式を運動量方程式 (7) に入れると、 ϵ と ξ の関係について次の式を得る。

運動量方程式より

$$(0.7048\epsilon + 1.2989\epsilon^2 - 0.0876\epsilon^3 + 1.0157\epsilon^4 - 1.2764\epsilon^5 + 0.4847\epsilon^6 - 0.2896\epsilon^7 + 0.1370\epsilon^8 - 0.0030\epsilon^9 - 0.0062\epsilon^{10})d\epsilon/d\xi = 12 \quad \dots\dots(33)$$

境界条件 $\xi=0$ で $\epsilon=0$ を用いて積分して

$$0.02937\epsilon^2(1 + 1.2287\epsilon - 0.0621\epsilon^2 + 0.5765\epsilon^3 - 0.6037\epsilon^4 + 0.1965\epsilon^5 - 0.1027\epsilon^6 + 0.0432\epsilon^7 - 0.0008\epsilon^8 - 0.0016\epsilon^9) = \xi \quad \dots\dots(34)$$

K の計算結果を入口付近で精度をよくして次の五次式で近似的に表わす.

$$K = 8.124\epsilon - 14.850\epsilon^2 + 22.107\epsilon^3 - 19.489\epsilon^4 + 7.160\epsilon^5 \quad \dots\dots(35)$$

(35)式の近似式を用いたための誤差は $\epsilon=0.9$ 付近で約 1%, その他の所で 0.5% 以下で, ϵ の小さい所は精度が高い. 諸計算に与える K の影響はあまり大きくないため, (35)式で十分な精度の結果が得られる. u_1/u_0 と K の第一, 第二, 第三次近似計算の結果を第 2 図に示した.

K の第三次近似式(35)式を用いて第四次近似解を求めることができる. 第三次近似解の出発点の K の第二次近似式(31)式と K の第三次近似式(35)式との差は 2% 程度である. 第二次, 第三次の近似解の精度の進み方から, 第四次近似解を求めても ϵ の精度の向上は 0.1% 以下であることが推測される. 平板で境界層厚さを運動量方程式より求めた解では, 境界層の運動方程式の厳密解に比較して最大で 2% の誤差があることから推測して, ここでは第三次近似解でとどめても十分である.

境界層厚さ ϵ の計算結果を第 3 図に示した. 同図で Schiller⁽²⁾, Shapiro-Siegel⁽⁶⁾ の四次式, Campbell-Slattery⁽⁷⁾ による境界層厚さの計算結果を併記して比較した. Schiller と Campbell-Slattery は境界層内速度分布をいずれも, $u/u_1 = 2\eta - \eta^2$ としたが, 境界層厚さにはかなりの差を生じている. Shapiro-Siegel は $u/u_1 = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)(1-\epsilon) + (2\eta - \eta^2)\epsilon$ において解いているが, その結果は Schiller の結果とあまり変わらない. 本解法では境界層が中心で合致するところ, すなわち $\epsilon=1$ で ξ の値は 0.06677 である. $\epsilon=1$ における ξ の値は Schiller の解で 0.1151, Shapiro-Siegel の解で 0.1184 である.

$r_0 = \infty$ では $\epsilon=0$, かつ $u_1 = u_0$ で一定となり, (34) 式より

$$\delta = 5.835(\nu x/u_0)^{1/2} \quad \dots\dots(36)$$

を得る. これは速度 u_0 の流れに平行に置いた平板で, 境界層内速度を四次式で置いた場合の境界層厚さの解に一致する.

$y/r_0 = \epsilon\eta$, $u/u_0 = (u_1/u_0)(u/u_1)$ より u/u_0 と y/r_0 の関係を ϵ をパラメータとして求めることができる.

6. 速度分布の計算値

u/u_0 と ξ の関係を, y/r_0 をパラメータとして第 4 図で表わした. なお植松・

第 2 図

第 3 図

第 4 図

八田・中村の変分法による解と, Shapiro-Siegel の解による計算値, および Nikuradse⁽⁸⁾の測定値も併記して比較した。植松・八田・中村の解による値は本解法による値とだいたい合っているが, 管の入口近くと中心付近で差が大きくなっている。Shapiro-Siegel の解と本解法の結果では管壁に近い所で 5% 程度の差が認められる。Nikuradse の測定値は本解法や他の計算値とだいたい合っているが, ξ の小さい所ではあまり合っていない。円管の半径が大きくなると入口付近, すなわち ξ の小さい所では境界層は平板の境界層に漸近すると考えられる。すでに述べたように本解法の結

果は ξ の小さい所で平板の境界層に漸近している。したがって入口付近で Nikuradse の測定値が本解法の結果と大きな差を生じているのは, 測定値が不合理ではないかと思われる。

第 5 図は $\xi=0.02$ と, 境界層が中心で一致する $\xi=0.06677$ の位置における, 軸に直角な断面上の速度分布である。 $\xi=0.06677$ における中心速度 $u_1/u_0=1.761$ である。十分に長い管内の放物線状速度分布では $u_1/u_0=2$ であるから, 境界層が中心で合致しても助走区間は終っていない。速度分布は管壁に近い所から放物線状速度分布に近づき, 中心付近の速度の発達が最も遅れる。層流助走区間の長さは $\xi=0.26^{(8)}$ の程度であり, $\xi=0.06677$ より後は他の解により計算されなければならない。第 5 図に Schiller, 植松, Shapiro, Campbell らの解による計算値も示して比較した。管壁付近では図の曲線では判別しがたいが, それぞれ 2~5% 程度の差がある。 ξ の大きい位置では中心付近でかなり差を生じている。Shapiro-Siegel の四次式による解は Schiller の解とよく似た結果になっている。本解法による値は境界層の外縁付近で差を生じている。

第 6 図に中心速度 u_1/u_0 と ξ の関係を示した。入口付近では Nikuradse の測定値はいずれの計算値とも離れている。本解法や Schiller, Shapiro らの境界層による解の計算値は, Langhaar, 植松らの他の解法による計算結果と少し違った傾向を示している。境界層による解は近似理論であるが, 境界層外の管の中心付近の半径方向の速度こう配は非常に小さいために, 管中心部ではベルヌーイの定理が相当精密に成立する。中心速度より求めた圧力は, 後で述べるように他の解による計算値とだいたい合っているから, 境界層の手法により求めた中心速度もまた妥当な値であると思われる。しかし境界層内速度分布が境界条件を十分に満足していない解では, 境界層の厚い所では中心速度, 圧力ともに信頼性が薄くなる。 $\xi<0.06677$ の範囲では本解法による値を用い, それより後では Langhaar, 植松らによる計算値を用いるのが妥当と思われる。

7. 圧力およびせん断応力

円管入口の圧力を p_0 として

$$p' = \frac{p}{\rho u_0^2/2},$$

$$p_0' = \frac{p_0}{\rho u_0^2/2}$$

とすると

第 5 図

第 6 図

$$p_0' - p' = (u_1/u_0)^2 - 1 = (1 + 0.6004\epsilon + 0.0925\epsilon^2 + 0.1424\epsilon^3 - 0.0740\epsilon^4)^2 - 1 \quad (37)$$

(37) 式による $p_0' - p'$ の計算値を他の解による計算結果とともに、第6図に表わして比較した。本解法による値は、 ξ の大きい所でも Langhaar, 植松らの解とよく合っていて信頼できるようである。

圧力こう配は

$$-\frac{dp'}{d\xi} = (1.2008 + 0.3700\epsilon + 0.8544\epsilon^2 - 0.5920\epsilon^3) \frac{u_1}{u_0} \frac{1}{d\xi/d\epsilon} \quad (38)$$

と、(33) 式より求められる。

管壁におけるせん断応力 τ_0 を無次元化して $\tau_0' = \tau_0/(\rho u_0^2/2)$ とおく。

$\tau_0 = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$ と (14) 式より

第 7 図

第 8 図

第 9 図

$$\tau_0' = \frac{4}{Re_0} \frac{u_1}{u_0} \frac{1}{\epsilon} \left(2 + \frac{K}{6} \right) \quad (39)$$

第7図は $-dp'/d\xi$ および $Re_0 \tau_0'$ と ξ の関係を表わした図である。十分に長い管内では $-dp'/d\xi$, $Re_0 \tau_0'$ の値はいずれも16である。 $\epsilon=1$, $\xi=0.06677$ における値は $-dp'/d\xi = 19.59$, $Re_0 \tau_0' = 17.67$ であり、圧力こう配、せん断応力はともに助走区間が終るまでの間ゆるやかに減少を続ける。第7図の破線は管入口における Kline-Shapiro⁽⁶⁾ の測定値を示し、計算値とよく合っている。

$-dp'/d\xi$, $Re_0 \tau_0'$ は $\xi=0$ で $\xi^{-1/2}$ に比例していて、 $-\xi^{1/2} dp'/d\xi$, $Re_x^{1/2} \tau_0'$ の値は $\xi=0$ で一定値になる。 $-dp'/d\xi$, τ_0' を調べるためには $-\xi^{1/2} dp'/d\xi$, $Re_x^{1/2} \tau_0'$ のほうが便利である。ここで $Re_x = u_0 x/\nu$ であり、 $Re_x^{1/2} \tau_0' = (1/2)\xi^{1/2}(Re_0 \tau_0')$ の関係がある。平板では $Re_x^{1/2} \tau_0'$ は x に無関係な一定値となり円管内の $\xi=0$ における $Re_x^{1/2} \tau_0'$ の値と一致する。本解法、植松, Schiller, Campbell らの解による $-\xi^{1/2} dp'/d\xi$ の値を第8図で比較した。本解法による値は植松, Campbell らの解の中間にあり、Schiller の解による値とよく似ている。 $-\xi^{1/2} dp'/d\xi$ の値が入口付近で一度減少しているのは、 $\xi^{-1/2}(p_0' - p')$ の曲線について Shapiro⁽⁶⁾らが述べているのと同じ理由によるものである。すなわち、円管内の境界層の発達、平板の境界層の発達よりも遅れ、かつ境界層内速度分布が平板上の境界層の速度分布よりも平坦に近い、軸方向の運動量の変化が平板境界層よりも小さいことによるものである。第9図は $Re_x^{1/2} \tau_0'$ の軸方向の変化を示したものである。本解法の境界層内速度分布は、 $\eta=0$ における境界条件を他の解よりも厳密に満たしているから、 τ_0' についての信頼度は高い。Campbell-Slattery の解による値は、本解法による値と入口付近を除いてよく一致している。Shapiro-Siegel の解による値は、本解法や Schiller の解と合っていない。

$\xi=0$ における $-\xi^{1/2} dp'/d\xi$ と $Re_x^{1/2} \tau_0'$ の値を、

第 1 表

解 の 種 類	$\xi=0$ における値	
	$-\xi^{1/2}dp'/d\xi$	$Re_x^{1/2}\tau_0'$
本 解 法	3.504	0.685
Schiller	3.652	0.730
Shapiro-Siegel	四 次 式	3.51
	実 験 値	3.44
Campbell-Slaterry	3.904	0.586
平 面 板 境 界 層	厳 密 解	—
	四 次 式	—

境界層による解について求めた結果を第 1 表に示した。

8. 結 言

(1) 円管内助走区間の層流境界層を Kármán-Pohlhausen の方法により解いた。境界層内速度分布は四次式として境界条件をできるだけ厳密に満たすようにして、中心部の加速が速度分布の形におよぼす影響を考慮した。

(2) 運動量方程式は逐次近似法により第三次近似解まで求めて境界層厚さを得た。さらに高次の近似を進めても、予想される境界層厚さの精度の向上は第三近似解による値の 0.1% 以内である。

(3) 本解法の結果では $\xi=0.06677$ で境界層が中心軸上で合致する。この位置で断面上の速度分布は発達しきらず助走区間は継続する。これより後は他の解

法によらねばならない。

(4) 入口における本解の結果は速度分布を四次式とした平面板の境界層の解に漸近している。

(5) Schiller の解の速度分布は簡単な仮定にもかかわらず、本解法によるものとだいたい合っている。Shapiro-Siegel-Kline の解の結果は Schiller の解の結果とあまり変らない。本解法による速度分布は他の解によるものと比較して、境界層の外縁付近および入口より離れた位置の中心における速度に差が認められる。

(6) 圧力分布は境界層の薄い所では本解法の結果は十分に信頼できるが、境界層の厚い所でも、Langhaar, 植松の解の中間にあり信頼できる。

(7) $\xi < 0.06677$ の範囲では、本解法による結果は、速度、圧力ともに他の近似解による値よりもよい結果が得られた。

文 献

- (1) J. Boussinesq, *Comptes Rendus*, **113** (1891), 9, 49.
- (2) L. Schiller, *Z. AMM*, **2** (1922), 96.
- (3) S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, (1938), 304, Oxford University Press.
- (4) H.L. Langhaar, *J. Appl. Mech.*, **9** (1942), A-55.
- (5) 植松・ほか 2 名, 機械学会論文集, **21-105** (昭 30), 321.
- (6) A.H. Shapiro & others, *Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1954), 733, ASME.
- (7) W.D. Campbell & J.C. Slaterry, *Trans. ASME, Ser. D*, **85-1** (1963), 41.
- (8) Prandtl-Tietjens, *Hydro- und Aeromechanik*, **2** (1931), 28, Julius Springer.

30 卷 213 号 (昭 39-5) 正誤表

執 筆 者 名	ページ	欄	行	誤	正
葛 原 定 郎	596	左	13~14	川砂をふるい分けしたもの…	砂れきをふるい分けしたもの…
	598	左	11	川砂の沈降速度	砂れきの沈降速度
鳥 居 脩	602		(2) 式	$\frac{Q_s}{120U_a\delta_s b_s}$	$\frac{Q_s}{120U_a\delta_s b_s}$
	602	右	8	羽根車内室どう部分	羽根車内空どう部分
赤 木 新 介	627	(18)式 (19)式		$\int_0^\eta e^{-3Pr_0} \int_0^\infty F(\eta) d\eta d\eta$	$\int_0^\infty e^{-3Pr_0} \int_0^\eta F(\eta) d\eta d\eta$
	632	第 11 図	一番上の 曲線	$P_{r0}=1000$	$P_{r0}=10000$