539.383 : 624.043.7

1 円孔を有する半無限板の接触問題*

(第2報, 接触縁の摩擦を無視した場合)

玉 手

統**

On a Contact Problem of an Elastic Half-Plane
with a Circular Hole

(2nd Report, The Case of Frictionless Contact)

by Osamu TAMATE

An analytical solution is presented for the stresses produced by the indentation of the straight boundary of a semi-infinite elastic plate with a circular hole by a flat-ended rigid stamp. It is supposed that the stamp is placed on the segment of the straight boundary, just above the hole, and pressed into the plate by a given force, perpendicular to the boundary, and that the coefficient of friction between the stamp and the plate is zero.

The complex potentials, which have poles at the center of the hole and disturb the boundary conditions neither along the straight edge nor at the infinity, are added to the solution of the contact problem of a half-plane without hole and the parametric coefficients included in the complex potentials are then determined, so that the conditions at the rim of the hole may be satisfied. Numerical results obtained are shown in graphs and compared with those available.

1. 緒 言

1 円孔を有する半無限板に対する二次元弾性混合境界値問題の一例として, 前報⁽¹⁾において円孔直上の直線縁に有限幅平面底剛体を押付ける場合を取上げて解析を行なったが, このときには, 剛体底と直線縁の接触部における摩擦が十分大きく, 相対すべりが全くないものと考えていた.

本報告では, 同種の問題において剛体底と直線縁の接触部における相対すべりが全く自由である場合について解析を行なう. 解の誘導にあたっては, まず円孔中心に極を持ち, 直線縁および無限遠の与条件を乱さない補助の複素応力関数群を導いて, 穴のない半無限板の接触問題の解⁽²⁾に重ね合わせる. 得られた応力関数が, 直線縁および無限遠において与えられた条件を満たしていることは明らかである. ついで, 円孔縁が自由縁である条件を満たすように, 補助応力関数に含まれる未知係数を決定する関係式を求めた. 補助の複素応力関数群の誘導は結局は Hilbert 問題⁽³⁾を解くことに帰せられ, 接触端における応力の特異性を表わすのに便利な関数表示を比較的容易に導くことができる.

ここでは, 上記方針に従って若干の数値計算を行な

い, 板内主要部における応力分布を明らかにし, また前報の結果と対比して, 接触縁における相対すべりの有無の影響について検討を試みた.

2. 基 礎 式

均質, 等方弾性半無限板は $z = x + iy$ 面の下半面 S^- を占め, その内部に中心 $O_1(0, -ib)$, 半径 $a(<b)$ なる円孔があるものとする. 上半面を S^+ , 実軸を L で表わすものとする (第1図).

第 1 図

* 昭和 39 年 4 月 1 日 第 41 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 39 年 6 月 22 日.

** 正員, 東北大学工学部 (仙台市桜小路),

直角座標系で表わした応力成分を $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; 変位成分を u_x, u_y とすれば, 物体力が働かないときには, これら成分は複素応力関数 $\Phi(z) = \varphi'(z), \Psi(z) = \psi'(z)$ によって次のように与えられる⁽²⁾.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})], \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + z\Phi'(z) + \bar{z}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \dots (1) \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa\varphi(z) - z\varphi'(z) - \bar{\psi}(\bar{z}) \end{aligned} \right\}$$

ここに μ : 横弾性係数

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu, & (\text{平面ひずみ}) \\ (3-\nu)/(1+\nu), & (\text{一般化平面応力}) \end{cases} \dots (2)$$

ただし ν : ポアソン比.

$\Phi(z)$ の定義領域を次のように上半面 S^+ に拡張する.

$$\Phi(z) = -\bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z}), \quad (z \in S^+) \dots (3)$$

この定義に従えば上下両半面の $\Phi(z)$ は実軸上の自由縁を介して相互に解析接続されることは容易に示される. (3) 式から直ちに

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (z \in S^-) \dots (4)$$

(4) 式の $\Psi(z)$ を (1) 式に代入すれば, 応力成分を関数 $\Phi(z)$ のみにより表わすことができる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})], \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) - \bar{\Phi}(\bar{z}) + (z-\bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

また, (1) 式から変位成分も $\Phi(z)$ のみによって与えられる.

$$2\mu(u_x' + iu_y') = \kappa\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - (z-\bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}) \dots (6)$$

ここに $u_x' = \partial u_x / \partial x, \quad u_y' = \partial u_y / \partial x$

座標軸の平行移動 $z_1 = z + ib$ に対する複素応力関数の変換式は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \Phi(z_1 - ib), \\ \Psi_1(z_1) &= \Psi(z_1 - ib) + ib\Phi'(z_1 - ib) \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

$$\Phi^{(1)}(z) = \frac{iP}{2\pi} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} i^{n-1} \frac{d_n}{c} \left[\frac{1}{(z+ib)^n} + \frac{(-1)^n}{(z-ib)^n} \right] + \frac{1}{X(z)} \sum_{n=1}^{\infty} i^n e_n \left[\frac{1}{(z+ib)^n} + \frac{(-1)^n}{(z-ib)^n} \right] \right\} \dots (13)$$

ただし d_n, e_n : 未知実定数, $c = \sqrt{b^2 + l^2}$.

さて, 所要の応力関数を

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi^{(0)}(z) + \Phi^{(1)}(z) = \frac{iP}{2\pi} \left\{ \frac{1}{X(z)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n e_n \left(\frac{1}{(z+ib)^n} + \frac{(-1)^n}{(z-ib)^n} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} i^{n-1} \frac{d_n}{c} \left[\frac{1}{(z+ib)^n} + \frac{(-1)^n}{(z-ib)^n} \right] \right\}, \\ \Psi(z) &= -\Phi(z) - \bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (z \in S^-) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

とおけば, 明らかに直線縁および無限遠の与条件をすべて満たしている. したがって, 上記応力関数に対応する変位が板内で 1 価であり, また円孔縁が自由縁である条件を満足するように, 未知係数 d_n, e_n を決定すれば, 問題は解決されたことになる.

円孔縁の条件を考えるため, 補助座標として円孔中心 O_1 原点の座標 $z_1 = z + ib$ をとり, (7) 式を用いて (14) 式の $\Phi(z), \Psi(z)$ を z_1 で表わし, さらに $|z_1| < b$ の範囲で z_1 のべき級数に展開する.

3. 解 の 誘 導

前述の半無限板の円孔直上の直線縁の $-l < x < l$ の部分 L' に平面底剛体を P なる力で押付けたとき, 半無限板内に生じる応力を求めよう. ただし, 接触縁 L' 上では剛体底と半無限板との相対すべりは全く自由であり, また接触部以上の直線縁 $L'' (|x| > l)$ および円孔縁には外力は働いていないものとする.

穴のない半無限板に対する上記接触問題の解⁽²⁾は次式で与えられる.

$$\Phi^{(0)}(z) = iP/2\pi \sqrt{z^2 - l^2} \dots (8)$$

ただし, $X(z) = \sqrt{z^2 - l^2}$ としては, L' に沿って切断をいれた Riemann 面上で $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} X(z) = 1$ なる分枝をとるものとする. L' 上で $X^+(t) + X^-(t) = 0$, L'' 上で $X^+(t) - X^-(t) = 0$ が成立する. ただし, $X^+(t), X^-(t)$ はそれぞれ z が S^+ または S^- から L 上の点 t に近づいたときの $X(z)$ の境界値を表わすものとする. $\Phi^{(0)}(z)$ は無限遠ならびに直線縁の与条件を満たすが, 円孔縁に応力を残すので, これを打消すために追加の応力関数 $\Phi^{(1)}(z)$ を導入する. $\Phi^{(1)}(z)$ は円孔中心に極を持ち, 直線縁および無限遠の条件を乱さないものでなければならない. したがって, $\Phi^{(1)}(z)$ に対する境界条件は次のように書くことができる.

$$(a) \quad L' \text{ 上で } \tau_{xy}^- = 0 \dots (9)$$

$$u_y^- = \text{一定} \dots (10)$$

$$(b) \quad L'' \text{ 上で } \sigma_y^- = \tau_{xy}^- = 0;$$

$$\Phi^{(1)-}(t) - \Phi^{(1)+}(t) = 0 \dots (11)$$

$$(c) \quad \text{無限遠 } |z| \rightarrow \infty \text{ で } \Phi^{(1)}(z) = 0(z^{-2}) \dots (12)$$

このような諸条件を満たす複素応力関数は容易に導くことができる (付録参照). ここでは問題の対称性を考慮して次のものを採用する.

.....(13)

展開の結果は

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= -(P/2\pi c) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} i^m [K_{-m} - (1 - \delta_{1,m}) d_m] z_1^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} i^m (p_m + K_m + L_m) z_1^m \right\}, \\ \Psi_1(z_1) &= -(P/2\pi c) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} i^m [M_{-m} - (m-2)(1 - \delta_{1,m}) d_m \right. \\ &\quad \left. + (m-1)2b(1 - \delta_{2,m}) d_{m-1}] z_1^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} i^m (q_m + M_m + N_m) z_1^m \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに $\delta_{m,n}$: Kronecker delta; p_m, q_m は次の漸化式から求められる定数である.

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= 1, \quad mp_m + [(2m-1)bp_{m-1}/c^2] + [(m-1)p_{m-2}/c^2] = 0, \\ q_m + 2(m+1)bp_{m+1} + mp_m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

また

$$\left. \begin{aligned} K_{-m} &= \sum_{n=m}^{\infty} k_{-mn} e_n, & K_m &= \sum_{n=1}^{\infty} k_{mn} e_n, & L_m &= \sum_{n=2}^{\infty} l_{mn} d_n, \\ M_{-m} &= \sum_{n=m-1}^{\infty} m_{-mn} e_n, & M_m &= \sum_{n=1}^{\infty} m_{mn} e_n, & N_m &= \sum_{n=2}^{\infty} n_{mn} d_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} k_{-mn} &= (-1)^{n-m} p_{n-m}, & k_{mn} &= (-1)^n p_{m+n} + \sum_{j=0}^m (-1)^{j+n+j-1} C_j (2b)^{-n-j} p_{m-j}, \\ l_{mn} &= (-1)^{m+1} m_{n-1} C_m (2b)^{-m-n}, \\ m_{-mn} &= -2(m-1)b\delta_{m-1,n} + (-1)^{n-m} [q_{n-m} + n(2bp_{n-m+1} + p_{n-m})] (1 - \delta_{m-1,n}), \\ m_{mn} &= (-1)^n [q_{m+n} + n(2bp_{m+n+1} + p_{m+n})] + \sum_{j=0}^m (-1)^{j+n+j-1} C_j (2b)^{-n-j} \\ &\quad [q_{m-j} + (j+n)(p_{m-j} + (2b)^{-1} p_{m-j-1})], & n_{mn} &= (n-2)l_{mn} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

(16) の最後の式から次の関係の成立することが容易に導かれる.

$$M_{-m} - mK_{-m} + 2(m-1)bK_{-m+1} = 0, \quad (m \geq 1) \dots\dots\dots (19)$$

また (15) 式の応力関数に対応する変位が板内で 1 価であるためには

$$\kappa K_{-1} - M_{-1} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

円孔縁 $z_1 = a\omega$ ($\omega = e^{i\theta}$) が自由縁である条件

$$\Phi_1(a\omega) + \bar{\Phi}_1(a\omega^{-1}) - \omega^2 [a\omega^{-1} \Phi_1'(a\omega) + \Psi_1(a\omega)] = 0 \dots\dots\dots (21)$$

に (15) 式を代入して, ω の同じべきの項を比較し, さらに (19), (20) 式を用いて整理すれば

$$\begin{aligned} 2K_{-m} &= (1 - \delta_{1,m}) [(-1)^{m+1} (m-2)(m-1)a^{2m} (p_m + K_m + L_m) \\ &\quad + (-1)^m (m-2)a^{2m-2} (q_{m-2} + M_{m-2} + N_{m-2}) + (-1)^{m+1} (m-2)(m-1)(2b)a^{2m-2} (p_{m-1} \\ &\quad + K_{m-1} + L_{m-1}) + (-1)^m (m-1)(2b)a^{2m-4} (q_{m-3} + M_{m-3} + N_{m-3}) (1 - \delta_{2,m}) \\ &\quad + (-1)^{m+1} [(m-2)^2 + 2\delta_{2,m}] a^{2m-2} (p_{m-2} + K_{m-2} + L_{m-2}) + (-1)^m (m-1)a^{2m-4} (q_{m-4} \\ &\quad + M_{m-4} + N_{m-4}) (1 - \delta_{2,m} - \delta_{3,m})], \quad (m=1, 2, \dots\dots) \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned} d_m &= K_{-m} + (-1)^{m+1} (m-1)a^{2m} (p_m + K_m + L_m) \\ &\quad + (-1)^m a^{2m-2} (q_{m-2} + M_{m-2} + N_{m-2}), \quad (m=2, 3, \dots\dots) \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

(17), (22) および (23) の諸式は未知係数 d_m, e_m を決定するための所要の式であり, b, l および a の値が与えられれば, 逐次法により解くことができる. すなわち

$$d_m = \sum_{p=0}^{\infty} d_m^{(p)}, \quad e_m = \sum_{p=0}^{\infty} e_m^{(p)} \dots\dots\dots (24)$$

とおき, また第 p 近似 $d_m^{(p)}, e_m^{(p)}$ を (17) 式に代入して得られる値を $K_m^{(p)}$ 等と記すことにすれば, $e_n^{(0)}$ は次の方程式を解いて得られる.

$$\begin{aligned} 2K_{-m}^{(0)} &= \sum_{n=m}^{\infty} 2k_{-mn} e_n^{(0)} = (1 - \delta_{1,m}) [(-1)^{m+1} (m-2)(m-1)a^{2m} p_m \\ &\quad + (-1)^m (m-2)a^{2m-2} q_{m-2} + (-1)^{m+1} (m-2)(m-1)2ba^{2m-2} p_{m-1} \\ &\quad + (-1)^m (m-1)2ba^{2m-4} q_{m-3} (1 - \delta_{2,m}) + (-1)^{m+1} \{(m-2)^2 + 2\delta_{2,m}\} a^{2m-2} p_{m-2} \\ &\quad + (-1)^m (m-1)a^{2m-4} q_{m-4} (1 - \delta_{2,m} - \delta_{3,m})], \quad (m=1, 2, \dots\dots) \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

次いで, $d_m^{(0)}$ は次式から求められる.

$$d_m^{(0)} = K_{-m}^{(0)} + (-1)^{m+1} (m-1)a^{2m} p_m + (-1)^m a^{2m-2} q_{m-2}, \quad (m=2, 3, \dots\dots) \dots\dots\dots (26)$$

また、第 p 近似 $d_m^{(p)}$, $e_m^{(p)}$ ($p \geq 1$) の値は (25), (26) 式の右辺の p_m , q_m の代りにそれぞれ $K_m^{(p-1)} + L_m^{(p-1)}$, $M_m^{(p-1)} + N_m^{(p-1)}$ を用い, $K_m^{(0)}$ の代りに $K_m^{(p)}$ を用いたものから算出すればよい. なお, 無限元連立一次方程式 (25) を解くには, まずはじめの k 個の未知数のみを含むはじめの k 個の式で打切って, 有限個の連立方程式に直す近似解法を採用しなければならないが, a が比較的小さいときには誤差はあまり大きくないと考えられる. また $m > n$ のとき $k_{-mn} = 0$ であるから, この方程式を解く手数はそれほど複雑ではない. なお上記解法は (24) 式の級数が収束する場合のみ妥当であるが, この点については, 次の数値例において例示することにする.

4. 数 値 例

上記解法に従って, 若干の数値計算を行なった. 計算の手順としては, 最初に漸化式 (16) を用いて b お

よび l の与えられた値に対する p_m , q_m の値を求め, 次いで (18) 式によって対応する k_{-mn} 等の値を計算する. これらの値を用い, 上述逐次法に従って, 各円孔半径 a に対する未知係数を決定した. (25) 式の連立方程式は $k=12$ までとった.

まず, 接触縁における相対すべりの有無の影響を検討するため, 前報と同じ諸元の板すなわち $b=1.0$, $l=0.5$; $a=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の場合について d_n , e_n の値を算出した. 逐次近似の収束性は良好であり, $a=0.4$ のとき第 7 近似以下を省略しても実用上さしつかえないことがわかった. a がより小さければ, 収束性はさらに良好である. これら係数値の表示は冗長になるので省く.

求めた係数値を用いれば, 半無限板内の応力は基礎式から計算することができる.

直線縁の接触部 L' 上では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^- &= -\frac{P}{2l} \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-(t/l)^2}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e_{2n} \frac{\cos 2n\phi}{\rho^{2n}} - e_{2n-1} \frac{\sin (2n-1)\phi}{\rho^{2n-1}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{8l}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[d_{2n} \frac{\cos 2n\phi}{\rho^{2n}} + d_{2n+1} \frac{\sin (2n+1)\phi}{\rho^{2n+1}} \right] \right\}, \\ \sigma_y^- &= -\frac{P}{2l} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-(t/l)^2}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e_{2n} \frac{\cos 2n\phi}{\rho^{2n}} - e_{2n-1} \frac{\sin (2n-1)\phi}{\rho^{2n-1}} \right) \right], \\ \tau_{xy}^- &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ここに $t+ib = \rho e^{i\phi}$. 第 2 図および第 3 図は接触縁上の σ_x および σ_y の分布を示したもので, 基準応力としては平均接触圧 $p = P/2l$ をとった. σ_x , σ_y とともに $[1-(t/l)^2]^{-1/2}$ の項を含むため, 接触端 $t = \pm l$ の近傍において著しく大きな値をとることは穴のない半無限板の場合と同様であるが, 接触圧分布の不均一性は円孔径の増加に伴って大きくなる. なお, 図中の点線は前報の結果すなわち接触部で相対すべりが完全に止められた場合に対応する, $\kappa=2$ の場合である. すべりが止められた場合と自由な場合とでは σ_x の値に相当な差があること, 接触部中央の σ_x の値に対する穴の大きさの影響が逆であること, 同じ形状の板の場合相対すべりが自由な場合のほうが接触圧の不均一性がわずかながら大きいこと等が認められる. なお, すべりが止められた場合には, 接触端にきわめて近い領域で応力は無限回符号を変えながら無限に大きくなり, すべりが自由な場合には単調に発散

第 2 図 接触縁の応力 σ_x

第 3 図 接触縁の垂直応力

することになる。しかし、このように大きなひずみこう配の所に微小変形理論を適用することは、必ずしも妥当とはいえないであろう。ただ、このような領域は接触端のごく近傍だけに局限されているので、それから離れた部分への影響はきわめて少ないと考えてよいであろう。

自由直線縁 L'' 上では、 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ であり、

$$\sigma_x = -\frac{P}{2l} \frac{8l}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[d_{2n} \frac{\cos 2n\phi}{\rho^{2n}} + d_{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\phi}{\rho^{2n+1}} \right] \dots\dots\dots (28)$$

第4図に自由直線縁上の σ_x/p の分布を示す。図中の点線は前報の結果であり、接触端の近くで大きな圧縮応力となっている。これに反し、すべりが自由な場合には、自由直線縁上の σ_x はおおむね引張応力であり、接触端においても有限値をとる。

円孔縁上では $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ であり、

$$\sigma_\theta = -\frac{P}{2l} \frac{4l}{\pi c} \left\{ (p_0 + K_0 + L_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [\{ K_{-n} - (1 - \delta_{1,n}) d_n \} a^{-n} + (-1)^n (p_n + K_n + L_n) a^n] \cos n\alpha \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ここに $\alpha = (\pi/2) - \theta$ 。第5図は $l/b = 0.5$ の場合、円孔縁上の σ_θ を角度 α に対して示したものである。点線および鎖線はそれぞれ接触部ですべりが止められている接触問題および直線縁上 L' の部分に等分布垂直荷重 $p = P/2l$ が作用している場合⁽⁴⁾の円孔縁上の σ_θ の分

第4図 自由直線縁の主応力

第6図 円孔縁の主応力

第5図 円孔縁の主応力

第7図 円孔縁の主応力

布を示したもので、いずれも $a/b=0.4$ の場合である。分布の傾向は 3 者ともよく似ているが、正の最大応力および負の最大応力の値には差が認められる。

次に、穴の位置の影響について若干の検討を行なうため、 $l/b=1.0$ および 2.0 の場合について同様の計算を行ない、円孔縁上の σ_θ の分布を求めた。これらの結果を第 6 図および第 7 図に示す。接触幅の比較的せまい $l/b=0.5$ の場合 (第 5 図) には、円孔縁上の σ_θ は対称軸 (y 軸) の近くでは引張応力、 x_1 軸の近傍では圧縮応力であり、また穴の径の増加に伴い x_1 軸付近の負の最大応力の生じる位置は漸次直線縁に近づく。これに反し、接触幅の比較的大きい $l/b=2.0$ の場合には、第 7 図に見られるように、円孔縁上いたるところ σ_θ は負であり、 x_1 軸近傍の負の最大応力の生じる位置は孔径の増大とともに直線縁から遠ざかる。また直線縁に近い円孔縁上の σ_θ は孔径が大になると複雑な分布を示す。中間の接触幅 $l/b=1.0$ の場合には、円孔縁における σ_θ の分布は上記 2 者の中間の傾

第 8 図 円孔縁上 A 点および B 点の応力

第 9 図 円孔縁上最大圧縮応力

向を持つことが第 6 図から認められよう。

円孔縁上直線縁に最も近い点 A ($\alpha=0$) および最も遠い点 B ($\alpha=\pi$) における σ_θ と円孔径との関係を第 8 図に示す。 $l/b=0.5$ の場合には A 点の σ_θ のほうが B 点の σ_θ より大であるが、 $l/b=1.0$ および 2.0 ではこの順序が逆になる。また $l/b=0.5$ のとき A 点の応力は $a/b=0.3$ 付近で最大となり、それ以上穴が大きくなるとわずかながら低下する。第 9 図には、円孔縁上 x_1 軸の近傍に生じる負の最大応力 σ_m と円孔径との関係を示した。 a/b 一定で接触幅を変えると、 $|\sigma_m|$ が極大となる接触幅があることがうかがわれる。これらの点をさらに明らかにするため、 $a/b \rightarrow 0$ の場合につき、穴の縁に生じる最大応力 σ_M および負の最大

第 10 図 円孔縁上最大応力と b/l の関係

第 11 図 円孔縁上最大圧縮応力と b/l の関係

応力 σ_m を b/l の種々の値について算出し、第 10 図および第 11 図に示した。図中の点線および鎖線は第 5 図におけると同様に、それぞれ接触部における相対すべりが零である接触問題および等分布垂直荷重が働く場合に対応する。接触縁ですべりが自由である場合には $a/b \rightarrow 0$ のとき b/l が 1 以下になると σ_m も負になること、 $b/l=1$ の近くで $|\sigma_m|$ が極大になることが認められる。 a/b が有限値の場合でも、あまり小さくしなければ類似の傾向を示すものと思われる。また、穴の位置が直線縁に接近すると、上記 3 種の荷重方式の間に顕著な差のあることが知れる。

最後にこの研究の遂行に当り、有益なご助言とご激励を賜った東北大学 樋口盛一名誉教授に感謝の意を表す。数値計算には杉浦勝男、山田哲義両助手の助力を得た。また数値計算の一部は東北大学計算センターにおいて行なったものであり、そのプログラム作製には杉浦勝男助手の協力を得たことを記し、謝意を表わす。

付録 円孔中心に極を持つ 補助応力関数の誘導

円孔中心 $O_1(z=-ib)$ に極を持ち、直線縁および無限遠において (9)~(12) の諸条件を満たす複素応力関数を誘導しよう。

(12) の条件から応力関数 $\Phi_1(z_1)$, $\Psi_1(z_1)$ としては $z_1=0$ ($z=-ib$) に 2 位以上の極を持つものだけを考えればよい。

まず、 $\Phi_1(z_1)=0$, $\Psi_1(z_1)=2A_n z_1^{-n-2}$ [$n=0, 1, \dots$];

$$^{(1)}\Phi^+(t)+^{(1)}\Phi^-(t)=2[\bar{A}_n(t-ib)^{-n-2}-A_n(t+ib)^{-n-2}] \dots\dots\dots(32)$$

$^{(1)}\Phi(z)$ は上記 Hilbert 問題の解として次式で与えられる。

$$^{(1)}\Phi(z)=[\bar{A}_n(z-ib)^{-n-2}-A_n(z+ib)^{-n-2}]-\sum_{j=0}^{n+1}\{[\bar{A}_n X^{(j)}(ib)(z-ib)^{-n-2+j}-A_n X^{(j)}(-ib)(z+ib)^{-n-2+j}]/j! X(z)\} \dots\dots\dots(34)$$

ただし $X^{(j)}(z)=d^j X(z)/dz^j$, $X^{(0)}(z)=X(z)$

結局、所要の応力関数は

$$\Phi_n(z)=^{(0)}\Phi(z)+^{(1)}\Phi(z)=-[\bar{A}_n(z-ib)^{-n-2}+A_n(z+ib)^{-n-2}]-\sum_{j=0}^{n+1}\{[\bar{A}_n X^{(j)}(ib)(z-ib)^{-n-2+j}-A_n X^{(j)}(-ib)(z+ib)^{-n-2+j}]/j! X(z)\} \dots\dots\dots(35)$$

全く同様の方法により、 $\Phi_1(z_1)=-2B_n z_1^{-n}$, $\Psi_1(z_1)=0$ ($n=2, 3, \dots$; B_n : 複素定数) に対応するものとして

$$\begin{aligned} * \Phi_n(z) &= -n[B_n(z+ib)^{-n}+\bar{B}_n(z-ib)^{-n}]+n(2ib)[B_n(z+ib)^{-n-1} \\ &\quad -\bar{B}_n(z-ib)^{-n-1}]+(n-2)\sum_{j=0}^{n+1}\{[B_n X^{(j)}(-ib)(z+ib)^{-n+j}-\bar{B}_n X^{(j)}(ib)(z-ib)^{-n+j}]/j! X(z)\} \\ &\quad -n(2ib)\sum_{j=0}^n\{[B_n X^{(j)}(-ib)(z+ib)^{-n-1+j}+\bar{B}_n X^{(j)}(ib)(z-ib)^{-n-1+j}]/j! X(z)\} \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

A_0 : 実定数, A_n ($n \geq 1$): 複素定数] に対応するものを求めよう。そのため、次の関数を考える。

$$^{(0)}\Phi(z)=-2\bar{A}_n(z-ib)^{-n-2}, (z \in S^+ + S^+) \dots\dots(30)$$

これが $z=-ib$ に所定の極を持ち、実軸上いたるところ自由縁の条件を満たす下半面 S^- に対する応力関数であることは容易に示される。(6) 式から

$$4\mu i u_y'^- = \kappa \Phi^-(t) + \Phi^+(t) - \kappa \bar{\Phi}^-(t) - \bar{\Phi}^-(t) \dots\dots(31)$$

が導かれるから、 L' 上で $^{(0)}\Phi(z)$ による (10) 式の条件のかく乱量は次式で与えられることとなる。

$$4\mu i u_y'^- = -2(1+\kappa)[\bar{A}_n(t-ib)^{-n-2} - A_n(t+ib)^{-n-2}] \dots\dots\dots(32)$$

これを打消すために $^{(1)}\Phi(z)$ を追加する。 $^{(1)}\Phi(z)$ は円孔中心においても正則な関数であり、(9), (11) の条件を満たし、無限遠で零でなければならない。(11) 式から直ちに $^{(1)}\Phi(z)$ は L' に沿って切断をいれた z 面で正則な関数であることがわかる。一方(5)式より第 2 式から

$$-i2\tau_{xy}^- = \Phi^-(t) + \bar{\Phi}^-(t) - \Phi^+(t) - \bar{\Phi}^+(t)$$

したがって、(9) 式の条件を考えれば、 L' 上で

$$^{(1)}\Phi^-(t) + ^{(1)}\bar{\Phi}^-(t) = ^{(1)}\Phi^+(t) + ^{(1)}\bar{\Phi}^+(t)$$

ゆえに $^{(1)}\Phi(z) + ^{(1)}\bar{\Phi}(z)$ は全平面で正則な関数すなわち定数である。無限遠で $^{(1)}\Phi(z)$ が零であるから、 z 面上いたるところで

$$^{(1)}\Phi(z) + ^{(1)}\bar{\Phi}(z) = 0$$

上式を (31) 式に代入すれば、 $^{(1)}\Phi(z)$ に対応する L' 上の $u_y'^-$ は

$$4\mu i u_y'^- = (1+\kappa)[^{(1)}\Phi^+(t) + ^{(1)}\Phi^-(t)]$$

したがって、 $^{(0)}\Phi(z)$ による (10) 式のかく乱量を $^{(1)}\Phi(z)$ が打消す条件式は

円孔中心に極を持ち, (9)~(12) の条件を満たす補助応力関数の一般形としては (35), (36) 式の線形結合をとればよい. すなわち

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(z) + * \Phi_{n+2}(z)] = & - \sum_{n=2}^{\infty} [a_n(z+ib)^{-n} + \bar{a}_n(z-ib)^{-n}] \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \{ [b_n(z+ib)^{-n} - \bar{b}_n(z-ib)^{-n}] / X(z) \} \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a_n &= A_{n-2} + nB_n - (n-1)(2ib)B_{n-1}, \\ b_n &= - \sum_{j=0}^{\infty} X^{(j)}(-ib) [A_{j+n-2} + (j+n-2)B_{j+n} - (j+n-1)(2ib)B_{j+n-1}] / j! \end{aligned} \right\} (n \geq 3) \dots\dots\dots (38)$$

とくに n の小さい値に対しては

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= A_0 + 2B_2, \\ b_2 &= - \sum_{j=0}^{\infty} X^{(j)}(-ib) [A_{j+2} + jB_{j+2} - (j+1)(2ib)B_{j+1}(1-\delta_{0,j})] / j!, \\ b_1 &= - \sum_{j=1}^{\infty} X^{(j)}(-ib) [A_{j-1} + (j-1)B_{j+1} - j(2ib)B_j(1-\delta_{1,j})] / j! \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

文 献

- (1) 玉手, 機械学会論文集, 29-206 (昭 38-10), 1538.
- (2) N.I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, (1953), P.

Noordhoff Ltd., Groningen, Holland.

- (3) N.I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, (1953), Chapter 5, P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland.
- (4) 村上, 土木学会誌, 28-8 (昭 17-8), 718.

工作図面のマイクロフィルム

ロサンゼルス水道電力局は, 工作関係の図表, 図面, 記録をマイクロフィルムにおさめて保管する制度を採用した. これにより保管用キャビネットおよびファイルを約 75 %減らすことができた. また広い地域に散らばっている支部にこれらの資料を要求に応じて配布するのが迅速になり, エンジニアのために必要な資料を見つけ出すことが簡単になった.

同局はさらに過去 55 年間に蓄積した古い図表, 図面, 記録約 21 万枚を倉庫から出してマイクロフィルムにおさめている.

この計画に使用する装置の主要部は, 105~35 mm マイクロマスタカメラ-映写機の組合せで完全に動力化されている. 35 mm カメラは図表および図面をフィルムにおさめるのに使用する. 105 mm カメラは特別の複写を行なうのに使用する. レンズの焦点合わせ用の同期電子装置が両方のカメラに付いている.

マイクロマスタカメラはニュージャージー州ホーボケンの Keuffel & Esser 社の製品である. フィルム

は撮影のたびごとに自動的に進む. 1 本の 35 mm ロールで 600 回の露出を行ない, オーバラップの懸念も二重露出の懸念もない. 複写センタでは毎日 600~800 枚のオリジナルをフィルムに取っている.

この装置の大きな特徴は, 背面から光をあてる方式の真空コントロールコピーボードである. 古い図面などはほとんどがよごれたり, 裂けたり, つくろわれたり, 変色したり, 色が薄れたりしているものであるが, それでもこの装置によってコピーを取ることができる.

105 mm カメラは図面を正確なスケールで縮小したり拡大したものを作ること, および図面やトレースしたもののコピーを作ることには使用されている. また古い図面から必要部分を切り取り, これに新しい設計図を加えた図面を作ることでもある.

(Ind. World, 1964, Vol. 174, No. 2, p. 44~45).

(日本科学技術情報センター提供)