534.11.011

弾 性 支 持 台 上 の 横 軸 の 振 動*

齋 藤 秀 雄**

Vibrations of Beams on Resilient End Supports

by Hideo SAITO

The analysis treats the forced lateral vibrations of a beam with a concentrated mass mounted on parallel elastic supports at each end. Considering the effect of weight, as well as resilience, of the supports, the deflection relationship is obtained. The natural frequencies are also determined and the mode shapes associated with each of these natural frequencies are discussed. These results are applicable to the case of rotating shafts or equipments on elastic racks supported on vibration mounts.

1. 緒 言

回転軸の危険速度を考える場合、普通は支持台を剛体として軸のみの横振動を考えることが多いが、支持台を弾性体と考えると、系の振動数は前記の場合と異なることは明らかである。また装置その他のものを板などの架体によせ、これをばねを介して振動体に取り付けることが多い。この時も共振を避けるため自然振動数を求める必要があるが、この場合の振動系は架体を剛体とみなし、ばね上の剛体の振動として取扱うことが多い。しかし実際には共振はこの計算された固有振動数とは異なる値で起ることがわかっている。以上の固有振動数をより正確に求めるには、軸あるいは架体を弾性支持台上の弾性体として取扱うことが必要である。これらの問題については、すでに軸のふれ回りの場合、Dimentberg⁽¹⁾、Miller⁽²⁾などが、防振支持の場合 Tarants⁽³⁾が、支振台を 1 自由度系のばねでおきかえ取扱っている。実際には架体は箱形の板またははりの組合せになっており、回転軸の場合も変断面軸が多いが、本文では軸上の回転円板、架体上の物体などは集中質量と考え、1 点に集中質量を有する一様軸におきかえ、また支持台は無限自由度を有する弾性体として台軸方向にのみ動くものとし、両者の組合せによる振動を取扱うこととする。ただし減衰は考えない。

2. 基礎式と境界条件

第 1 図において O_1O_2 は C 点に大いさ M の集中質量を有する長さ l の断面一様の横軸で、両端 O_1, O_2

は弾性支持台 O_1O_1', O_2O_2' で自由支持されている。 C 点の O_1, O_2 からの距離は l_1, l_2 であり、質量 M には周期的かく乱力 $Pe^{i\omega t}$ が図のように作用している。いま座標原点を O_1 にとり、棒軸に沿い x 軸を、これに垂直に y 軸をとり、 O_1C および CO_2 部の変位を u_1, u_2 とし、軸のせん断変形および回転慣性の影響を無視すれば、その運動式は次のようになる。

$$\rho\beta \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} = 0, \quad j=1, 2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに ρ, E は軸材料の密度、縦弾性係数、 β および I は軸の横断面面積および断面二次モーメントである。また支持台 O_1O_1', O_2O_2' を断面一様の弾性体と考え、その縦弾性係数を E_s 、密度を ρ_s 、また y 方向の変位を v_1 および v_2 とすれば、その運動式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} = h_s^2 \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2}, \quad j=1, 2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに h_s は支持台内の y 方向の縦波の速度で

$$h_s^2 = \frac{E_s}{\rho_s} \quad \dots\dots\dots(3)$$

さて支持台 O_1O_1', O_2O_2' の下端 O_1', O_2' は固定され、

第 1 図 弾性支持台上の横軸

* 昭和 38 年 10 月 8 日 第 41 期全国大会講演会において講演、
原稿受付 昭和 39 年 3 月 3 日。

** 正員、東北大学工学部 (仙台市桜小路)。

上端 O_1, O_2 は軸 O_1O_2 を自由支持しているから、この場合の境界条件は次のようになる。

軸について

$$x=0; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$x=l; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$x=l_1; \quad u_1=u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$-EI\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}\right) = -M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + P e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(7)$$

支持台について

$$y=-L_j; \quad v_j=0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

軸と支持台について

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad y=0; \quad u_1=v_1 \\ \beta_{s1} E_s \frac{\partial v_1}{\partial z} = -EI \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

$$\left. \begin{aligned} x=l, \quad y=0; \quad u_2=v_2 \\ \beta_{s2} E_s \frac{\partial v_2}{\partial z} = EI \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

ここに $\beta_{sj} (j=1, 2)$ は支持台の横断面積を表わす。

3. 解 析

いま

$$u_j = X_j e^{i\omega t}, \quad j=1, 2 \quad \dots\dots\dots(11)$$

とおくと、(1) 式および境界条件 (4), (5) 式を満足する X_j の形は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= A_1 \sin \xi x + B_1 (\cos \xi x + \cosh \xi x) \\ &\quad + C_1 \sinh \xi x \\ X_2 &= A_2 \sin \xi(l-x) + B_2 \{ \cos \xi(l-x) \\ &\quad + \cosh \xi(l-x) \} + C_2 \sinh \xi(l-x) \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

$$\text{ここに } \xi^4 = \frac{\rho \beta \omega^2}{EI} \quad \dots\dots\dots(13)$$

であり、 $A_1, B_1, \dots, A_2, \dots$ は未定定数である。

次に

$$v_j = Z_j e^{i\omega t}, \quad j=1, 2 \quad \dots\dots\dots(14)$$

とおき、(2) 式に代入して条件 (8) 式を満足する Z_j の形を求めると

$$Z_j = F_j \sin \frac{\omega}{h_s} (L_j + y) \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 \sin \xi l_1 + B_1 (\cos \xi l_1 + \cosh \xi l_1) + C_1 \sinh \xi l_1 &= A_2 \sin \xi l_2 + B_2 (\cos \xi l_2 + \cosh \xi l_2) + C_2 \sinh \xi l_2 \\ A_1 \cos \xi l_1 + B_1 (-\sin \xi l_1 + \sinh \xi l_1) + C_1 \cosh \xi l_1 &= -A_2 \cos \xi b + B_2 (\sin \xi b - \sinh \xi b) - C_2 \cosh \xi b \\ -A_1 \sin \xi l_1 + B_1 (-\cos \xi l_1 + \cosh \xi l_1) + C_1 \sinh \xi l_1 &= -A_2 \sin \xi l_2 + B_2 (-\cos \xi l_2 + \cosh \xi l_2) + C_2 \sinh \xi l_2 \\ -A_1 \xi^3 \cos \xi l_1 + B_1 \xi^3 (\sin \xi l_1 + \sinh \xi l_1) + C_1 \xi^3 \cosh \xi l_1 &= -A_2 \xi^3 \cos \xi l_2 + B_2 \xi^3 (\sin \xi l_2 + \sinh \xi l_2) \\ &\quad + C_2 \xi^3 \cosh \xi l_2 + \frac{M\omega^2}{EI} A_1 \sin \xi l_1 + \frac{M\omega^2}{EI} B_1 (\cos \xi l_1 + \cosh \xi l_1) + \frac{M\omega^2}{EI} C_1 \sinh \xi l_1 = -\frac{P}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

境界条件 (9), (10) 式を (12), (14) 式に適用すると

$$\frac{2B_j \beta_{sj} E_s \omega}{h_s \tan(\omega L/h_s)} - EI \xi^3 (A_j - C_j) = 0, \quad j=1, 2 \quad \dots\dots\dots(16)$$

しかるに支持台 O_j 点に作用する静荷重を W_j とすれば、 O_j 点の静たわみは

$$\delta_j = \frac{W_j L_j}{\beta_{sj} E_s}$$

となり、 W_j の大いさは

$$\left. \begin{aligned} \frac{W_1}{g} &= M \frac{l_2}{l} + \frac{1}{2} \rho \beta l \\ \frac{W_2}{g} &= M \frac{l_1}{l} + \frac{1}{2} \rho \beta l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

である。普通支持台の高さは両者相等しく

$$L_1 = L_2 = L$$

であって、また静的に軸をさえた場合、軸は水平となると考えれば

$$\frac{W_1}{\beta_{s1}} = \frac{W_2}{\beta_{s2}}$$

しかるに、支持台のばね定数は

$$k_j = \frac{\beta_{sj} E_s}{L}$$

であるから

$$\beta_s = \frac{1}{2} (\beta_{s1} + \beta_{s2}), \quad a = \frac{l_1}{l}, \quad b = \frac{l_2}{l} \quad \dots\dots(18)$$

とおくと

$$k_j = c_j \frac{\beta_s E_s}{L} = c_j K \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{1 + \frac{M}{\rho \beta l}} \left(1 + \frac{M}{\rho \beta l} 2b \right), \\ c_2 &= \frac{1}{1 + \frac{M}{\rho \beta l}} \left(1 + \frac{M}{\rho \beta l} 2a \right) \\ K &= \frac{\beta_s E_s}{L} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

したがって

$$\lambda = \frac{\omega L}{h_s} \quad \dots\dots\dots(21)$$

とおくと、(16) 式は次のように変形される。

$$\frac{2\lambda c_j K}{\tan \lambda} B_j - EI \xi^3 (A_j - C_j) = 0, \quad j=1, 2 \quad \dots\dots(22)$$

次に (12) 式が (6), (7) 式の条件をみたすためには

(22) 式および (23) 式より未定定数を定める。簡単のため

$$z = \xi l, \quad q = -\frac{Pl^3}{EIz^3} \dots\dots\dots (24)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{q}{\Delta} [\sin zb \sinh z - \alpha_1 (\sin zb \cosh z + \cos z \sinh zb) + \alpha_2 (\sinh za + \cos zb \sinh z - \sin zb \cosh z) \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_2 (\cos za - \cosh za + \sin zb \sinh z + \sin z \sinh zb - \cos zb \cosh z + \cos z \cosh zb)] \\ B_1 &= \frac{q\alpha_1}{\Delta} [\sin zb \sinh z + \sin z \sinh zb + \alpha_2 (\sinh za - \sin za + \cos z \sinh zb \\ &\quad - \sin zb \cosh z + \cos zb \sinh z - \sin z \cosh zb)] \\ C_1 &= \frac{q}{\Delta} [-\sin z \sinh zb - \alpha_1 (\sin zb \cosh z + \cos z \sinh zb) + \alpha_2 (\sin za - \cos z \sinh zb + \sin z \cosh zb) \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_2 (\cos za - \cosh za + \sin zb \sinh z + \sin z \sinh zb - \cos zb \cosh z + \cos z \cosh zb)] \\ A_2 &= \frac{q}{\Delta} [\sin za \sinh z + \alpha_1 (\sinh zb - \sin za \cosh z + \cos za \sinh z) - \alpha_2 (\sin za \cosh z + \cos z \sinh za) \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_2 (\cos zb - \cosh zb + \sin za \sinh z + \sin z \sinh za - \cos za \cosh z + \cos z \cosh za)] \\ B_2 &= \frac{q\alpha_2}{\Delta} [\sin za \sinh z + \sin z \sinh za + \alpha_1 (\sinh zb - \sin zb + \cos z \sinh za \\ &\quad - \sin za \cosh z + \cos za \sinh z - \sin z \cosh za)] \\ C_2 &= \frac{q}{\Delta} [-\sin z \sinh za + \alpha_1 (\sin zb - \cos z \sinh za + \sin z \sinh za) - \alpha_2 (\sin za \cosh z + \cos z \sinh za) \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_2 (\cos zb - \cosh zb + \sin za \sinh z + \sin z \sinh za - \cos za \cosh z + \cos z \cosh za)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここに

$$\alpha_j = \frac{\alpha z}{c_j \sqrt{n}} \tan(\alpha \sqrt{n} z^2), \quad j=1, 2 \dots\dots\dots (26)$$

$$\alpha^2 = \frac{EI}{2Kl^3} \dots\dots\dots (27)$$

$$n = \frac{2\rho_s \beta_s L}{\rho \beta l} \dots\dots\dots (28)$$

また

$$\Delta = I_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{\alpha z}{\sqrt{n}} \tan(\alpha \sqrt{n} z^2) I_2 + \frac{\alpha^2 z^2}{c_1 c_2 n} \tan^2(\alpha \sqrt{n} z^2) I_3 \\ + m \left[I_4 + \frac{\alpha z}{c_1 \sqrt{n}} \tan(\alpha \sqrt{n} z^2) I_5 + \frac{\alpha z}{c_2 \sqrt{n}} \tan(\alpha \sqrt{n} z^2) I_6 + \frac{2\alpha^2 z^2}{c_1 c_2 n} \tan^2(\alpha \sqrt{n} z^2) I_7 \right] \dots\dots\dots (29)$$

ここに

$$m = M/(\rho \beta l) \dots\dots\dots (30)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= -2 \sin z \sinh z \\ I_2 &= 2(-\cos z \sinh z + \sin z \cosh z) \\ I_3 &= 4(\cos z \cosh z - 1) \\ I_4 &= z(\sin za \sin zb \sinh z - \sin z \sinh za \sinh zb) \\ I_5 &= z(2 \sin zb \sinh zb + \cos za \sin zb \sinh z + \sin z \cosh za \sinh zb \\ &\quad - \sin za \sin zb \cosh za \cosh zb - \cos za \cos zb \sinh za \sinh zb) \\ I_6 &= z(2 \sin za \sinh za + \sin za \cos zb \sinh z + \sin z \sinh za \cosh zb \\ &\quad - \sin za \sin zb \cosh za \cosh zb - \cos za \cos zb \sinh za \sinh zb) \\ I_7 &= z(\cos za \sinh za - \sin za \cosh za + \cos zb \sinh zb - \sin zb \cosh zb \\ &\quad + \cos za \cos zb \sinh z - \sin z \cosh za \cosh zb) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

(25) 式の係数を (12) 式に代入すると、重量 W に周期力 $Pe^{i\omega t}$ の作用する場合の軸の任意点のたわみを求めることができる。

4. 自由振動

(29) 式において

$$\Delta = 0 \quad \dots\dots\dots(32)$$

となるとたわみは無限大となり共振を与える。(32)式は振動数方程式であって、これを満足する根 z_r ($r=1, 2, 3, \dots$) を求め、(13) 式より導かれる

$$\omega_r^2 = \frac{EI z_r^4}{\rho \beta I^4} \quad \dots\dots\dots(33)$$

に代入すると、系の固有円振動数が計算される。いま特殊の場合として軸を剛体、支持台を1自由度のばねと仮定すると、系の円振動数 ω_0 は

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{M + \rho \beta I} \quad \dots\dots\dots(34)$$

である。したがって、 ω_0 を基準として考えると(27)、(33) 式より

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1 + m \alpha z_r^2} \quad \dots\dots\dots(35)$$

α が大となると αz_r^2 は一定値に近づく。この時 z_r は小となるから(31) 式を z の級数に展開して(32) 式に代入し、高次の微小量を無視すると

$$\begin{aligned} & (\zeta \tan \zeta)^2 \frac{1}{c_1 c_2 n^2} \left[1 - m \{ 1 - 3(a^2 + b^2) - 2(a^3 + b^3) \} \right] \\ & - (\zeta \tan \zeta) \frac{2}{n} \left\{ \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + 3m \left(\frac{b^2}{c_1} + \frac{a^2}{c_2} \right) \right\} + 3 = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(36)$$

ここに

$$\zeta = \alpha \sqrt{n} z^2 \quad \dots\dots\dots(37)$$

特に $m=0$ の場合は

$$\zeta \tan \zeta = n, 3n \quad \dots\dots\dots(38)$$

(36) 式あるいは(38) 式を満足する根 ζ_r ($r=1, 2, \dots$) を求めると、 αz_r^2 の極限値として(37) 式より

$$(\alpha z_r^2)_{\alpha \rightarrow \infty} = \frac{\zeta_r}{\sqrt{n}} \quad \dots\dots\dots(39)$$

を得る。

また n が微小の場合は $\tan(\alpha \sqrt{n} z^2) \doteq \alpha \sqrt{n} z^2$ となり、(32) 式は次のように書直される。

$$\begin{aligned} & I_1 + \alpha^2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) z^2 I_2 + \frac{\alpha^4}{c_1 c_2} z^4 I_3 \\ & + m \left(I_4 + \frac{\alpha^2}{c_1} z^2 I_5 + \frac{\alpha^2}{c_2} z^2 I_6 + \frac{\alpha^4}{c_1 c_2} z^4 I_7 \right) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(40)$$

(40) 式は1自由度系の支持台の上に、軸あるいははりが水平に支持されている場合の振動数方程式である。次に支持台を剛体と考えると、 K は無限大となるから α は零となる。この場合の Δ を Δ_0 とおくと(29) 式より

$$\begin{aligned} \Delta_0 = & -2 \sin z \sinh z + m z (\sin z a \sin z b \sinh z \\ & - \sin z \sinh z a \sinh z b) \end{aligned}$$

いま

$$\Delta_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(41)$$

の根を $z_{r,0}$ 、これに相当する円振動数を $\omega_{r,0}$ とおけ

(a)

(b)

(c)

第2図 ばね定数比と固有振動数の関係
($m=0$ の場合)

ば (33) 式を用いて

$$\frac{\omega_r}{\omega_{r,0}} = \frac{z_r^2}{z_{r,0}^2} \dots \dots \dots (42)$$

$\omega_{r,0}$ は軸上の任意点に質量を有する両端支持軸の

(a)

(b)

(c)

第 3 図 ばね定数比と固有振動数の関係
($m=0$ の場合)

円振動数で, この場合の解析の一部はすでに Klotter⁽⁴⁾ により与えられている.

$m=0$ すなわち軸上に集中質量のない場合, その曲げこわさと支持台のばね定数との比により, 系の固有振動数がいかに変化するかを第 2 図に示す. 図の曲線は (32) 式により求めた z_r の値を (35) 式に代入したものであって, α を横軸, n をパラメータにとっており, (a), (b), (c) はそれぞれ一, 二, 三次の振動形に対するものである. (b) においては節は一つで軸の中央点にある. (c) では節は 2 個あり, $\alpha\sqrt{n}z_3^2=\pi$ の場合, 振動数方程式より $z_3=\pi$ となるから, $\omega_3/\omega_0=\pi^2\alpha$ の直線 (I) を界として, (I) の左範囲では節は軸内, 右範囲では支持台内にある. (a), (b), (c) とも α 大となると曲線は (38), (39) 式より求められる極限值に近づく. 第 3 図は α に対する $\omega_r/\omega_{r,0}$ の変化を図示したものである. (a), (b), (c) は一, 二, 三次の振動

(a)

(b)

第 4 図 ばね定数比と固有振動数の関係
($n=0$ の場合)

第5図 外力の振動数と軸変位の関係
($m=0, n=0$ の場合)

形に対するもので、(c) 上の点線 (I) は第2図 (c) と同じく $z_3=\pi$ すなわち $\omega_3/\omega_{3,0}=1/9$ を示し、(I) より上の範囲では節は軸内、下範囲では支持台内にある。 α が原点を離れるに従い、その固有振動数は急激に減少することがわかる。

軸の中央に集中質量のある場合、(40) 式を用い一次および三次の固有円振動数を ω_0 を基準として表わしたものが第4図 (a), (b) である。特に $m=0$ の場合は Tarants が Rayleigh 法を用いて一次、三次の固有振動数を求めている。その結果を図上に点線で示す。一次の場合はその違いはほとんどなくよく一致しているが、三次の場合は一次の時と異なり差が出ており、特に α が零の場合 Rayleigh 法による値は有限値を示し、本解法と異なる結果を示している。

5. 強制振動

さて、集中質量 M にはかく乱力 $Pe^{i\omega t}$ が作用している。この場合軸の変形は (25) 式を (12) 式に代入することによって与えられる。

一例として $n=0, M=0, a=b$ すなわち軸の中央に $Pe^{i\omega t}$ が作用し、かつ支持台の重さを省略する場合を考える。軸端の変位を $X_{1,0}$ 、軸中央変位を $X_{1,1/2}$ とすると P が静的に作用する場合

$$\left. \begin{aligned} (X_{1,0})_{st} &= \frac{Pl^3}{EI} \alpha^2, \\ (X_{1,1/2})_{st} &= \frac{Pl^3}{EI} \left(\frac{1}{48} + \alpha^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

第6図 外力の振動数と軸変位の関係
($m=0, n=0$ の場合)

第5, 6図は $\omega/\omega_{1,0}$ と $X_{1,0}$, $X_{1,1/2} - X_{1,0}$ の関係を図示したもので、(43) 式の値を基準にとり、 α をパラメータとして表わしている。図中、負の変位はその絶対値を取り、点線で示している。この時の振動形は $x=1/2$ について対称であり、二次、四次、……のものは現われず $\omega=\omega_1, \omega_3, \dots$ において変位は無限大となる。

6. 結 言

弾性支持台上の横軸の振動について、支持台の重量、軸上の集中質量を考慮して解析を行ない、これらの諸量がいかに振動特性に影響を与えるかを明らかにした。さらに集中質量がなくかつ支持台の重量を無視した場合、Rayleigh 法によりすでに得られた近似解と比較しその相違を検討している。

終りに本研究の数値計算に協力された西沢美南子嬢に感謝する。

文 献

- (1) F.M. Dimentberg, *Flexural Vibrations of Rotating Shaft*, (1961), London Butterworths.
- (2) D.F. Miller, *J. Appl. Mech.*, **20-2** (1953), 167.
- (3) R.A. Di Tarants, *J. Appl. Mech.*, **24-4**(1957), 617.
- (4) K. Klotter, *Verh. 3-int. Kongr. f. tech. Mech.*, **3** (1930), 154, Stockholm.