621-503.5

不規則雑音に乱された入力をうける非線形制御系のシンセシス*

榎 木 義 一**, 砂 原 善 文**, 中 溝 高 好***

Synthesis of Nonlinear Control Systems with a Deterministic Input
in the Presence of a Random Disturbanceby Yoshikazu SAWARAGI, Yoshifumi SUNAHARA,
and Takayoshi NAKAMIZO

The main purpose of this paper is to establish a method of improving the response of a saturating servo-system subjected to a deterministic input in the presence of a random disturbance. To demonstrate this technique, our attention is directed to establish the analytical procedure for the evaluation of the response of nonlinear control systems by the method of statistical approximation. First, an analytical method of calculating the equivalent transfer characteristic of a nonlinear element with a deterministic input contaminated by a random disturbance is shown. Second, a graphical technique for evaluating the response of the closed systems is developed. Two examples are presented, showing how the behaviors of nonlinear control systems may be analysed. From these analytical considerations, it is possible to design the intentionally introduced nonlinear controller to optimize the control performance of a saturating servo-system for various input-magnitudes. Detailed discussion on the synthetical procedure presented here is given by typical examples.

1. 緒 言

不規則雑音に乱された入力をうける非線形制御系の過渡応答を評価する問題に対して、著者らは先に位相面手法を拡張した解析法を提案した⁽¹⁾。しかしながら、位相面を用いる手法は、二次遅れ以上の高次系に対しては、非常に複雑な手続を必要とするために実用上不適当であり、したがってとうていシンセシスの分野にまでその適用は望むべくもない。これを打開すべく本研究においては、回路内信号が正規分布に従うものと仮定して、非線形要素を等価的に置換する近似要素をまず導入し、つぎにこれを用いた比較的簡単な解析手法を提案する。この方法は 2 入力に対する等価線形化手法と同一理念にもとづくものであり、したがって系の次数によってその適用範囲が制限されることはない。さらに本論文では、この手法がステップ入力と不規則外乱をうける非線形制御系のシンセシスに適用できることを示し、特にゲイン調整と非線形補償の具体的な手続について述べる。

2. Zero-Memory 形非線形要素の等価置換

非線形要素の入力 $z(t)$ と出力 $y(t)$ との関係を

$$y(t) = f[z(t)] \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表わす。いま入力 $z(t)$ の確率密度関数を $p(z)$ とし、それを荷重関数とする直交多項式 $\varphi_n(z)$ を導入する。すなわち $\varphi_n(z)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(z) \varphi_n(z) p(z) dz = \delta_{mn} \quad \dots\dots\dots (2)$$

で定義される。このような直交多項式 $\varphi_n(z)$ を用いると、(1) 式で表わされる非線形関数は次のように展開することができる。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで展開係数 λ_n は

$$\lambda_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \varphi_n(z) p(z) dz \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。上式は直交展開の性質から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(z) - \sum_{n=0}^N \lambda_n \varphi_n(z) \right]^2 p(z) dz \quad \dots\dots\dots (5)$$

を最小にするように定められた λ_n と等値であるから⁽²⁾、(3) 式の有限項表限は最小二乗平均値の意味における非線形要素の等価置換を表わす。いま特に入力 $z(t)$ の確率密度関数がガウス分布

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left\{-\frac{(z-z_m)^2}{2\sigma_z^2}\right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で表わされるものとする。ここで z_m および σ_z^2 は、それぞれ入力 $z(t)$ の平均値および分散を表わす。こ

* 昭和 38 年 10 月 9 日 第 6 回自動制御連合講演会において講演、原稿受付 昭和 39 年 3 月 28 日。

** 正員、京都大学工学部（京都市左京区吉田本町）。

*** 正員、防衛大学校。

の場合 (2) 式で定義される $\varphi_n(z)$ は

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left(\frac{z - z_m}{\sigma_z} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。上式において $H_n(\xi)$ は n 次のエルミート多項式である。

通常, 制御回路内において, 信号成分の変化が雑音の変化に比してゆるやかであれば

$$z(t) = z_m(t) + z_r(t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表わすことができる⁽³⁾。ここで $z_r(t)$ は $z(t)$ の純不規則成分を表わす。いま (3) 式を, はじめの 2 項で近似すると

$$f(z) = \lambda_0(z_m, \sigma_z) + \kappa_1(z_m, \sigma_z) z_1(t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで κ_1 は

$$\kappa_1 = \frac{\lambda_1}{\sigma_z} = \frac{1}{\sigma_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} (z - z_m) f(z) p(z) dz \quad \dots\dots\dots (10)$$

となり, 不規則成分 $z_r(t)$ に対する等価な線形ゲインを表わしている。したがって, (9) 式の第 1 項および第 2 項は, それぞれ非線形要素の出力 $y(t)$ の平均値成分および純不規則成分を与える。第 1 図に示すような, リレーおよび飽和特性に対して, λ_0, κ_1 はそれぞれ次のようになる。

第 1 図

第 2 図 飽和要素の等価伝達特性

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_0 &= 2\phi \left(\frac{z_m}{\sigma_z} \right) \quad \dots\dots\dots (11) \\ \kappa_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{b_z} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{z_m}{\sigma_z} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma_z}{a} \right) \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{a+z_m}{\sigma_z} \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{a-z_m}{\sigma_z} \right)^2 \right\} \right] + \left(1 + \frac{z_m}{a} \right) \phi \left(\frac{a+z_m}{\sigma_z} \right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{z_m}{a} \right) \phi \left(\frac{a-z_m}{\sigma_z} \right) \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned} \right.$$

$$\kappa_1 = \phi \left(\frac{a+z_m}{\sigma_z} \right) + \phi \left(\frac{a-z_m}{\sigma_z} \right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし上式において

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\xi \exp \left(-\frac{1}{2} t^2 \right) dt \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。(11), (12) 式を第 2 図に, (13), (14) 式を第 3 図に示した。もちろん $z_m=0$ とおけば, 通常の等価ゲイン⁽⁴⁾と一致する。

3. 雑音に乱された正弦波入力をうける 非線形要素の等価置換

雑音をうける非線形制御系の周波数応答の計算に際し, 制御系内部に含まれる非線形要素を, それと等価な線形要素で置換する手法はすでに発表せられている⁽⁵⁾。ここでは前章に述べた手法によって雑音と正弦波に対する等価線形要素を導いてみよう。この場合

$$z_m(t) = A_z \sin \omega_0 t \quad \dots\dots\dots (16)$$

と考える。いま特に第 1 図に示したリレー要素に対して考察を進める。(11) 式から

$$\lambda_0 = 2a\phi \left(\frac{A_z \sin \omega_0 t}{\sigma_z} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

第 3 図 リレー要素の等価伝達特性

となる。上式は正弦波入力に対する等価な非線形特性を表わす。(17) 式の記述関数 κ_0 は

$$\kappa_0 = \frac{2}{\pi A_z} \int_0^\pi \lambda_0(A_z \sin \alpha, \sigma_z) \sin \alpha d\alpha = \frac{4a}{\pi A_z} \int_0^\pi \phi\left(\frac{A_z \sin \alpha}{\sigma_z}\right) \sin \alpha d\alpha \quad (18)$$

で与えられる。ここで

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad [|x| < \infty] \quad (19)$$

$$\int_0^\pi \sin^k x dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \quad (20)$$

という関係を用いて (18) 式を計算すれば

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4a}{\pi A_z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \left(\frac{A_z}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^{2n+1} \int_0^\pi \sin^{2n+2} \alpha d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{a}{\sqrt{2}\sigma_z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} \left(\frac{A_z}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma_z} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 2; -\frac{A_z^2}{2\sigma_z^2}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

をうる。

さてこの時、不規則成分に対する等価ゲインは

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma_z} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{A_z \sin \omega_0 t}{\sigma_z}\right)^2\right\} \quad (22)$$

である。特に定常状態を考慮すれば、上式の正弦波成分に対する平均値をとり

$$\bar{\kappa}_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_1(A_z \sin \alpha, \sigma_z) d\alpha \quad (23)$$

をうる。上式に (22) 式を代入して計算を進めれば

$$\begin{aligned} \kappa_{10} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma_z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{A_z}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^{2n} \int_0^\pi \sin^{2n} \alpha d\alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{a}{\sigma_z} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{A_z}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^{2n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma_z} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 1; -\frac{A_z^2}{2\sigma_z^2}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。(21), (24) 式はすでに著者らによって与えられた結果⁽⁵⁾と一致している。

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_e(j\omega)|^2 S_u(\omega) d\omega \quad (25)$$

で与えられる。ただしここで

$$\begin{aligned} G_e(j\omega) &= \frac{k_2(j\omega)}{(j\omega)^3 + 2\zeta\omega_n(j\omega)^2 + \omega_n^2(j\omega) + k\kappa_1 k_1 k_2^2} \end{aligned} \quad (26)$$

である。したがって

$$\frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2} = \frac{\frac{\omega_n}{2} \frac{k_2^4}{\omega_n^4}}{2\zeta - k\kappa_1 \frac{k_1}{\omega_n} \frac{k_2^2}{\omega_n^2}} \quad (27)$$

をうる。ここで κ_1 は (14) 式で与えられる。

さて、平均値成分(目標値成分)の評価に先立ち、特性 λ_0 におよぼす不規則成分の影響を調べる必要がある。 κ_1 は (14) 式に示したように、 σ_z/a および z_m/a に依存するから、(27) 式から

$$Y_1 = a^2 \left(\frac{k\sigma_e}{a}\right)^2 = a^2 \left(\frac{\sigma_z}{a}\right)^2 \quad (28)$$

4. 非線形制御系の応答の評価-I

前章までに述べた非線形要素の等価置換を適用して、雑音をうける非線形制御系の過渡応答を評価する手法について述べる。一例として第 4 図に示す非線形制御系について考える。ここで目標値 $v(t)$ は高さ A_0 のステップ入力であり、外乱 $u(t)$ はそのスペクトル密度が $S_u(\omega) = \sigma_u^2$ で表わされる正規性定常不規則雑音である。さて閉ループ内に含まれる飽和特性を、2 章で述べた等価伝達特性 ($\lambda_0 + \kappa_1 z_m$) で置換すれば、不規則成分に対しては線形化されているから、誤差 $e(t)$ の分散 σ_e^2 は

第 4 図 非線形制御系のブロック線図

$$Y_2 = \frac{k^2 \frac{\omega_n}{2} \frac{k_2^4}{\omega_n^4} \sigma_u^2}{2\zeta - k\kappa_1 \frac{k_1}{\omega_n} \frac{k_2^2}{\omega_n^2}} \dots\dots\dots (29)$$

と表わして, (28) 式は a^2 を, (29) 式は z_m/a をそれぞれパラメータとして図示することができる. いま, 入力および制御系の定数を $k=1.0$, $k_1/\omega_n=0.5$, $k_2/\omega_n=1.0$, $\zeta=0.5$, $\omega_n=0.5$, $A_v=0.5$, $\sigma_u=2.0$ として, (28), (29) 式は第5図に示すようになる. 第5図の2種類の曲線の交点から σ_z/a と z_m/a との関係がえられるから, それを (13) 式に代入して σ_z/a を消去すれば, λ_0 は z_m/a に対して第6図に示すような非線形関数となる. これが目標値成分 $z_m(t)$ の評価に対して置換せられた等価非線形伝達特性を表わす. したがって第4図において飽和要素の代りに, 第6図で表わされる非線形特性を用いて, そのインディシャル応答を計算すればよい. このようにして不規則雑音の影響は, ステップ入力に対する非線形特性の変化として現われ, したがって過渡応答の評価は雑音のない非線形制御系の解析に帰着するのである. しかもこの場合第6図から明らかなように十分線形とみなすことができる. いま $z_m/a=0$ 近傍で近似線形化して, その線形化ゲインを κ_0 と表わす. このようにして線形化さ

第5図 図式解法の説明

第6図 平均値成分に対する等価非線形特性

れると既知の手法に従って種々の問題の解明が可能になる⁽⁶⁾.

5. 非線形制御系の応答の評価-II

本章では, λ_0 が前例のように近似線形化して取扱うことができない場合の一例を示す. 第7図に示したリレー制御系を考え, ここで目標値 $v(t)$ および外乱 $u(t)$ は, 前例と同様にそれぞれ高さ A_v なる階段関数およびそのスペクトル密度が $S_u(\omega)=\sigma_u^2$ なる白色雑音であるとする. (11), (12) 式を用いて, 回路内のリレー要素を等価置換すれば, $z(t)$ の分散 σ_z^2 はただちに

$$\frac{\sigma_z^2}{\sigma_u^2} = \frac{k^2}{2T(1+k\kappa_1)} \dots\dots\dots (30)$$

となる. ここで κ_1 は (12) 式で与えられ σ_z/a , z_m/a に依存するから, 前例と同様に (30) 式両辺を

$$Y_1 = \left(\frac{a}{\sigma_u}\right)^2 \left(\frac{\sigma_z}{a}\right)^2 \dots\dots\dots (31)$$

$$Y_2 = \frac{k^2}{2T(1+k\kappa_1)} \dots\dots\dots (32)$$

と表わして, (31) 式は σ_u/a を, (32) 式は z_m/a をパラメータとして σ_z/a に対する変化を図示する. この図からえられる σ_z/a と z_m/a との関係を (11) 式に代入すれば, 結局第8図に示すような信号成分に対する等価な非線形特性をうる. 図から明らかなように, SN 比 ($=z_m/\sigma_z$) が十分小さくない限り前例のように近似線形化することができない. したがって実際の計算にあたっては, 非線形制御系に対する既知の過渡応答解析法, たとえば位相面法あるいはその他の数値計

第7図 リレー制御系のブロック線図

第8図 平均値成分に対する等価非線形特性

算法等を用いなければならない。

6. 非線形制御系のゲイン調整

前章までに述べた解析手法を適用して第 4 図に示した非線形制御系のゲイン調整について考察する。ここで調整可能なパラメータは前置増幅器のゲイン k であり、また目標値 $v(t)$ および外乱 $u(t)$ は、前章までに取扱ったと同様に、それぞれ階段関数および白色雑音であるとする。

さて、閉ループ内飽和要素を (13), (14) 式を用いて $(\lambda_0 + \kappa_1 z_r)$ で置換し、かつ入力および回路定数をそれぞれ $a=1.0$, $k_1/\omega_n=0.5$, $k_2/\omega_n=1.0$, $\zeta=0.5$, $\omega_n=0.5$, $A_v=0.5$, $\sigma_n=2.0$ とすると、(27) 式から

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{1-0.5k\kappa_1} \quad \dots\dots\dots(33)_1$$

$$\sigma_z^2 = k^2 \sigma_e^2 \quad \dots\dots\dots(33)_2$$

をうる。また 4 章の結果を参照して、近似線形化ゲインを κ_0 とすれば、信号成分に対応する誤差の二乗面積 I_e^2 は

$$I_e^2 = \int_0^\infty e_m^2(t) dt = \frac{1}{2k\kappa_0(1-0.5k\kappa_0)} \quad \dots\dots\dots(34)$$

となる。いま第 4 図に示した制御系の制御性能を

$$P = \sigma_{e0}^2 + I_e^2 \quad \dots\dots\dots(35)$$

で評価するものとする。ここで σ_{e0}^2 は制御誤差の分散の定常値である。したがって制御性能評価値 P は (33), (34) 式を代入して

$$P = \frac{1}{1-0.5k\kappa_{10}} + \frac{1}{2k\kappa_0(1-0.5k\kappa_0)} \quad \dots\dots\dots(36)$$

となる。ただし上式において κ_{10} は定常状態の不規則

第 9 図 制御性能の評価

成分に対する等価ゲインを表わし、(14) 式から

$$\kappa_{10} = 2\phi\left(\frac{a}{\sigma_{z0}}\right) \quad \dots\dots\dots(37)$$

である。(36) 式の k に対する評価を第 9 図に示した。したがって P を最少にする前置増幅器の最適ゲインは $k \approx 0.8$ である。図から明らかなように、飽和の影響をうけてゲイン k を増大しても制御系は安定であり、しかも性能の劣化にもほとんど影響を与えない。一方図中点線で示した線形系 ($a=\infty$) の場合は、ゲイン k の増加に対する性能の変動は敏感であり、しかも $k \geq 2$ において不安定となる。

7. 非線形特性による制御性能の改善

本章では Zero-Memory 形非線形特性を積極的に利用した制御系のシンセシスの一例として、重砲座駆動に用いられるサーボ系について考察する。通常電動機に存在する飽和を考慮すれば、そのブロック線図は第 10 図に示すようになる。ここで目標値 $v(t)$ および外乱 $u(t)$ は、前章までの例題と同様にそれぞれ階段関数および白色雑音であるとする。前述のように、飽和要素を (13), (14) 式を用いて $(\lambda_0 + \kappa_1 z_r)$ で置換すれば、誤差

$$e(t) = v(t) - x(t) \quad \dots\dots\dots(38)$$

の分散 σ_e^2 は

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k\kappa_1}{\mu T^3(j\omega)^3 + T^2(1+2\zeta\mu\kappa_1)} \right|^2 S_u(\omega) d\omega \times (j\omega)^2 + 2\zeta\kappa_1 T(j\omega) + k\kappa_1 \quad \dots\dots\dots(39)$$

で与えられ、したがって

$$\frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2} = \frac{k(1+2\zeta\mu\kappa_1)}{2T\{2\zeta(1+2\zeta\mu\kappa_1) - k\mu\}} \quad \dots\dots\dots(40)$$

となる。同様に飽和要素の入力 $z(t)$ の分散 σ_z^2 は

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{kT^2(j\omega)^2}{\mu T^3(j\omega)^3 + T^2(1+2\zeta\mu\kappa_1)} \right|^2 S_u(\omega) d\omega \times (j\omega)^2 + 2\zeta\kappa_1 T(j\omega) + k\kappa_1 \quad \dots\dots\dots(41)$$

であるから

$$\frac{\sigma_z^2}{\sigma_u^2} = \frac{2\zeta k^2}{2\mu T\{2\zeta(1+2\zeta\mu\kappa_1) - k\mu\}} \quad \dots\dots\dots(42)$$

となる。一例として $\zeta=0.5$, $\mu=1.0$, $T=0.5$ とすると、(42) 式は

第 10 図 非線形制御系のブロック線図

$$\left(\frac{\sigma_z}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{\sigma_u}\right)^2 = \frac{k^2}{1+\kappa_1-k} \quad \dots\dots\dots(43)$$

となるから, すでに述べた図式法によって $\sigma_z/a-z_m/a$ の関係を定めることができ, したがって (14) 式から λ_0 の特性が決定される. こうして定められた等価非線形特性を 4 章の考察と同様に $z_m=0$ の近傍で近似線形化して, そのゲインを κ_0 と表わせれば, 信号成分に対する二乗誤差面積 I_e^2 は

$$\frac{I_e^2}{A_v^2} = \frac{T}{2} \frac{(1+2\zeta\mu+4\zeta^2\mu^2)k+4\zeta^2\kappa_0(1+2\zeta\mu\kappa_0)}{k\kappa_0\{2\zeta(1+2\zeta\mu\kappa_0)-k\mu\}} \quad \dots\dots\dots(44)$$

となる. 一方第 10 図の制御系が安定であるためには, フルビッツの条件から

$$k < \frac{2\zeta}{\mu} (1+2\zeta\mu\kappa_0) \quad \dots\dots\dots(45)$$

$$k < \frac{2\zeta}{\mu} (1+2\zeta\mu\kappa_{10}) \quad \dots\dots\dots(46)$$

でなければならない. すなわち (45) 式は過渡応答が発散しない条件であり, (46) 式は不規則成分の分散が有限確定値となる条件である. したがってこの両式が同時に満足されない限り制御系は不安定である.

さて制御系の性能は

$$P = \frac{\sigma_{e0}^2}{\sigma_u^2} + \frac{I_e^2}{A_v^2} \quad \dots\dots\dots(47)$$

第 11 図 制御性能の評価

第 12 図 非線形要素を導入した制御系のブロック線図

で評価されるものとする. ここで σ_{e0}^2 は定常状態における分散を表わす. (40), (44) 式を代入して

$$P = \frac{k(1+\kappa_{10})}{1+\kappa_{10}-k} + \frac{3k+\kappa_0+\kappa_0^2}{4k\kappa_0(1+\kappa_0-k)} \quad \dots\dots\dots(48)$$

をうる. ただし上式において

$$\kappa_{10} = 2\phi\left(\frac{a}{\sigma_{z0}}\right) \quad \dots\dots\dots(49)$$

$$\frac{\sigma_{z0}}{a} = \frac{k^2}{1+\kappa_{10}-k} \left(\frac{\sigma_u}{a}\right)^2 \quad \dots\dots\dots(50)$$

である. (48) 式のゲイン k に対する評価を第 11 図に a^2/σ_u^2 をパラメータとして示した. 図から明らかのように雑音のレベルに応じて最適なゲインの値が決定される. しかしながら一般に雑音レベルの増加とともに安定性が悪くなるので, ゲイン k の最適値からのわずかのずれが, 著しい性能劣化となって現われるのみならず, 場合によっては不安定状態に陥ることがある. したがって, 制御動作中に雑音レベルの変動が予想される場合や, あらかじめ雑音レベルの正確な値があくできない場合に, ゲイン k を固定して使用することは危険である. これらの欠点を補うためには非線形要素による補償が効果的である. すなわち, 第 10 図においてゲイン k の代りに Zero-Memory 形非線形特性 $f(\theta)$ をそう入し, その入力依存性を利用して雑音レベルの変化に起因する性能劣化を抑制することができる. いま第 12 図のように非線形要素を導入した制御系を考える. ここで導入される非線形要素は

$$f(\theta) = A_1\theta + \frac{1}{3}A_3\theta^3 \quad \dots\dots\dots(51)$$

で表わされる三次の飽和特性であると仮定する. ただし係数 A_1, A_3 は調整可能なパラメータである. 2 章の手続と同様にして, (51) 式の等価置換要素の係数は

$$\lambda_{\theta 0} = A_1\theta_m + \frac{1}{3}A_3\theta_m^3 + A_3\sigma_\theta^2\theta_m \quad \dots\dots\dots(52)$$

$$\kappa_{\theta 1} = A_1 + A_3\sigma_\theta^2 + A_3\theta_m^2 \quad \dots\dots\dots(53)$$

となる. ただし上式において θ_m および σ_θ^2 はそれぞれ $\theta(t)$ の信号成分および分散を表わす. また 3 章の結果から, $\lambda_{\theta 0}$ は $\theta_m=0$ の近傍で近似線形化できるものと仮定すれば, そのゲイン $\kappa_{\theta 0}$ は

$$\kappa_{\theta 0} = \left(\frac{\partial \lambda_{\theta 0}}{\partial \theta_m}\right)_{\theta_m=0} = A_1 + A_3\sigma_\theta^2 \quad \dots\dots\dots(54)$$

となる. また定常状態における不規則成分に対する等価ゲインは

$$\kappa_{\theta 10} = A_1 + A_3\sigma_{\theta 0}^2 \quad \dots\dots\dots(55)$$

であるから, (54), (55) 式から

$$\kappa_{\theta 0} - \kappa_{\theta 10} = A_3(\sigma_\theta^2 - \sigma_{\theta 0}^2) \quad \dots\dots\dots(56)$$

をうる. 一般に $A_3 \ll 1$ であるから, 近似的に $\kappa_{\theta 0} \cong$

$\kappa_{\theta 10}$ とみなしてさしつかえない。

一方、第 11 図から雑音レベル σ_u^2/a^2 に対応する最適ゲインの値をプロットすれば第 13 図に示すようになる。いまゲイン k を (51) 式で示す非線形特性で置換したのであるから、その等価ゲインは (55) 式から明らかなように $\sigma_{\theta 0}^2$ に依存する。ここで分散 $\sigma_{\theta 0}^2$ は

$$\frac{\sigma_{\theta 0}^2}{\sigma_u^2} = \frac{\zeta}{\mu} \frac{1+2\zeta\mu\kappa_{10}}{2\zeta(1+2\zeta\mu\kappa_{10})-\kappa_{\theta 10}\mu} \quad \dots\dots\dots(57)$$

で表わされるから、上式を用いて第 13 図の横軸を $\sigma_{\theta 0}^2/a^2$ で書きかえれば、第 14 図の実線のようになる。したがって (56) 式を考慮すれば $\kappa_{\theta 10}$ が第 14 図の実線に一致するように A_1, A_3 を決定すればよい⁽⁶⁾。いま (55) 式を

$$\kappa_{\theta 10} = A_1 + A_3 a^2 \left(\frac{\sigma_{\theta 0}}{a} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(58)$$

と表わして、その近似の一例を第 14 図に点線で記入した。したがってこの場合

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0.333, \\ A_3 &= - \left(\frac{0.755}{10a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(59)$$

となり、導入すべき非線形伝達特性は

$$f(\theta) = 0.333\theta - \frac{1}{3} \left(\frac{0.755}{10a} \right)^2 \theta^3 \quad \dots\dots\dots(60)$$

となる。このことからわかるように、電動機に飽和が存在しない場合 (すなわち $a=\infty$) は $A_3=0$ となり (60) 式は線形特性となる。一般に制御対象が線形である場合には、非線形特性の導入は意味がないことを示している。(60) 式の非線形特性を導入した場合の制御

第 13 図 最適ゲインと雑音レベルの関係

第 14 図 等価ゲインの変化

性能の評価を第 15 図に示した。また比較のため、最適応答を一点鎖線で、線形ゲインの調整による場合の応答を点線で示した。すなわち、ゲイン $k=0.2$ なる点線は雑音の高レベル部分に重点をおき、またゲイン $k=0.3$ なる点線は雑音の低レベル部分に重点をおいて調整したものである。いずれも雑音変動範囲が広がるにつれて著しい性能劣化が生起している。またゲイン $k=0.25$ の点線は、上の両者の中間値をとったものであるが、非線形要素の利用に比してその効果は薄い。これに反して (60) 式のような簡単な非線形特性を利用するだけで、広範囲の雑音に対して良好な応答をうることができる。

8. 結 論

ここでは、不規則雑音に乱された入力を受ける非線形制御系の応答を評価するために、まず回路内の非線形要素に対して等価置換特性を導入し、つぎにこれを用いた非線形制御系の解析手法を確立した。さらにこの手法が非線形制御系のシンセシスに適用できることを示し、ゲイン調整と非線形補償について詳述した。

本手法の特長は広義の線形化手法であり、特に不規則成分の評価に際しては線形化されているから、その適用範囲が制御系の次数に左右されないという特長をもっている。ただし、平均値成分の評価に対しては、なお非線形であって既知の手法たとえば、位相面法、数値計算法、アナログ法等を利用しなければならない場合がある。しかし、第 6 図に示したように、一般に不規則成分の影響は、元の非線形特性をなめらかにするように作用するものであるから、多くの場合近似線形化法が利用できる。

6, 7 章においては、この手法を用いた解析結果にもとづいて、非線形制御系をシンセシスする手続を例題

第 15 図 制御性能の比較

について詳述した。特に7章の結果は、非線形特性を積極的に回路内に導入することによって、不規則雑音の変動に起因する性能劣化を、きわめて有効に抑制しうることを示している。

文 献

(1) Y. Sawaragi & others, *Tech. Reps. Engng. Res.*

- Inst., Kyoto Univ.*, 13-2, Rep. No.101 (1963), 13.
 (2) R. Courant & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, I (1953), Interscience Publishers.
 (3) E.P. Popov, *Pre-Prints of Papers, 1st IFAC*, (1960), 1067.
 (4) R.C. Booton, *Proc. Symp. on Non-linear Circuit Analysis*, 2 (1953), 369.
 (5) 榎木・砂原, 機械学会論文集 24-143 (昭 33-7), 523.
 (6) Y. Sawaragi & others, *Tech. Rep. Engng. Res. Inst., Kyoto Univ.*, 13-3, Rep. No.102 (1963), 27.

世界エネルギー需要の将来

Mobil Oil 社の副社長 J. W. Nelson 氏の報告によると、共産圏を除く自由世界のエネルギー需要は、1984年までに次のように伸びるものと予想される。

(1) 石油 石油の需要は年平均 4.5%の率で増加し、全エネルギー源に占める石油の分野は、1963年の 45.1%から、1973年には 47.9%, 1983年には 49.1%に増加するであろう。

(2) 天然ガス 天然ガスの全エネルギー源中に占める分野は、1963年の 16.2%から 1983年には 18.3%になるみとおしである。

(3) 石炭 全エネルギー需要が 1950年から 1963年までに 61%増加したのに対し、石炭のみは増減なく全エネルギー中に占める地位も 48.3%から 29.9%に減少した。1973年には 25.1%, 1983年には 22.4%に減少が予想されている。

自由世界の地域別エネルギー需要みとおしは次のとおりである。単位は石油に換算 1 日につき百万バレルとする。

	1950年	1963年	1973年	1983年
アメリカおよび カナダ	17.5	25.6	35.8	49.7
欧州	8.9	14.6	21.2	30.4
日本	0.8	2.4	4.5	8.4
その他自由諸国	3.5	6.9	11.8	20.1
全自由諸国 計	30.7	49.5	73.3	108.6

(Drilling, 1964, Vol. 25, No. 7, p. 46~47)

(日本科学技術情報センター提供)

固体潤滑剤のいろいろ

機械加工において二つの表面の間の圧力が高いときは、潤滑油はいりこめない。この問題を解決するために固体潤滑剤の開発が盛んに行なわれている。

黒鉛はコストも低いし資源も十分なので、固体潤滑剤として最も多く使用されている。金属の表面との接合力が強く、600°C 以下では潤滑力が低下しないが、しだいに固まるのが欠点である。したがってオイルパイプや導管などの施設に使用すれば流れを止めてしまうおそれがある。この困難を除くために、黒鉛の微粉を使用する方式が開発された。黒鉛のカーボン粒子が金属の表面の細孔に浸透して表面層を作りこの層が潤滑剤となり、熱にも耐えるのである。

黒鉛は普通の温度では酸、アルカリ、ハロゲンの影響を受けない。また 1100°F 以下では二酸化炭素を作る。黒鉛を潤滑剤として使用する上において困ることは、その色と着色しやすい性質と不溶解性である。このような欠点がないともっと利用されるはずである。

最近二硫化モリブデンが潤滑剤として用いられる傾向が高まっている。これまでは含有不純物が研摩剤のような働きをするのであまり使用されなかった。それで不純物を除くために精錬して、黒色の粉状潤滑剤として用いられるようになってきた。

雲母は粉にひいて、ある種の潤滑剤に添加し、これにタルクを混入して、ラップ仕上に使用する場合もある。

フラー土は乾燥させるか、あるいは水、軽油、グリースなどとまぜると腐食防止剤となる。700°F までの温度に耐える力がある。

窒化ほう素は 2700°C 以上で溶ける非結晶の粉である。最近きわめて高い温度のもとで使用する潤滑剤の重要な成分として認められるようになった。しかし値段が非常に高い。(Can. Metalworking, 1964, Vol. 1964, No. 3, p. 38).

(日本科学技術情報センター提供)